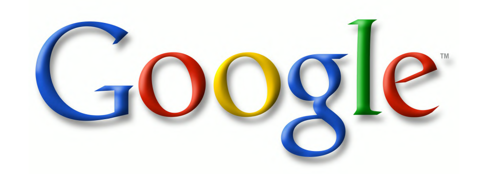


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

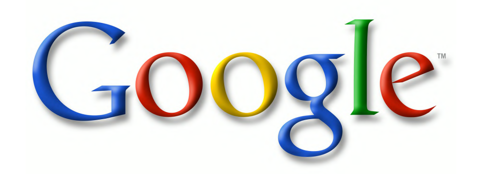
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



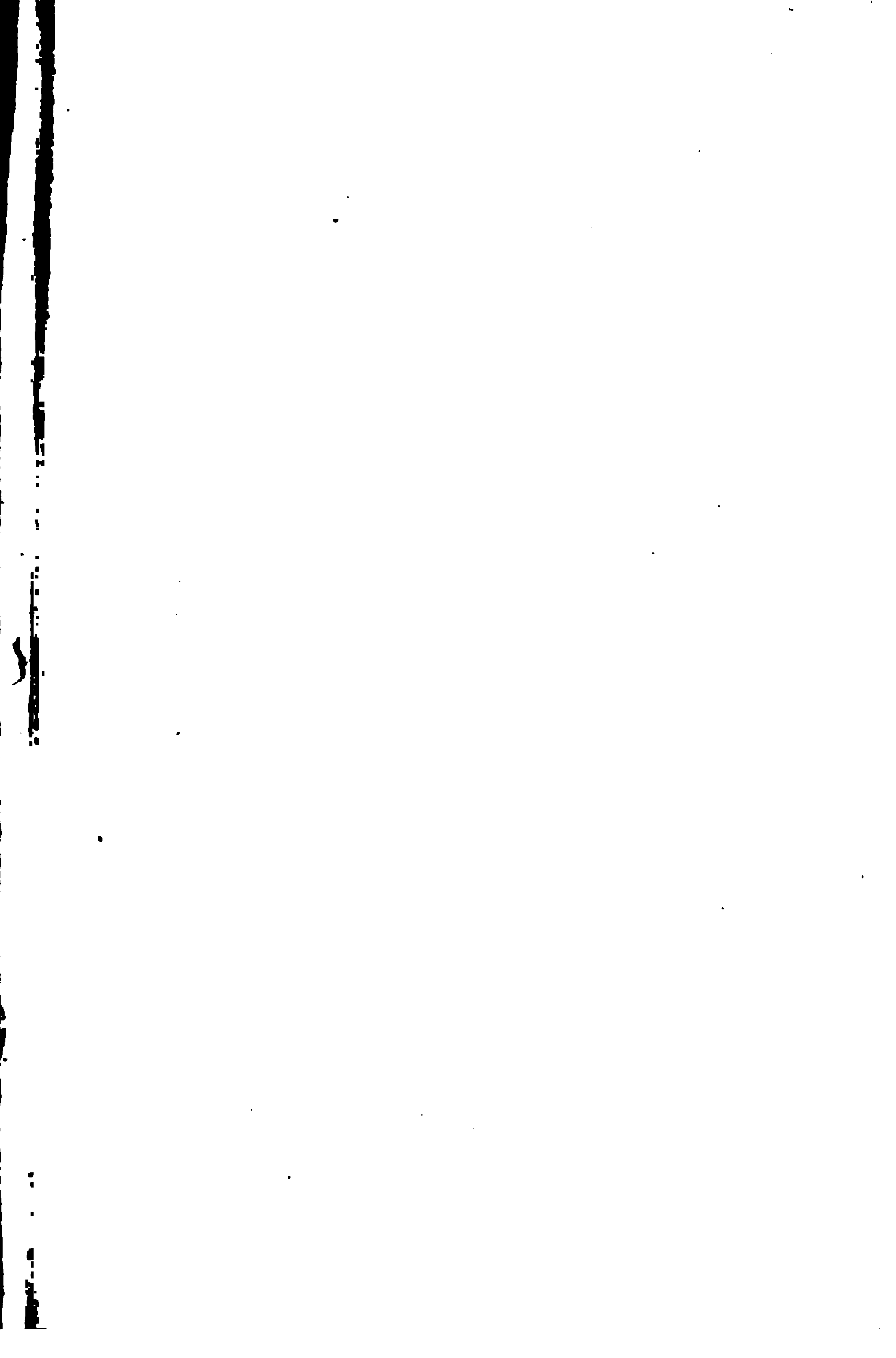
REESE LIBRARY

OF THE

UNIVERSITY OF CALIFORNIA.

Received August , 1898.

Accession No. 72582 . *Class No.* .





Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

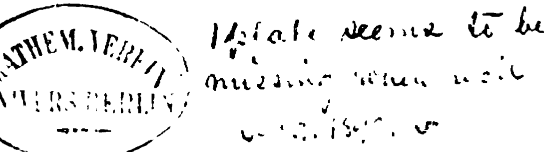
und

Dr. M. Cantor.



Sechszehnter Jahrgang.

Mit 10 lithographirten Tafeln.



LEIPZIG,

Verlag von B. G. Teubner.

1871.

QH1
Z4
v.15

72382

Inhalt.

Geschichte der Mathematik.

Arithmetik und Analysis.

Synthetische und analytische Geometrie.

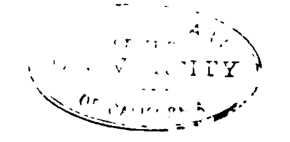
Geodäsie.

Mechanik.

Optik.

Wärmelehre und Molecularphysik.

Elektricität und Magnetismus.





I.

Grundformeln der analytischen Geometrie des Raumes in homogenen Coordinaten.

(Im Anschluss an den Aufsatz: „Die Grundformeln der ebenen analytischen Geometrie in homogenen Coordinaten" im XV. Jahrg. Heft 6 dieser Zeitschrift.)

Von

Dr. Richard Heger,

Oberlehrer am städtischen Gymnasium zu Dresden.

---

§ 1. Homogene Coordinaten des Punktes und der Ebene.

1. Unter den homogenen Coordinaten eines Punktes versteht man die Abstände x_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ von den vier Flächen eines Tetraeders, des Axentetraeders.

Man rechnet die Coordinaten positiv, wenn sie ins Innere des Tetraeders gerichtet sind, im Gegenfalle negativ.

Bezeichnet man mit g_k den Inhalt der Tetraederfläche, zu welcher x_k normal ist, und mit $\varDelta$ das dreifache Volumen des Tetraeders, so erfüllen die Coordinaten eines Punktes die Gleichung

$$\Sigma g_k x_k \equiv g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 + g_4 x_4 = \varDelta.$$

2. Durch je vier mit Vorzeichen behaftete Strecken x_k, welche der Gleichung $\Sigma g_k x_k = \varDelta$ genügen (wobei k, wie immer zukünftig, wenn nicht das Gegentheil bemerkt wird, 1, 2, 3 oder 4 bedeute), ist ein Punkt eindeutig bestimmt, der x_k zu Coordinaten hat.

3. Transformation aus einem orthogonalen in ein homogenes System.

Die Gleichung der Ebene g_k im orthogonalen System sei

$$a_k x + b_k y + c_k z = 1.$$

Der Ursprung hat den Abstand von g_k:

$$e_k = \frac{1}{\sqrt{a^2_k + b^2_k + c^2_k}}.$$

Diese Wurzel werde immer positiv gerechnet.

Durch den Punkt P' mit den Coordinaten x', y', z' lege man eine Parallelebene zu g_k; dieselbe hat die Gleichung

$$\mu a_k x + \mu b_k y + \mu c_k z = 1, \quad \mu = \frac{1}{a_k x' + b_k y' + c_k z'}.$$

Demnach hat der Ursprung von dieser Ebene den Abstand

$$e'_k = \frac{a_k x' + b_k y' + c_k z'}{\sqrt{a^2_k + b^2_k + c^2_k}}.$$

Dieser Ausdruck ist positiv für alle Punkte P', welche auf der g_k zugewandten Seite der durch den Ursprung zu g_k gelegten Parallelebene liegen, negativ für die Punkte, welche durch die Parallelebene von g_k getrennt werden. Demnach ist $e_k - e'_k$ der Abstand von P' nach g_k, und zwar mit dem positiven Vorzeichen für alle Punkte, welche mit dem Ursprung auf derselben Seite von g_k liegen.

Bedeutet ε_k die positive oder negative Einheit, je nachdem die gleichbezifferte Coordinate des Ursprungs positiv oder negativ ist, so werden demnach die homogenen Coordinaten eines Punktes incl. Vorzeichen aus den orthogonalen abgeleitet durch die vier Gleichungen

$$x_k = \varepsilon_k \frac{1 - (a_k x + b_k y + c_k z)}{\sqrt{a^2_k + b^2_k + c^2_k}}.$$

Löst man diese vier Gleichungen nach x, y, z auf, so lassen sich die Lösungen als homogene lineare Functionen der x_k darstellen.

Hiernach erfolgt die Transformation aus orthogonalen Systemen in homogene durch nicht-homogene lineare, die aus homogenen in orthogonale oder aus homogenen in homogene durch homogene lineare Substitutionen.

4. Bezeichnet A_k die g_k gegenüberliegende Tetraederecke, h_k die Höhe auf g_k, C_0 den Mittelpunkt, ϱ den Radius der vom Tetraeder umschlossenen eingeschriebenen Kugel, C_k den Mittelpunkt, ϱ_k den Radius der eingeschriebenen Kugel, welche g_k von Aussen berührt, S den Schwerpunkt des Tetraeders, so sind die homogenen Coordinaten

	x_1	x_2	x_3	x_4
für A_1:	h_1	0	0	0,
„ A_2:	0	h_2	0	0,
„ A_3:	0	0	h_3	0,
„ A_4:	0	0	0	h_4,
„ C_0:	ϱ	ϱ	ϱ	ϱ,
„ C_1:	$-\varrho_1$	ϱ_1	ϱ_1	ϱ_1,
„ C_2:	ϱ_2	$-\varrho_2$	ϱ_2	ϱ_2,
„ C_3:	ϱ_3	ϱ_3	$-\varrho_3$	ϱ_3,
„ C_4:	ϱ_4	ϱ_4	ϱ_4	$-\varrho_4$,
„ S:	$\frac{1}{4} h_1$	$\frac{1}{4} h_2$	$\frac{1}{4} h_3$	$\frac{1}{4} h_4$.

5. Unter den homogenen Coordinaten einer Ebene versteht man die Quotienten u_k aus den Abständen der Ebene von den vier Ecken A_k eines Tetraeders und dem Abstande von einem willkürlich gewählten Fixpunkte C.

Man rechnet u_k positiv, wenn A_k und C auf derselben Seite der Ebene gelegen sind, im Gegenfalle negativ.

6. Bezeichnen u, v, w die orthogonalen Plancoordinaten der variabeln Ebene, α_k, β_k, γ_k die orthogonalen Coordinaten der Tetraederecke A_k, so sind unter Benutzung der Entwickelungen von 5) die homogenen Plancoordinaten aus den orthogonalen abgeleitet durch die vier Formeln

$$u_k = 1 - \alpha_k u - \beta_k v - \gamma_k w.$$

Löst man dieses System nach u, v, w, so erhält man homogene lineare Functionen der u_k; bildet man das System

$$0 = (1 - u_k) - \alpha_k u - \beta_k v - \gamma_k w,$$

so muss die Determinante desselben verschwinden.

Bezeichnet r_k die Coordinaten von C, so liefert diese Determinante die Gleichung

$$\Sigma g_k r_k u_k \equiv g_1 r_1 u_1 + g_2 r_2 u_2 + g_3 r_3 u_3 + g_4 r_4 u_4 = \Delta.$$

7. Je vier reelle Zahlen u_k, welche der Gleichung

$$\Sigma g_k r_k u_k = \Delta$$

genügen, bestimmen eine Ebene eindeutig, deren Coordinaten sie sind.

Denn alle Ebenen, welche dieselbe Coordinate u_k besitzen, umhüllen den Punkt, der die Strecke $A_k C$ im Verhältniss $(-u_k)$ theilt, wenn man inneren Theilpunkten ein positives, äusseren ein negatives Theilverhältniss zuschreibt.

Die eindeutig bestimmte Ebene, welche $A_1 C$, $A_2 C$, $A_3 C$ in den Verhältnissen $(-u_1)$, $(-u_2)$, $(-u_3)$ theilt, hat u_1, u_2, u_3 zu auf A_1, A_2, A_3 bezogenen Coordinaten; da nun die gegebenen u_k die Gleichung $\Sigma g_k r_k u_k = \Delta$ erfüllen, so kann u_4 von der auf A_4 bezogenen Coordinate nicht verschieden sein, q. e. d.

8. Die in 6) aufgestellten Transformationsformeln lehren: Die Transformation aus einem homogenen System von Plancoordinaten zu einem orthogonalen erfolgt durch nicht homogene lineare Substitutionen; die reciproke Transformation, sowie die Transformation aus einem homogenen in ein anderes erfolgt durch homogene lineare Substitutionen.

9. Die Coordinaten der Tetraederflächen sind

	u_1	u_2	u_3	u_4
für g_1:	$\frac{h_1}{r_1}$	0	0	0,
„ g_2:	0	$\frac{h_2}{r_2}$	0	0,

	u_1	u_2	u_3	u_4
für g_3:	0	0	$\frac{h_3}{r_3}$	0,
„ g_4:	0	0	0	$\frac{h_4}{r_4}$.

§ 2. Die Gleichung der Ebene und des Punktes.

1. Gleichung der Ebene. Transformirt man nach § 1 aus dem orthogonalen in ein homogenes System, so geht die Gleichung der Ebene über in eine nicht homogene, lineare Gleichung zwischen den homogenen Coordinaten des variabeln Punktes. Multiplicirt man das Absolutglied derselben mit

$$\frac{g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 + g_4 x_4}{\varDelta} (=1),$$

so geht die Gleichung in die Form über:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0.$$

Umgekehrt kann man jede solche Gleichung durch die reciproke Substitution in eine lineare Gleichung zwischen orthogonalen Coordinaten verwandeln. Hieraus folgt:

Die Gleichung einer jeden Ebene lässt sich als homogene lineare Gleichung zwischen den homogenen Punktcoordinaten darstellen, und jede homogene lineare Gleichung zwischen den homogenen Punktcoordinaten repräsentirt eine Ebene, die durch die vier Constanten derselben eindeutig bestimmt ist.

2. Die Ebene, welche die drei Punkte x'_k, x''_k, x'''_k enthält, hat zur Gleichung:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 & x''_4 \\ x'''_1 & x'''_2 & x'''_3 & x'''_4 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Lehrsatz: Sind zwei Zahlen λ', λ'' so gewählt, dass

$$\lambda' + \lambda'' = 1,$$

und setzt man die Coordinaten x_k eines Punktes P aus den Coordinaten x'_k und x''_k zweier Punkte P' und P'' nach den vier Gleichungen zusammen

$$x_k = \lambda' x'_k + \lambda'' x''_k,$$

so liegt P auf der Geraden $P'P''$ und theilt $P'P''$ im Verhältniss

$$P'P : PP'' = \lambda'' : \lambda'.$$

Beweis. Aus $\lambda' + \lambda'' = 1$ folgt, dass die dem Satze gemäss bestimmten Strecken x_k in der That die Coordinaten eines Punktes sind, denn sie erfüllen die Gleichung $\Sigma g_k x_k = \varDelta$.

Man wähle einen beliebigen Hilfspunkt Π mit den Coordinaten ξ_k; die Ebene $P'\,P''\,\Pi$ hat zur Gleichung

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 & x''_4 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Derselben wird durch die Coordinaten von P genügt, denn

$$\begin{vmatrix} \lambda' x'_1 + \lambda'' x''_1 & \lambda' x'_2 + \lambda'' x''_2 & \lambda' x'_3 + \lambda'' x''_3 & \lambda' x'_4 + \lambda'' x''_4 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 & x''_4 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Da Π willkürlich ist, so folgt hieraus, dass jede Ebene durch $P'\,P''$ zugleich P enthält; folglich liegt P auf $P'\,P''$.

Transformirt man in ein anderes homogenes System und haben $P'\,P''\,P$ in demselben die Coordinaten $X'_k\,X''_k\,X'''_k$, so ist nach § 1, 8

$$X_k = \lambda' X'_k + \lambda'' X''_k.$$

Die Ableitungscoefficienten $\lambda'\,\lambda''$ sind demnach unabhängig von der Wahl des Coordinatensystems, können also nur von der gegenseitigen Lage der drei Punkte abhängen.

Transformirt man nun in ein System, welches P' und P'' als Eckpunkte enthält, und sind die von P' und P'' auf die Gegenflächen gefällten Lothe beziehentlich h_1 und h_2, so sind die Coordinaten von $P'\,P''\,P$ in diesem System:

	x_1	x_2	x_3	x_4
für P':	h_1	0	0	0,
„ P'':	0	h_2	0	0,
„ P:	$\lambda' h_1$	$\lambda'' h_2$	0	0.

Demnach verhält sich

$$P'P : P'P'' : PP'' = \lambda'' : 1 : \lambda',$$

q. e. d.

Für jeden Punkt von $P'\,P''$ giebt es hiernach ein und nur ein Coefficientenpaar λ' und $\lambda'' = 1 - \lambda'$, durch welches seine Coordinaten aus denen von P' und P'' auf die hier durchgeführte Art abgeleitet werden können.

Wenn von vier Punkten P', P'', P''', P^{IV} die Coordinaten zweier derselben aus denen der anderen beiden durch Coefficienten λ', λ'', μ', μ'' abgeleitet werden nach

$$x'''_k = \lambda' x'_k + \lambda'' x''_k, \quad \lambda' + \lambda'' = 1,$$
$$x^{IV}_k = \mu' x'_k + \mu'' x''_k, \quad \mu' + \mu'' = 1,$$

und es ist

$$\lambda' : \lambda'' = -(\mu' : \mu''),$$

so bilden die vier Punkte eine harmonische Reihe, und zwar sind die Paare $P'\,P''$ und $P'''\,P^{IV}$ harmonisch conjugirt.

4. Lehrsatz: Sind drei Zahlen λ', λ'', λ''' so gewählt, dass

$$\lambda' + \lambda'' + \lambda''' = 1,$$

und leitet man die Coordinaten x_k eines Punktes P aus den Coordrnaten x'_k, x''_k, x'''_k dreier nisht in einer Geraden gelegenen Punkte P', P'', P''' durch die vier Gleichungen ab:

$$x_k = \lambda' x'_k + \lambda'' x''_k + \lambda''' x''',$$

so liegt P auf der Ebene $P'P''P'''$ und ist das Centrum dreier in den Punkten $P^{(k)}$ wirkender Parallelkräfte von beziehentlich $\lambda^{(k)}$ Einheiten, wobei ein Unterschied der Zeichen als Unterschied der Kraftrichtung zu deuten ist.

Beweis. Die Strecken x_k sind die Coordinaten eines Punktes, denn sie erfüllen $\Sigma g_k x_k = \Delta$.

Der durch sie bestimmte Punkt P liegt auf $P'P''P'''$, denn seine Coordinaten genügen der Gleichung dieser Ebene [2j].

Seien X_k, X'_k, X''_k, X'''_k die Coordinaten von $PP'P''P'''$ in einem andern homogenen Systeme, so werden infolge der homogenen linearen Transformationsformeln die X_k aus den X'_k, X''_k, X'''_k mit Hilfe derselben Coefficienten in derselben Weise abgeleitet, wie die x_k aus den x'_k, x''_k, x'''_k. Die drei Ableitungscoefficienten können demnach nur von der gegenseitigen Lage der vier Punkte abhängen.

Sei Π der Punkt, welcher $P'P''$ im Verhältniss $\lambda''' : \lambda''$ theilt, so ist

$$\xi_k = \frac{\lambda'' x''_k}{\lambda'' + \lambda'''} + \frac{\lambda''' x'''}{\lambda'' + \lambda'''}$$

und

$$x_k = \lambda' x'_k + (\lambda'' + \lambda''')\,\xi_k.$$

Mithin theilt P die Strecke $P'\Pi$ im Verhältniss $\lambda'' + \lambda''' : \lambda'$, q. e. d.

Jeder Punkt der Ebene $P'P''P'''$ kann demnach in dieser Art durch eine und nur eine Coefficientengruppe $\lambda'\lambda''\lambda'''$ abgeleitet werden.

5. Lehrsatz: Wählt man vier Zahlen λ', λ'', λ''', λ^{IV} so, dass

$$\lambda' + \lambda'' + \lambda''' + \lambda^{\text{IV}} = 1,$$

so lassen sich die Coordinaten x_k jedes Punktes aus den Coordinaten x'_k, x''_k, x'''_k, x^{IV}_k von vier nicht in derselben Ebene gelegenen Punkten P', P'', P''', P^{IV} durch die vier Formeln ableiten:

$$x_k = \lambda' x'_k + \lambda'' x''_k + \lambda''' x'''_k + \lambda^{\text{IV}} x^{\text{IV}}_k.$$

Der so bestimmte Punkt ist das Centrum von vier in den Punkten $P^{(k)}$ wirkenden Parallelkräften von beziehentlich $\lambda^{(k)}$ Einheiten.

Beweis. Die Strecken x_k erfüllen $\Sigma g_k x_k = \Delta$, sind also in der That vier Coordinaten eines Punktes.

Construirt man den Punkt Π nach den Formeln

$$\xi_k = \frac{1}{\lambda'' + \lambda''' + \lambda^{\text{IV}}} (\lambda'' x''_k + \lambda''' x'''_k + \lambda^{\text{IV}} x^{\text{IV}}_k),$$

so erhält man P aus P' und Π durch

$$x_k = \lambda' x'_k + (\lambda'' + \lambda''' + \lambda^{IV}) \xi_k.$$

Also theilt P die Strecke $P'\Pi$ im Verhältniss

$$P'P : P\Pi = (\lambda'' + \lambda''' + \lambda^{IV}) : \lambda',$$

ist also das Centrum der Kraft λ' in P' und der in ihr Centrum Π vereinten Kräfte λ'' in P'', λ''' in P''', λ^{IV} in P^{IV}, q. e. d.

6. Sind T' und T'' die Tetranomien in den Gleichungen zweier Ebenen, und μ', μ'' zwei beliebige Zahlen, so geht die Ebene, deren Tetranom T aus T' und T'' nach der Formel zusammengesetzt wird:

$$T \equiv \mu' T' + \mu'' T'',$$

durch die Gerade $(T'T'')$, und umgekehrt.

Denn jeder Punkt, welcher die beiden Polynomien T' und T'' annullirt, erfüllt die Gleichung

$$T = 0.$$

7. Sind T', T'', T''' die Polynomien in den Gleichungen dreier, nicht dieselbe Gerade enthaltender Ebenen, und μ', μ'', μ''' drei willkürliche Zahlen, so geht jede Ebene, deren Polynom T aus den gegebenen durch die Formel abgeleitet wird:

$$T \equiv \mu' T' + \mu'' T'' + \mu''' T''',$$

durch die Ecke $T'T''T'''$, und umgekehrt.

Denn der Punkt, für welchen zugleich T' T'' T''' annullirt werden, erfüllt die Gleichung

$$T = 0.$$

Um die Umkehrungen von 6) und 7) zu beweisen, bemerke man zunächst, dass, wenn T' T'' T''' dieselbe Gerade enthalten, für jede beliebige Wahl der μ doch immer nur eine Ebene erzielt wird, welche durch dieselbe Gerade geht.

Nimmt man an, das Polynom T irgend einer Ebene durch die Gerade $T'T''$, beziehentlich den Punkt $T'T''T'''$ könne nicht nach 6), beziehentlich 7) dargestellt werden, so müsste also für jede Wahl von $\mu'\mu''$, beziehentlich $\mu'\mu''\mu'''$ nur eine Darstellung von der Form möglich sein:

$$T \equiv \mu' T' + \mu'' T'' + R,$$

beziehentlich

$$T \equiv \mu' T' + \mu'' T'' + \mu''' T''' + R,$$

wobei R weder ein Vielfaches von T' T'' T''', noch ein Aggregat solcher Vielfachen bedeutet, also für $T' = 0$ und $T'' = 0$, beziehentlich für $T' = 0$, $T'' = 0$, $T''' = 0$ nicht verschwindet. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, gemäss welcher T durch die Gerade T' T'', beziehentlich den Punkt T' T'' T''' geht.

8. Lehrsatz: Sind T' T'' T''' T^{IV} die Polynomien der Gleichungen von vier nicht denselben Punkt enthaltenden Ebenen, und μ' μ'' μ''' μ^{IV} vier endliche reelle Zahlen, so kann das Polynom jeder beliebigen Ebene durch die Formel dargestellt werden:

$$T \equiv \mu' T' + \mu'' T'' + \mu''' T''' + \mu^{IV} T^{IV},$$

und umgekehrt.

Denn wird das System $T'=0$, $T''=0$, $T'''=0$, $T^{IV}=0$ durch kein Werthsystem x_k befriedigt, so ist die Determinante des Systems von Null verschieden. Ist nun

$$T^{(i)} \equiv a_1^{(i)} x_1 + a_2^{(i)} x_2 + a_3^{(i)} x_3 + a_4^{(i)} x_4,$$

so sind die μ die Lösungen des Systems:

$$\mu' a'_k + \mu'' a''_k + \mu''' a'''_k + \mu^{IV} a^{IV}_k = a_k;$$

dieses System giebt endliche reelle Werthe für die μ, da die Determinante desselben nicht verschwindet.

Zum Beweis der Umkehrung genügt die Bemerkung, dass T eine lineare Function der x_k, also $T=0$ die Gleichung einer Ebene ist.

9. Gleichung des Punktes. Transformirt man die Gleichung eines Punktes in orthogonalen Plancoordinaten zu homogenen Plancoordinaten, so erhält man eine nicht homogene lineare Gleichung der u_k. Multiplicirt man das Absolutglied mit

$$\frac{g_1 r_1 u_1 + g_2 r_2 u_2 + g_3 r_3 u_3 + g_4 r_4 u_4}{\Delta} \quad (=1),$$

so nimmt die Gleichung des Punktes die Form an:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0.$$

Die reciproke Transformation lehrt, dass jede homogene lineare Gleichung zwischen den Coordinaten einer Ebene einen Punkt darstellt.

Die Gleichung des Punktes lässt sich demnach als homogene lineare Gleichung zwischen den homogenen Coordinaten der den Punkt enthaltenden Ebenen darstellen und umgekehrt.

10. Die Gleichung des Schnittpunktes dreier Ebenen u'_k, u''_k, u'''_k ist

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u'_1 & u'_2 & u'_3 & u'_4 \\ u''_1 & u''_2 & u''_3 & u''_4 \\ u'''_1 & u'''_2 & u'''_3 & u'''_4 \end{vmatrix} = 0.$$

11. Lehrsatz: Diejenige Ebene T, deren Coordinaten u_k aus den Coordinaten u'_k und u''_k zweier Ebenen $T'\,T''$ nach den Formeln abgeleitet werden:

$$u_k = \lambda' u'_k + \lambda'' u''_k, \quad \lambda' + \lambda'' = 1,$$

geht durch die Kante $T'\,T''$, und ihre Lage gegen T' und T'' wird durch die Coefficienten $\lambda'\lambda''$ eindeutig charakterisirt.

Die Coordinaten einer jeden Ebene durch die Kante $T'\,T''$ lassen sich aus denen von $T'\,T''$ auf diese Weise einmal und nur einmal darstellen.

Beweis. Die Coordinaten u_k genügen der Gleichung

$$\Sigma g_k r\ u_k = \Delta,$$

sind also in der That vier Coordinaten einer Ebene.

Wählt man eine willkürliche Hilfsebene T''' mit den Coordinaten u'''_k, so geht T durch den Punkt $T' T'' T'''$, denn unter den gemachten Voraussetzungen erfüllen die u_k die Gleichung dieses Punktes:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u'_1 & u'_2 & u'_3 & u'_4 \\ u''_1 & u''_2 & u''_3 & u''_4 \\ u'''_1 & u'''_2 & u'''_3 & u'''_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Aus der Willkürlichkeit von T''' ergiebt sich, dass jeder T' und T'' gemeinsame Punkt zugleich der Ebene T angehört.

Transformirt man zu einem neuen Systeme, und sind hier die Coordinaten von $T T' T''$ beziehentlich U_k, U'_k, U''_k, so gelten infolge der homogenen Substitutionen folgende Beziehungen:

$$U_k = \lambda' U'_k + \lambda'' U''_k.$$

Hieraus folgt, dass die Lage von T nicht vom Coordinatensystem, sondern nur von T', T'' und den Coefficienten λ', λ'' abhängt.

Um diese Abhängigkeit zu bestimmen, wähle man ein Axentetraeder, in welchem g_1 auf T', g_2 auf T'' fällt und C_x positive Coordinaten hat.

Sind r, r_1, r_2 die Abstände des Fixpunktes von beziehentlich T, T', T', so sind im neuen System die Coordinaten

	u_1	u_2	u_3	u_4
für T':	$\frac{h_1}{r_1}$	0	0	0,
„ T'':	0	$\frac{h_2}{r_2}$	0	0,
„ T:	$\frac{\lambda' h_1}{r_1}$	$\frac{\lambda'' h_2}{r_2}$	0	0.

Sind λ' und λ'' beide positiv, so werden demnach die dem Fixpunkte zugekehrten (i. e. positiven) Seiten der Ebenen $T' T''$ durch T nicht getrennt; ist $\lambda' > 1$, $\lambda'' < 0$, so geht T zwischen C und T' hindurch; ist $\lambda' < 0$, $\lambda'' > 1$, so geht T zwischen C und T'' hindurch.

In jedem Falle gilt zunächst ohne Rücksicht auf das Vorzeichen:

$$\sin T' T : \sin T' T'' = r u_2 : h_2 = \frac{\lambda''}{r_2} : 1,$$

$$\sin T' T'' : \sin T T'' = h_1 : r u_1 = 1 : \frac{\lambda'}{r_1}$$

oder

$$\sin T' T : \sin T T'' = \frac{\lambda''}{r_2} : \frac{\lambda'}{r_1}.$$

Bezeichnet man den Winkel, welchen die positiven Seiten zweier Ebenen einschliessen, als den inneren, sein Supplement als den äusseren Winkel, und bezieht man ein positives Verhältniss auf eine Theilung des inneren, ein negatives auf eine Theilung des äusseren Winkels, so gilt nun einschliesslich des Vorzeichens der Satz:

UNIV

Die Ebene T theilt den Winkel $T'T''$ im Sinusverhältniss $-\left(\frac{\lambda''}{r_2}:\frac{\lambda'}{r_1}\right)$, d. i. so, dass

$$\sin T'T : \sin TT'' = -\left(\frac{\lambda''_1}{r_2}:\frac{\lambda'}{r_1}\right).$$

Wenn von vier Ebenen $T'T''T'''T^{IV}$ die Coordinaten zweier derselben aus denen der anderen beiden nach den Formeln abgeleitet werden:

$$u'''_k = \lambda' u'_k + \lambda'' u''_k, \quad \lambda' + \lambda'' = 1,$$
$$u^{IV}_k = \mu' u'_k + \mu'' u''_k, \quad \mu' + \mu'' = 1,$$

und es ist

$$\frac{\lambda'}{r_1}:\frac{\lambda''}{r_2} = -\left(\frac{\mu'}{r_1}:\frac{\mu''}{r_2}\right),$$

d. i.:

$$\lambda' : \lambda'' = -(\mu' : \mu''),$$

so bilden die vier Ebenen ein harmonisches Büschel, und zwar sind die Paare $T'T''$ und $T'''T^{IV}$ harmonisch conjugirt.

12. Lehrsatz: Sind $u'_k\, u''_k\, u'''_k$ die Coordinaten dreier nicht dieselbe Gerade enthaltender Ebenen $T'T''T'''$ und leitet man hieraus u_k durch die Formeln ab:

$$u_k = \lambda' u'_k + \lambda'' u''_k + \lambda''' u'''_k, \quad \lambda' + \lambda'' + \lambda''' = 1,$$

so sind u_k die Coordinaten einer den Punkt $T'T''T'''$ enthaltenden Ebene. Die Coordinaten jeder Ebene durch $T'T''T'''$ lassen sich auf diese Weise und nur durch ein System der Coefficienten λ zusammensetzen.

Beweis: Die u_k genügen der Gleichung $\Sigma g_k r_k u_k = \Delta$, sind also die Coordinaten einer Ebene. Dieselbe enthält den Punkt $T'T''T'''$, denn ihre Coordinaten annulliren die [z. B. in Determinantenform nach 10) dargestellte] Gleichung des Punktes $T'T''T'''$.

Um den letzten Theil des Satzes zu beweisen, lege man die Ebene $\mathfrak{T}$ durch die Kanten $T'T$ und $T''T'''$; sie habe den Abstand $\mathfrak{r}$ von C und die Coordinaten $\mathfrak{u}_k$. Alsdann kann man die Zahlen $\lambda'\,\mu\,\lambda''\,\lambda'''$ immer und eindeutig so bestimmen, dass

a) $$\sin T'T : \sin T\mathfrak{T} = -\frac{\mu}{\mathfrak{r}}:\frac{\lambda'}{r_1}, \quad \lambda' + \mu = 1,$$

b) $$\sin T''\mathfrak{T} : \sin \mathfrak{T}T''' = -\frac{\lambda'''}{r_3}:\frac{\lambda''}{r_2}, \quad \lambda'' + \lambda''' = \mu.$$

Nach a) ist

$$u_k = \lambda' u'_k + \mu\, \mathfrak{u}_k,$$

nach b):

$$\mathfrak{u}_k = \frac{1}{\mu}(\lambda'' u''_k + \lambda''' u'''_k),$$

also ist

$$u_k = \lambda' u'_k + \lambda'' u''_k + \lambda''' u'''_k,$$

q. e. d.

13. Lehrsatz: Sind $u'_k\, u''_k\, u'''_k\, u^{IV}_k$ die Coordinaten von vier nicht denselben Punkt enthaltenden Ebenen $T'\,T''\,T'''\,T^{IV}$, so lassen sich die Coordinaten u_k einer jeden Ebene T durch die Formeln und nur durch **ein** System der λ darstellen:

$$u_k = \lambda' u'_k + \lambda'' u''_k + \lambda''' u'''_k + \lambda^{IV} u^{IV}_k, \quad \lambda' + \lambda'' + \lambda''' + \lambda^{IV} = 1.$$

Beweis. Da $\Sigma g_k r_k u_k = \Delta$ erfüllt ist, so liefern die Formeln in der That die Coordinaten einer Ebene.

Man construire $\mathfrak{T}$ durch die Kante $T'\,T$ und den Punkt $T''\,T'''\,T^{IV}$, ferner $\mathfrak{T}'$ durch $T''\,\mathfrak{T}$ und $T'''\,T^{IV}$; $\mathfrak{T}\,\mathfrak{T}'$ haben die Coordinaten $\mathfrak{u}_k\,\mathfrak{u}'_k$ und die Abstände $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}_1$ von C.

Man kann nun $\mu\,\mu'\,\lambda'\,\lambda''\,\lambda'''\,\lambda^{IV}$ immer und eindeutig so bestimmen, dass zugleich

a) $$\sin T'\,T : \sin T\mathfrak{T} = -\frac{\mu}{\mathfrak{r}} : \frac{\lambda'}{r_1}, \quad \lambda' + \mu = 1,$$

b) $$\sin T''\,\mathfrak{T} : \sin \mathfrak{T}\,\mathfrak{T}' = -\frac{\mu'}{\mathfrak{r}_1} : \frac{\lambda''}{r_2}, \quad \lambda'' + \mu' = \mu,$$

c) $$\sin T'''\,\mathfrak{T}' : \sin \mathfrak{T}\,T^{IV} = -\frac{\lambda^{IV}}{r_4} : \frac{\lambda'''}{r_3}, \quad \lambda''' + \lambda^{IV} = \mu'.$$

Alsdann ist

$$\lambda' + \lambda'' + \lambda''' + \lambda^{IV} = 1$$

und

$$\text{nach a): } u_k = \lambda' u'_k + \mu\,\mathfrak{u}_k,$$

$$\text{„ b): } \mathfrak{u}_k = \frac{1}{\mu}(\lambda'' u''_k + \mu' \mathfrak{u}'_k),$$

$$\text{„ c): } \mathfrak{u}'_k = \frac{1}{\mu'}(\lambda''' u'''_k + \lambda^{IV} u^{IV}_k),$$

also

$$u_k = \lambda' u'_k + \lambda'' u''_k + \lambda''' u'''_k + \lambda^{IV} u^{IV}_k,$$

q. e. d.

14. Lehrsatz: Sind $P'\,P''$ die linken Seiten der Gleichungen zweier Punkte $P'\,P''$, und bildet man mit den Zahlen $\mu'\,\mu''$ das Binom

$$P \equiv \mu' P' + \mu'' P'',$$

so liegt der Punkt $P=0$ auf der Geraden $P'=P''$.

Denn alle Ebenen, deren Coordinaten P' und P' annulliren, erfüllen auch $P=0$.

15. Lehrsatz: Sind $P'\,P''\,P'''$ die linken Seiten der Gleichungen dreier nicht in derselben Geraden gelegenen Punkte und bildet man das Trinom

$$P \equiv \mu' P' + \mu'' P' + \mu''' P'',$$

so ist $P=0$ die Gleichung eines Punktes der Ebene $P'\,P''\,P'''$.

Denn die Coordinaten dieser Ebene erfüllen zugleich

$$P'=0, \quad P''=0, \quad P'''=0, \text{ also auch } P=0.$$

16. Lehrsatz: Die linke Seite der Gleichung jedes Punktes der Geraden $P'P''$ lässt sich in der in 14), jedes Punktes der Ebene $P'P''P'''$ in der in 15) angegebenen Weise ableiten.

Der Beweis erfolgt ganz analog dem in 7) für Ebenengleichungen gegebenen.

17. Lehrsatz: Sind $P'\ P''\ P'''\ P^{IV}$ die linken Seiten der Gleichungen von vier nicht in derselben Ebene enthaltenen Punkten, so lassen sich für jeden Punkt P im Raume vier Zahlen $\mu'\ \mu''\ \mu'''\ \mu^{IV}$ so finden, dass

$$\mu' P' + \mu'' P'' + \mu''' P''' + \mu^{IV} P^{IV} \equiv P = 0.$$

Beweis. Soll diese Darstellung möglich sein, so müssen die μ das System von vier linearen Gleichungen erfüllen:

$$\mu' \alpha'_k + \mu'' \alpha''_k + \mu''' \alpha'''_k + \mu^{IV} \alpha^{IV} = \alpha_k.$$

Dieses System liefert endliche eindeutige Werthe für μ, da die Determinante desselben nicht verschwindet.

18. Es giebt bei dieser Coordinatenbestimmung eine und nur eine Ebene, deren Punkte sämmtlich unendlich fern sind.

Die Coordinaten dieser unendlich fernen Ebene T_∞ sind

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 1.$$

Um die Gleichung derselben zu bestimmen, benutze man den Umstand, dass die unendlich ferne Ebene mit je zwei willkürlichen Ebenen einen unendlich fernen Schnittpunkt liefert. Sind $T' = 0$, $T'' = 0$ die Gleichungen zweier willkürlicher Ebenen und ist

$$T_\infty \equiv A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 x_4 = 0,$$

so muss also das System

$$\begin{aligned} A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 x_4 &= 0, \\ a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + a'_3 x_3 + a'_4 x_4 &= 0, \\ a''_1 x_1 + a''_2 x_2 + a''_3 x_3 + a''_4 x_4 &= 0, \\ g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 + g_4 x_4 &= \varDelta \end{aligned}$$

lauter unendliche Auflösungen liefern; folglich muss die Determinante dieses Systems verschwinden. Bei der Willkürlichkeit von a'_k und a''_k ist dies nur dann möglich, wenn

$$A_1 : A_2 : A_3 : A_4 = g_1 : g_2 : g_3 : g_4.$$

Die Gleichung der unendlich fernen Ebene ist demnach:

$$T_\infty \equiv g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 + g_4 x_4 = 0.$$

19. Sind die Ebenen $T = 0$, $T' = 0$ parallel, so unterscheiden sich ihre in geeigneter Weise erweiterten linken Seiten nur durch ein Vielfaches von T_∞; denn es geht alsdann T durch den Schnitt $T'\,T_\infty$, also lässt sich 6) T unter der Form darstellen:

$$T \equiv \mu' T' + \mu'' T_\infty,$$

q. e. d.

Enthält überdies T einen gegebenen Punkt x'_k, so ist

$$-\mu' : \mu'' = \Delta : a'_1 x'_1 + a'_2 x'_2 + a'_3 x'_3 + a'_4 x'_4.$$

Die Bedingung dafür, dass drei Ebenen $T' T'' T'''$ derselben Geraden parallel sind, ist das Verschwinden der Determinante des Systems

$$T' = 0, \quad T'' = 0, \quad T''' = 0, \quad T_\infty = 0,$$

d. i.:

$$\begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 & a'_4 \\ a''_1 & a''_2 & a''_3 & a''_4 \\ a'''_1 & a'''_2 & a'''_3 & a'''_4 \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \end{vmatrix} = 0.$$

20. Gleichung eines unendlich fernen Punktes. Sei

$$P \equiv \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0$$

die Gleichung eines unendlich fernen Punktes, so muss derselben durch die Coordinaten der unendlich fernen Ebene, nämlich durch

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 1$$

genügt werden. Hieraus folgt die Bedingung

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0.$$

21. Da es bei dieser Coordinatenbestimmung nur eine unendlich ferne Ebene giebt, die durch eine Gleichung und durch eine Coordinatengruppe eindeutig bestimmt ist, nämlich durch die Gleichung

$$T_\infty \equiv g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 + g_4 x_4 = 0$$

und durch die Coordinaten

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 1,$$

so folgt, dass man hier alle unendlich fernen Punkte in einer Ebene liegend anzunehmen hat.

§ 3. Vermischte Aufgaben über Punkt und Ebene.

1. Bestimmung der Coordinaten einer Ebene T aus der Gleichung $T = 0$ der Ebene.

Sei (T) der Werth, den T erlangt, wenn man die Coordinaten eines nicht in T enthaltenen Punktes hineinsetzt. Dieser Werth ändert sich beim Uebergange zu einem andern System nicht. Werde nun beim Uebergang in ein System, welches T als Tetraederfläche mit enthält, die Gleichung von T transformirt zu

$$T \equiv A x_1 = 0,$$

so folgt, wenn ξ den Abstand eines Punktes P' von T bedeutet:

$$1) \qquad A\xi = a_1 x'_1 + a_2 x'_2 + a_3 x'_3 + a_4 x'_4.$$

Dabei fällt ξ für alle Punkte auf der einen Seite von T positiv, für die jenseitigen negativ aus.

Wendet man 1) auf die Ecken des ursprünglichen Coordinatentetraeders und den Fixpunkt an, so erhält man

$$Aru_1 = a_1 h_1,$$
$$Aru_2 = a_2 h_2,$$
$$Aru_3 = a_3 h_3,$$
$$Aru_4 = a_4 h_4,$$
$$Ar = a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3 + a_4 r_4;$$

hieraus folgen die Coordinaten der Ebene

$$T \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$$

zu

$$u_k = \frac{a_k h_k}{a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3 + a_4 r_4}.$$

2. Bestimmung der Entfernung eines Punktes P' von einer Ebene T aus den Coordinaten x'_k des Punktes und der Gleichung

$$T \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$$

der Ebene.

Zu dieser Rechnung benutzt man die Plücker'schen homogenen Coordinaten der Ebene. Dieselben sind die Abstände $\mathfrak{u}_k$ der Ebene von den Tetraederecken; ihre Vorzeichen werden so bestimmt, wie die der in dieser Abhandlung verwendeten Plancoordinaten. Die $\mathfrak{u}_k$ werden demnach aus den orthogonalen Coordinaten durch die vier Formeln abgeleitet:

$$\mathfrak{u}_k = \frac{1 - \alpha_k u + \beta_k v + \gamma_k w}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}.$$

Bezeichnet γ_{ik} den von g_i und g_k eingeschlossenen Tetraederwinkel, so folgt aus diesem System die Gleichung, welche die vier Plücker'schen Coordinaten jeder Ebene erfüllen, zu

$$\mathfrak{u}_1^2 g_1^2 + \mathfrak{u}_2^2 g_2^2 + \mathfrak{u}_3^2 g_3^2 + \mathfrak{u}_4^2 g_4^2 - 2\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_2 g_1 g_2 \cos\gamma_{12}$$
$$- 2\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_3 g_1 g_3 \cos\gamma_{13} - 2\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_4 g_1 g_4 \cos\gamma_{14} - 2\mathfrak{u}_2\mathfrak{u}_3 g_2 g_3 \cos\gamma_{23}$$
$$- 2\mathfrak{u}_2\mathfrak{u}_4 g_2 g_4 \cos\gamma_{24} - 2\mathfrak{u}_3\mathfrak{u}_4 g_3 g_4 \cos\gamma_{34} = \Delta^2.$$

Da $ru_k = \mathfrak{u}_k$, so folgt aus 1):

$$\mathfrak{u}_k = a_k h_k : A.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung der $\mathfrak{u}_k$ ein, so liefert dieselbe:

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - 2a_1 a_2 \cos\gamma_{12} - 2a_1 a_3 \cos\gamma_{13}$$
$$- 2a_1 a_4 \cos\gamma_{14} - 2a_2 a_3 \cos\gamma_{23} - 2a_2 a_4 \cos\gamma_{24}$$
$$- 2a_3 a_4 \cos\gamma_{34} = A^2.$$

Man wähle für A die positive oder negative Wurzel, je nachdem

$$a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3 + a_4 r_4 \gtrless 0;$$

alsdann ist

$$\xi = \frac{a_1 x'_1 + a_2 x'_2 + a_3 x'_3 + a_4 x'_4}{A}$$

der Abstand des Punktes P' von T; er wird positiv für alle Punkte, welche mit C auf derselben Seite von T liegen; im Gegenfalle negativ.

Erweitert man die Gleichung einer Ebene mit $\frac{1}{A}$, so geht dieselbe in eine neue Form über:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0,$$

in welcher $A = 1$ ist Diese Form mag als **Normalform der Gleichung der Ebene** bezeichnet werden.

Ist demnach $T = 0$ die Normalform der Gleichung der Ebene T, so ist der Abstand des Punktes P' von T:

$$\xi = a_1 x'_1 + a_2 x'_2 + a_3 x'_3 + a_4 x'_4.$$

3. Transformationsgleichungen zum Uebergange aus einem System homogener Punktcoordinaten in ein anderes.

Seien $T' = 0$, $T'' = 0$, $T''' = 0$, $T^{IV} = 0$ die Gleichungen der neuen Coordinatenebenen in ihren Normalformen; sei ferner $\varepsilon_k = \pm 1$, je nachdem die Coordinate r_k von C im neuen System $\gtrless 0$ ist, so sind (einschliesslich der Vorzeichen) die Transformationsformeln die Lösungen des Systems:

$$\xi_1 = \varepsilon_1 (a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + a'_3 x_3 + a'_4 x_4),$$
$$\xi_2 = \varepsilon_2 (a''_1 x_1 + a''_2 x_2 + a''_3 x_3 + a''_4 x_4),$$
$$\xi_3 = \varepsilon_3 (a'''_1 x_1 + a'''_2 x_2 + a'''_3 x_3 + a'''_4 x_4),$$
$$\xi_4 = \varepsilon_4 (a^{IV}_1 x_1 + a^{IV}_2 x_2 + a^{IV}_3 x_3 + a^{IV}_4 x_4).$$

4. Bestimmung der Coordinaten eines Punktes aus der Gleichung $P = 0$ desselben.

Setzt man in $P = 0$ die Coordinaten einer nicht durch P gehenden Ebene T' ein, so erhält das Polynom P einen von Null verschiedenen Werth. Transformirt man in ein anderes homogenes System, so bleibt der Werth unverändert, sobald man in die transformirte Gleichung des Punktes P die transformirten Coordinaten der Ebene T' setzt.

Wählt man nun P als Tetraedereckpunkt (A_1) im neuen System, und hat T' den Abstand ξ von P und r' von C, so ist die Gleichung von P im neuen System

$$A u_1 = 0.$$

Demnach ist

$$A \frac{\xi}{r'} = \alpha_1 u'_1 + \alpha_2 u'_2 + \alpha_3 u'_3 + \alpha_4 u'_4.$$

Wendet man diese Formel auf die vier Tetraederebenen an, so erhält man die vier Formeln

$$A \frac{x_k}{r_k} = \alpha_k \frac{h_k}{r_k} \text{ oder } A x_k = \alpha_k h_k.$$

Setzt man die hieraus resultirenden x_k in die Gleichung

$$\Sigma g_k x_k = \Delta,$$

so erhält man

$$A = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4.$$

Mithin sind die Coordinaten des Punktes P:

$$x_k = \frac{\alpha_k h_k}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}.$$

5. **Bestimmung des Abstandes eines Punktes P von einer Ebene T' aus der Gleichung $P=0$ des Punktes und den Coordinaten u'_k der Ebene.**

Die Entwickelungen in 4) liefern diese Entfernung ξ zu

$$\xi = \frac{r'}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4} (\alpha_1 u'_1 + \alpha_2 u'_2 + \alpha_3 u'_3 + \alpha_4 u'_4).$$

Um r aus den homogenen Coordinaten zu bestimmen, benutze man

$$\mathfrak{u}_k = r u_k$$

und die Gleichung zwischen den Plücker'schen Coordinaten einer Ebene 2). Man erhält:

$$r^2 = \Delta^2 : \left\{ \begin{array}{l} u_1^2 g_1^2 + u_2^2 g_2^2 + u_3^2 g_3^2 + u_4^2 g_4^2 - 2 u_1 u_2 g_1 g_2 \cos\gamma_{12} \\ - 2 u_1 u_3 g_1 g_3 \cos\gamma_{13} - 2 u_1 u_4 g_1 g_4 \cos\gamma_{14} - 2 u_2 u_3 g_2 g_3 \cos\gamma_{23} \\ - 2 u_2 u_4 g_2 g_4 \cos\gamma_{24} - 2 u_3 u_4 g_3 g_4 \cos\gamma_{34} \end{array} \right\}.$$

Man nimmt für r die positive Wurzel der rechten Seite dieser Gleichung.

Wendet man diese allgemeine Formel zur Berechnung des r' aus u'_k an, so erhält man ξ vollständig durch u'_k ausgedrückt.

6. **Normalform der Gleichung eines Punktes.** Es erscheint zweckmässig, die Gleichung eines Punktes mit

$$\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}$$

zu erweitern. Die resultirende Gleichung heisse die **Normalform** der Gleichung des Punktes.

Ist demnach

$$P \equiv \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0$$

die Gleichung von P in Normalform, so ist

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1.$$

Die Normalform einer in beliebig erweiterter Form gegebenen Gleichung eines Punktes lautet:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4} u_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4} u_2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4} u_3$$
$$+ \frac{\alpha_4}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4} u_4 = 0.$$

Ist $P=0$ die Gleichung von P in Normalform, so sind die Coordinaten von P:

$$x_k = \alpha_k h_k.$$

7. **Transformationsgleichungen zum Uebergange aus einem homogenen System in ein anderes.**

Es seien die Gleichungen der Eckpunkte des neuen Systems in Normalform gegeben, und zwar habe der neue Eckpunkt A_k die Gleichung

$$\alpha_1^{(k)} u_1 + \alpha_2^{(k)} u_2 + \alpha_3^{(k)} u_3 + \alpha_4^{(k)} u_4 = 0.$$

Sind U_k die Plancoordinaten im neuen System, so sind die Transformationsformeln die Lösungen des linearen Systems:

$$U_1 = \alpha'_1 u_1 + \alpha'_2 u_2 + \alpha'_3 u_3 + \alpha'_4 u_4,$$
$$U_2 = \alpha''_1 u_1 + \alpha''_2 u_2 + \alpha''_3 u_3 + \alpha''_4 u_4,$$
$$U_3 = \alpha'''_1 u_1 + \alpha'''_2 u_2 + \alpha'''_3 u_3 + \alpha'''_4 u_4,$$
$$U_4 = \alpha^{IV}_1 u_1 + \alpha^{IV}_2 u_2 + \alpha^{IV}_3 u_3 + \alpha^{IV}_4 u_4.$$

8. Ist

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0$$

die Gleichung einer Ebene in Normalform, und sind $\mathfrak{u}_k$ die Plücker'schen Coordinaten derselben, so ist 1)

$$\mathfrak{u}_k = \alpha_k h_k, \text{ also } \alpha_k = \frac{\mathfrak{u}_k}{h_k},$$

mithin geht die Normalform der Gleichung der Ebene über in

$$\frac{\mathfrak{u}_1}{h_1} x_1 + \frac{\mathfrak{u}_2}{h_2} x_2 + \frac{\mathfrak{u}_3}{h_3} x_3 + \frac{\mathfrak{u}_4}{h_4} u_4 = 0.$$

Ist

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0$$

die Normalform der Gleichung eines Punktes, und sind x_k dessen Coordinaten, so ist 6):

$$x_k = \alpha_k h_k, \text{ also } \alpha_k = \frac{x_k}{h_k};$$

die Gleichung des Punktes in Normalform lässt sich also auch schreiben:

$$\frac{x_1}{h_1} u_1 + \frac{x_2}{h_2} u_2 + \frac{x_3}{h_3} u_3 + \frac{x_4}{h_4} u_4 = 0.$$

9. **Berechnung des Volumen, der Flächen und der Höhen eines Tetraeders aus den Coordinaten der Eckpunkte.**

Unter der Determinante des Tetraeders $P'P''P'''P^{IV}$ werde verstanden

$$TD(P'P''P'''P^{IV}) \equiv \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 & x''_4 \\ x'''_1 & x'''_2 & x'''_3 & x'''_4 \\ x^{IV}_1 & x^{IV}_2 & x^{IV}_3 & x^{IV}_4 \end{vmatrix}.$$

Es ist $$TD(P'P''P'''P^{IV}) = \pm\, TD(P^{(i)}P^{(k)}P^{(l)}P^{(m)}),$$
je nachdem der Perimeter $P^{(k)}P^{(l)}P^{(m)}$ nach der Reihenfolge der Bezeichnung von $P^{(i)}$ aus gesehen in derselben oder der entgegengesetzten Richtung durchlaufen wird, als der Perimeter $P''P'''P^{IV}$ von P' aus gesehen.*

---

* Für den Fall $i=1$ ist die Bemerkung ohne Weiteres erwiesen. Ist i von 1 verschieden, so hat die Reihe klm mit 234 zwei Nummern gemein. Man vertausche

Lehrsatz: Die Tetraederdeterminante $TD(P'P''P'''P^{IV})$ hat dann und nur dann ein positives oder negatives Vorzeichen, wenn das Tetraeder $P'P''P'''P^{IV}$ mit dem Axentetraeder $A_1A_2A_3A_4$ gleichen oder beziehentlich entgegengesetzten Sinnes ist, d. i. wenn die Perimeter $P''P'''P^{IV}$ und $A_2A_3A_4$ von P', beziehentlich A_1 aus gesehen in derselben oder in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden.

Beweis: Setzt man an die Stelle der Coordinaten $x_k^{(\alpha)}$ des Punktes $P^{(\alpha)}$, wenn $P^{(\alpha)}$ einen beliebigen der vier Punkte $P'P''P'''P^{IV}$ bezeichnet, die Coordinaten $x_k^{(\mu)}$ eines willkürlichen andern Punktes $P^{(\mu)}$, so hat die neue Tetraederdeterminante dasselbe oder ein anderes Vorzeichen als die ursprüngliche, je nachdem $P^{(\alpha)}$ und $P^{(\mu)}$ auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten der durch die drei übrigen Punkte gelegten Ebene liegen. Dies tritt stets und nur dann ein, wenn der von den drei übrigen Punkten gebildete Perimeter von $P^{(\alpha)}$ und $P^{(\mu)}$ aus gesehen bei derselben Reihenfolge der Punkte in gleicher oder entgegengesetzter Drehrichtung durchlaufen wird.

Ersetzt man hiernach die vier Ecken $P'P''P'''P^{IV}$ durch die Punkte $A_1A_2A_3A_4$, so haben die Determinanten der beiden Tetraeder gleiches Zeichen, wenn der Sinn des Tetraeders $P'P''P'''P^{IV}$ bei den Substitutionen sich gar nicht oder zweimal oder viermal geändert hat; dann heben sich aber die Aenderungen paarweise auf; — oder die Determinanten haben verschiedene Zeichen, wenn sich der Sinn des Tetraeders bei den Substitutionen einmal oder dreimal geändert hat; dann sind $P'P''P'''P^{IV}$ und $A_1A_2A_3A_4$ entgegengesetzten Sinnes. Da nun

$$TD(A_1A_2A_3A_4) = h_1h_2h_3h_4,$$

so folgt, dass

---

klm und 234 cyklisch, so dass die gemeinsamen Nummern in die beiden ersten Stellen kommen; es gehe klm in npq, 234 in abc über. Alsdann werden die Perimeter $P^{(n)}P^{(p)}P^{(q)}$ und $P^{(a)}P^{(b)}P^{(c)}$ von $P^{(i)}$, beziehentlich P' aus gesehen in derselben Richtung durchlaufen, wie $P^{(k)}P^{(l)}P^{(m)}$, beziehentlich $P''P'''P^{IV}$, und es ist zugleich

$$TD(P^{(i)}P^{(k)}P^{(l)}P^{(m)}) = TD(P^{(i)}P^{(n)}P^{(p)}P^{(q)}),$$
$$TD(P'P''P'''P^{IV}) = TD(P'P^{(a)}P^{(b)}P^{(c)}).$$

Nun sind folgende Fälle zu unterscheiden:

a) $a = n, \quad b = p;$

b) $a = p, \quad b = n.$

In dem ersten Falle sind die Perimet r $P^{(k)}P^{(l)}P^{(m)}$ und $P''P'''P^{IV}$, von $P^{(i)}$, beziehentlich P' aus gesehen, entgegengesetzten Sinnes, in dem letzten Falle gleichen Sinnes.

Im ersten Falle geht die Reihe $inpq$ durch die Vertauschung von i gegen q in die Reihe $1abc$ über; im zweiten geht $inpq$ durch Vertauschung von n gegen p in $iabq$ und diese durch Vertauschung von i gegen q in $1abc$ übnr. Demnach ist $inpq$ und mithin auch $iklm$ im ersten Falle eine ungerade, im letzten eine gerade Permutation von 1234.

$$TD(P'P''P'''P^{IV}) \gtrless 0,$$

je nachdem $P'P''P'''P^{IV}$ und $A_1A_2A_3A_4$ gleichen oder entgegengesetzten Sinnes sind, q. e. d.

10. Die Gleichungen der Ebenen des Tetraeders $P'P''P'''P^{IV}$ mögen geschrieben werden:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 & x''_4 \\ x'''_1 & x'''_2 & x'''_3 & x'''_4 \\ x^{IV}_1 & x^{IV}_2 & x^{IV}_3 & x^{IV}_4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x'''_1 & x'''_2 & x'''_3 & x'''_4 \\ x^{IV}_1 & x^{IV}_2 & x^{IV}_3 & x^{IV}_4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 & x''_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x^{IV}_1 & x^{IV}_2 & x^{IV}_3 & x^{IV}_4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 & x''_4 \\ x'''_1 & x'''_2 & x'''_3 & x'''_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Bezeichnet man abkürzend $TD(P'P''P'''P^{IV}) \equiv D$, die Höhen des Tetraeders $P'P''P'''P^{IV}$ mit $H_1H_2H_3H_4$, die Seitenflächen mit $G_1G_2G_3G_4$, und bezeichnet man ferner die Coefficienten, mit denen die vier Gleichungen der Ebene erweitert werden müssen, um die Gleichungen auf die Normalform zu bringen (wobei man sich den Fixpunkt im Innern des Tetraeders denken mag), mit $a_1a_2a_3a_4$, so ist

$$H_1a_1 = H_2a_2 = H_3a_3 = H_4a_4 = D.$$

Ist λ ein noch unbestimmter Coefficient, so ist demnach

$$a_k = \lambda G_k, \quad D = \lambda V,$$

wenn V das dreifache Volumen des Tetraeders bedeutet.

Setzt man an die Stelle irgend eines der vier Tetraederpunkte, z. B. $P^{(\alpha)}$, einen sonst willkürlichen Punkt $P^{(\mu)}$, so dass das neue Tetraeder mit dem ursprünglichen gleichen Sinnes ist, so ist die neue Determinante ebenfalls positiv. Der Coefficient a_α ist von den Coordinaten des Punktes $P^{(\alpha)}$ unabhängig und die $P^{(\alpha)}$ gegenüberliegende Tetraederfläche G_α hat sich durch die Substitution von $P^{(\mu)}$ für $P^{(\alpha)}$ nicht verändert. Die Höhen des neuen Tetraeders seien H'_k, die Flächen G'_k, die den a_k entsprechenden Erweiterungscoefficienten a'_k, die neue Determinante D', das dreifache Volumen des neuen Tetraeders V', so ist auch hier, wenn λ' einen noch unbestimmten Factor bezeichnet:

$$a'_k = \lambda' G'_k, \quad D' = \lambda' V'.$$

Insbesondere gilt für a'_μ, da $G'_\mu = G_\alpha$:

$$a'_\mu = \lambda' G_\alpha.$$

Da nun auch incl. Vorzeichen, wenn man den Fixpunkt im Innern beider Tetraeder denkt,

$$a_\alpha = a'_\alpha,$$

so folgt

$$\lambda' = \lambda.$$

Setzt man dagegen an die Stelle von $P^{(\alpha)}$ einen solchen Punkt $P^{(\nu)}$, dass das neue Tetraeder mit dem ursprünglichen entgegengesetzten Sinnes

ist, so hat die neue Determinante D'' ein anderes Vorzeichen als D. Tritt jetzt λ'' an die Stelle von λ, a''_k an die von a_k, so ist (wenn man für jedes Tetraeder einen besondern Fixpunkt ins Innere des Tetraeders legt):

$$a_\alpha = -a''_\nu,$$

also

$$\lambda'' = -\lambda.$$

Hiernach verhalten sich die Tetraederdeterminanten zu einander wie die Volumina ihrer Tetraeder, wenn man die Volumina positiv oder negativ rechnet, je nachdem die Tetraeder mit dem Axentetraeder $A_1 A_2 A_3 A_4$ gleichen Sinnes sind oder nicht.

Insbesondere ist also

$$TD(P' P'' P''' P^{IV}) : h_1 h_2 h_3 h_4 \mp V : \Delta;$$

also folgt das dreifache Volumen V des Tetraeders $P' P'' P''' P^{IV}$ zu

$$V = \frac{\Delta}{h_1 h_2 h_3 h_4} \cdot \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 & x''_4 \\ x'''_1 & x'''_2 & x'''_3 & x'''_4 \\ x^{IV}_1 & x^{IV}_2 & x^{IV}_3 & x^{IV}_4 \end{vmatrix}.$$

Ferner folgt

$$\lambda = \frac{h_1 h_2 h_3 h_4}{\Delta}.$$

Die zweite Potenz des Erweiterungscoefficienten der Ebenengleichung

$$T = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \\ x''_1 & x''_2 & x''_3 & x''_4 \\ x'''_1 & x'''_2 & x'''_3 & x'''_4 \end{vmatrix} = 0$$

folgt, wenn man die Coefficienten der Glieder der ersten Zeile mit $\delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4$ bezeichnet, zu

$$a^2 = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2 - 2\,\delta_1 \delta_2 \cos\gamma_{12} - 2\,\delta_1 \delta_3 \cos\gamma_{13} - \delta_1 \delta_4 \cos\gamma_{14}$$
$$- 2\,\delta_2 \delta_3 \cos\gamma_{23} - 2\,\delta_2 \delta_4 \cos\gamma_{24} - \delta_3 \delta_4 \cos\gamma_{34}.$$

Nimmt man für a stets die positive Wurzel und rechnet man alle Flächen positiv, so folgt:

$$P' P'' P''' = \frac{\Delta}{h_1 h_2 h_3 h_4} \cdot a.$$

Aus den Seitenflächen und dem Volumen folgen die Höhen des Tetraeders.

§ 4. Sätze über Flächen zweiter Ordnung.

1. Die Gleichung jeder Curve n^{ter} Ordnung kann als homogene Gleichung n^{ten} Grades zwischen den homogenen Coordinaten des variabeln Punktes, beziehentlich der variabeln Ebene dargestellt werden.

Denn man transformire durch die § 1 aufgestellten Gleichungen, so gehen die nichthomogenen Gleichungen in orthogonalen Coordinaten zu-

nächst in nichthomogene Gleichungen in homogenen Punkt-, beziehentlich Plancoordinaten über. Jedes Glied der Gleichung, dessen Grad um δ Einheiten niedriger ist, als der Grad der Gleichung, multiplicire man mit

$$\left(\frac{g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 + g_4 x_4}{\Delta}\right)^\delta$$

in Gleichungen für Punktcoordinaten, oder beziehentlich

$$\left(\frac{g_1 r_1 u_1 + g_2 r_2 u_2 + g_3 r_3 u_3 + g_4 r_4 u_4}{\Delta}\right)^\delta$$

in Gleichungen für Plancoordinaten.

Die reciproke Transformation lehrt, dass jeder Gleichung n^{ten} Grades zwischen den homogenen Coordinaten auf eine Gleichung desselben Grades zwischen Descartes'schen Coordinaten reducirt werden kann. Es werden also alle Gebilde n^{ter} Ordnung und nur diese umfasst, wenn die geometrischen Repräsentanten der homogenen Gleichungen n^{ten} Grades zwischen homogenen Punkt- und Plancoordinaten untersucht werden.

2. Bezieht man eine Fläche auf ein Coordinatentetraeder mit einer unendlich fernen Fläche (g_4), so wird für im Endlichen liegende Gebilde die Coordinate x_4 eine unendliche Constante. Untersucht man solche Gebilde, deren Gleichungen in Punktcoordinaten unendlich grosse Coefficienten enthalten, nicht nach ihren Punktgleichungen, so werden im allgemeinsten Falle die Potenzen von x_4 mit den Coefficienten der betreffenden Glieder zu endlichen Constanten verschmelzen. Die Gleichung geht alsdann in eine Gleichung zwischen den unter sich unabhängigen Abständen des variabeln Punktes von den drei Seiten einer Ecke, d. i. zwischen den Descartes'schen Punktcoordinaten, über.

Die Gleichungen in Plancoordinaten erleiden, wenn drei Ecken des Tetraeders unendlich fern sind, folgende Veränderung:

Seien $l_1\, l_2\, l_3$ die Längen der (unendlich grossen) Kanten $A_4 A_1$, $A_4 A_2$, $A_4 A_3$. Man lege zur variabeln Ebene T eine Parellelebene T' durch A_4. Dieselbe hat von T den Abstand $r u_4$, von $A_1 A_2 A_3$ beziehentlich $r u_1$, $r u_2$, $r u_3$. T schneide auf den Kanten $A_4 A_1$, $A_4 A_2$, $A_4 A_3$, von A_4 aus gerechnet, die Strecken $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{v}$, $\frac{1}{w}$ ab, und zwar werden dieselben positiv nach g_4 zu gerechnet. Alsdann ist

$$u_4 l_1 u = u_1, \quad u_4 l_2 v = u_2, \quad u_4 l_3 w = u_3.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung einer Fläche, und beschränkt man sich darauf, solche Flächengleichungen in Plancoordinaten zu untersuchen, die keine unendlich grossen Coefficienten enthalten, so verschmelzen im allgemeinen Falle die $l_1\, l_2\, l_3$ mit den betreffenden Coefficienten zu endlichen Constanten; die allen Gliedern gemeinsame Potenz von u_4 werde beseitigt. Alsdann verbleibt als Gleichung der Fläche eine nichthomogene

Gleichung zwischen den Reciproken der Axenabschnitte der veränderlichen Ebene, d. h. zwischen den gewöhnlichen Plancoordinaten.

3. Flächengleichung in Plancoordinaten in Bezug auf ein Tetraeder mit einer unendlich fernen Ecke A_4.

Die variable Ebene schneide von den Kanten $A_1 A_4$, $A_2 A_4$, $A_3 A_4$ von $A_1 A_2 A_3$ an gerechnet die Strecken $v_1 v_2 v_3$ ab; von A_4 aus gerechnet schneiden alle variablen Ebenen auf allen drei Kanten ein und dieselbe unendlich grosse Strecke v_4 ab. Da nun

$$u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = v_1 : v_2 : v_3 : v_4,$$

wenn die v_k mit gleichen Zeichen gerechnet werden, welche auf derselben Seite der variabeln Ebene liegen, so kann man in der homogenen Gleichung der Ebene die u_k durch die v_k ersetzen. Beschränkt man sich auf die Untersuchung solcher Gleichungen in Plancoordinaten, die keine unendlich grossen Coefficienten enthalten, so verschmelzen im Allgemeinen in den Gliedern, welche v_4 enthalten, die Potenzen dieser Coordinate mit den Coefficienten zu endlichen Constanten. Die Gleichung der Fläche geht demnach in eine nicht homogene Gleichung zwischen den von drei willkürlichen Nullpunkten an gerechneten Abschnitten der variabeln Ebene auf drei parallelen gleichgerichteten Geraden über.

Für Flächengleichungen in Punktcoordinaten verändert sich für den Fall einer unendlich fernen Ecke des Coordinatentetraeders nur die Bedingungsgleichung zwischen den Coordinaten. In dieselbe gehen nur die Coordinaten $x_1 x_2 x_3$ ein. Seien Δ die doppelte Fläche, $g'_1 g'_2 g'_3$ die auf den gleichbezeichneten Tetraederflächen gelegenen Seiten des Normalschnitts durch die nach A_4 gehenden drei Ebenen, so ist

$$g'_1 x_1 + g'_2 x_2 + g'_3 x_3 = \Delta.$$

4. Gleichung der Tangentialebene an einen Punkt P' einer Fläche $f(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0$.

Bezeichnen d_k und δ_k zwei solche Variationen der Coordinaten von P', dass die Punkte $x_k + d_k$ und $x_k + \delta_k$ auf $f = 0$ gelegen sind, so ist die Gleichung der Tangentialebene die Grenze, welcher sich die Gleichung der durch x'_k, $x'_k + d_k$, $x'_k + \delta_k$ gelegten Ebene für verschwindende d_k und δ_k nähert; d. i. die Grenze für

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \\ x'_1 + d_1 & x'_2 + d_2 & x'_3 + d_3 & x'_4 + d_4 \\ x'_1 + \delta_1 & x'_2 + \delta_2 & x'_3 + \delta_3 & x'_4 + \delta_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Glieder der Zeilen der letzteren Determinante erfüllen beim Uebergang zur Grenze die Gleichungen:

$$g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 + g_4 x_4 = \Delta,$$
$$g_1 x'_1 + g_1 x'_2 + g_3 x'_3 + g_4 x'_4 = \Delta,$$
$$g_1 d_1 + g_2 d_2 + g_3 d_3 + g_4 d_4 = 0,$$
$$g_1 \delta_1 + g_2 \delta_2 + g_3 \delta_3 + g_4 \delta_4 = 0;$$

ferner, wenn f'_k den Werth von $\frac{\partial f}{d x_k}$ für den Punkt P' bedeutet:

$$f'_1 x'_1 + f'_2 x'_2 + f'_3 x_3 + f'_4 x_4 = 0,$$
$$f'_1 d_1 + f'_2 d_2 + f'_3 d_3 + f'_4 d_4 = 0,$$
$$f'_1 \delta_1 + f'_2 \delta_2 + f'_3 \delta_3 + f'_4 \delta_4 = 0.$$

Bildet man nun unter Benutzung von acht willkürlichen Hilfsgrössen $l\, m\, n\, p\, l'\, m'\, n'\, p'$ die Determinante

$$\begin{vmatrix} f'_1 & f'_2 & f'_3 & f'_4 \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ l & m & n & p \\ l' & m' & n' & p' \end{vmatrix}$$

und erweitert damit die obige Gleichung der Tangentialebene, so wird dieselbe zu

$$0 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f'_1 & f'_2 & f'_3 & f'_4 \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ l & m & n & p \\ l' & m' & n' & p' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (f'_1 x_1 + f'_2 x_2 + f'_3 x_3 + f'_4 x_4), & \Delta, & (l x_1 + \ldots + p x_4), & (l' x_1 + \ldots + p' x_4) \\ 0 & , \Delta, & (l x'_1 + \ldots) & , (l' x'_1 + \ldots) \\ 0 & , 0, & (l d_1 + \ldots) & , (l' d_1 + \ldots) \\ 0 & , 0, & (l \delta_1 + \ldots) & , (l' \delta_1 + \ldots) \end{vmatrix}$$

$$= (f'_1 x_1 + f'_2 x_2 + f'_3 x_3 + f'_4 x_4) \cdot \Delta \cdot \begin{vmatrix} (l d_1 + \ldots), & (l' d_1 + \ldots) \\ (l \delta_1 + \ldots), & (l' \delta_1 + \ldots) \end{vmatrix}.$$

Die acht Hilfsgrössen können immer so gewählt werden, dass der letzte Factor von Null verschieden ist. Demnach ist die gesuchte Gleichung der Tangentialebene an $f = 0$ in P':

$$f'_1 x_1 + f'_2 x_2 + f'_3 x_3 + f'_4 x_4 = 0.$$

Die Coordinaten der Tangentialebene sind demnach

$$u'_k = \frac{f'_k h_k}{f'_1 r_1 + f'_2 r_2 + f'_3 r_3 + f'_4 r_4}.$$

5. Bestimmung der Gleichung des Tangentialpunktes einer Tangentialebene u'_k an die Fläche $\varphi(u_1 u_2 u_3 u_4) = 0$.

Die Gleichung des Tangentialpunktes ist die Grenze, in welche die Gleichung des Schnittpunktes dreier Tangentialebenen der Fläche übergeht, wenn die drei Ebenen unendlich nahe benachbart werden.

Sind $u'_k + d_k$, $u'_k + \delta_k$ die Coordinaten zweier Ebenen, welche $\varphi = 0$ befriedigen, so ist demnach die gesuchte Gleichung der für verschwindende d_k und δ_k entstehende Grenzwerth von

$$0 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u'_1 & u'_2 & u'_3 & u'_4 \\ u'_1+d_1 & u'_2+d_2 & u'_3+d_3 & u'_4+d_4 \\ u'_1+\delta_1 & u'_2+\delta_2 & u'_3+\delta_3 & u'_4+\delta_4 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u'_1 & u'_2 & u'_3 & u'_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{vmatrix}.$$

Bezeichnet φ'_k den Werth von $\frac{\partial \varphi}{\partial u_k}$ für die Ebene u'_k, so erfüllen die verschwindenden Variationen der Coordinaten und die übrigen Zeilen dieser Determinante die Gleichungen

$$\begin{aligned} g_1 r_1 u_1 + g_2 r_2 u_1 + g_3 r_3 u_3 + g_4 r_4 u_4 &= \Delta, \\ g_1 r_1 u'_1 + g_2 r_2 u'_2 + g_3 r_3 u'_3 + g_4 r_4 u'_4 &= \Delta, \\ g_1 r_1 d_1 + g_2 r_2 d_2 + g_3 r_3 d_3 + g_4 r_4 d_4 &= 0, \\ g_1 r_1 \delta_1 + g_2 r_2 \delta_2 + g_3 r_3 \delta_3 + g_4 r_4 \delta_4 &= 0, \\ \varphi'_1 u'_1 + \varphi'_2 u'_2 + \varphi'_3 u'_3 + \varphi'_4 u'_4 &= 0, \\ \varphi'_1 d_1 + \varphi'_2 d_2 + \varphi'_3 d_3 + \varphi'_4 d_4 &= 0, \\ \varphi'_1 \delta_1 + \varphi'_2 \delta_2 + \varphi'_3 \delta_3 + \varphi'_4 \delta_4 &= 0. \end{aligned}$$

Man bilde nun mit acht willkürlichen Hilfsgrössen die Determinante

$$\begin{vmatrix} \varphi'_1 & \varphi'_2 & \varphi'_3 & \varphi'_4 \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\ l & m & n & p \\ l' & m' & n' & p' \end{vmatrix}$$

und erweitere mit derselben die obige Gleichung des Tangentialpunktes. Dann erhält man links das Product zweier Determinanten; dasselbe ist unter Rücksicht auf obige sieben Gleichungen gleich der Determinante

$$\begin{vmatrix} (\varphi'_1 u_1 + \varphi'_2 u_2 + \varphi'_3 u_3 + \varphi'_4 u_4), & \Delta, & (l u_1 + \ldots), & (l' u_1 + \ldots) \\ 0 & \Delta, & (l u'_1 + \ldots), & (l' u'_1 + \ldots) \\ 0 & 0, & (l d_1 + \ldots), & (l' d'_1 + \ldots) \\ 0 & 0, & (l \delta_1 + \ldots), & (l' \delta'_1 + \ldots) \end{vmatrix}.$$

Diese reducirt sich auf das Product

$$(\varphi'_1 u_1 + \varphi'_2 u_2 + \varphi'_3 u_3 + \varphi'_4 u_4) \cdot \Delta \cdot \begin{vmatrix} (l d_1 + \ldots), & (l' d'_1 + \ldots) \\ (l \delta_1 + \ldots), & (l' \delta'_1 + \ldots) \end{vmatrix}.$$

Die Hilfsgrössen können immer so gewählt werden, dass der letzte Factor von Null verschieden ist. Demnach ist die Gleichung des Tangentialpunktes in $T' = 0$ an $\varphi = 0$:

$$\varphi'_1 u_1 + \varphi'_2 u_2 + \varphi'_3 u_3 + \varphi'_4 u_4 = 0.$$

Die Coordinaten des Tangentialpunktes sind demnach

$$x_k = \varepsilon_k \cdot \frac{\varphi'_k h_k}{\varphi'_1 + \varphi'_2 + \varphi'_3 + \varphi'_4}.$$

6. Die Flächen zweiten Grades sind zugleich Flächen zweiter Classe und umgekehrt. Bestimmung der Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung für Plancoordinaten aus der Gleichung in Punktcoordinaten. Bestimmung der Gleichung einer Fläche in Punktcoordinaten aus der Gleichung derselben in Plancordinaten.

Die allgemeine Form für die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung in Punktcoordinaten ist:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 &+ 2 a_{13} x_1 x_3 + 2 a_{14} x_1 x_4 \\ + \; a_{22} x_2^2 &+ 2 a_{23} x_2 x_3 + 2 a_{24} x_2 x_4 \\ &+ \; a_{33} x_3^2 + 2 a_{34} x_3 x_4 \\ &\qquad + \; a_{44} x_4^2 = 0. \end{aligned}$$

Die vier partiellen Differentialquotienten nach den Coordinaten sind:

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv 2 (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4), \\ f_2 &\equiv 2 (a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4), \\ f_3 &\equiv 2 (a_{13} x_1 + a_{23} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4), \\ f_4 &\equiv 2 (a_{14} x_1 + a_{24} x_2 + a_{34} x_3 + a_{44} x_4). \end{aligned}$$

Bildet man diese Functionen für P' und bezeichnet den Werth

$$f'_1 r_1 + f'_2 r_2 + f'_3 r_3 + f'_4 r_4 \text{ mit } \varDelta,$$

so gelten für die Coordinaten der Tangentialebene im Punkte P' nach 4) die vier Gleichungen

$$f'_k - \frac{\varDelta}{h_k} . u_k = 0.$$

Aus der Gleichung des Tangentialpunktes in Normalform nach § 2, 8 folgt:

$$\frac{x'_1}{h_1} u_1 + \frac{x'_2}{h_2} u_2 + \frac{x'_3}{h_3} u_3 + \frac{x'_4}{h_4} u_4 = 0;$$

so erfordert der Verein dieser fünf für x'_k linearen Gleichungen das Verschwinden der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \frac{u_1}{h_1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \frac{u_2}{h_2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & \frac{u_3}{h_3} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & \frac{u_4}{h_4} \\ \frac{u_1}{h_1} & \frac{u_2}{h_2} & \frac{u_3}{h_3} & \frac{u_4}{h_4} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die gesuchte homogene quadratische Gleichung zwischen den Coordinaten der variabeln Tangentialebenen an $f = 0$.

Die allgemeine Form für die Gleichung einer Fläche zweiter Classe ist

$$\begin{aligned} \varphi (u_1 u_2 u_3 u_4) \equiv \alpha_{11} u_1^2 + 2 \alpha_{12} u_1 u_2 &+ 2 \alpha_{13} u_1 u_3 + 2 \alpha_{14} u_1 u_4 \\ + \; \alpha_{22} u_2^2 &+ 2 \alpha_{23} u_2 u_3 + 2 \alpha_{24} u_2 u_4 \\ &+ \; \alpha_{33} u_3^2 + 2 \alpha_{34} u_3 u_4 \\ &\qquad + \; \alpha_{44} u_4^2 = 0. \end{aligned}$$

Die vier partiellen Differentialquotienten der Function φ nach den Ebenencoordinaten sind

$$\varphi_1 \equiv 2(\alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \alpha_{13}u_3 + \alpha_{14}u_4),$$
$$\varphi_2 \equiv 2(\alpha_{12}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \alpha_{23}u_3 + \alpha_{24}u_4),$$
$$\varphi_3 \equiv 2(\alpha_{13}u_1 + \alpha_{23}u_2 + \alpha_{33}u_3 + \alpha_{34}u_4),$$
$$\varphi_4 \equiv 2(\alpha_{14}u_1 + \alpha_{24}u_2 + \alpha_{34}u_3 + \alpha_{44}u_4).$$

Bildet man diese Werthe für die Tangentialebene T' und bezeichnet

$$\varphi'_1 + \varphi'_2 + \varphi'_3 + \varphi'_4 = A,$$

so hat man für die Coordinaten des Tangentialpunktes von T' die vier Gleichungen 5):

$$\varphi'_1 - A \cdot \frac{x_k}{h_k} = 0.$$

Aus der mit $\frac{1}{r}$ erweiterten Normalform der Gleichung der Tangentialebene nach § 2, 8 folgt:

$$\frac{x_1}{h_1}u'_1 + \frac{x_2}{h_2}u'_2 + \frac{x_3}{h_3}u'_3 + \frac{x_4}{h_4}u'_4 = 0.$$

Der Verein dieser fünf für u'_k linearen Gleichungen erfordert:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \frac{x_1}{h_1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \frac{x_2}{h_2} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \frac{x_3}{h_3} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} & \frac{x_4}{h_4} \\ \frac{x_1}{h_1} & \frac{x_2}{h_2} & \frac{x_3}{h_3} & \frac{x_4}{h_4} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die Gleichung der Fläche $\varphi = 0$ in Punktcoordinaten.

7. Polarebene eines Punktes. Lehrsatz: Ist $f=0$ die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung in Punktcoordinaten, so ist

$$T \equiv f'_1 x_1 + f'_2 x_2 + f'_3 x_3 + f'_4 x_4 = 0$$

die Gleichung der Polarebene des Punktes P' mit den Coordinaten x_k; d. h. jede durch P' gelegte Gerade G schneidet die Fläche $F=0$ in zwei Punkten, welche P' und dem Schnittpunkte (GT) harmonisch conjugirt sind.

Beweis: Seien x''_k die Coordinaten vom Schnittpunkte GT, ξ_k die Coordinaten eines Schnittpunktes von G mit $f=0$, so können die ξ_k aus den x'_k und x''_k abgeleitet werden nach den Formeln:

$$\xi_k = \lambda' x'_k + \lambda'' x''_k, \quad \lambda' + \lambda'' = 1.$$

Die ξ_k befriedigen $f=0$; substituirt man, so entsteht

$$\lambda'^2 f + \lambda'\lambda''(f'_1 x''_1 + f'_2 x''_2 + f'_3 x''_3 + f'_4 x''_4) + \lambda''^2 f'' = 0.$$

Da x''_k auf T gelegen ist, so ist der Coefficient von $\lambda'\lambda''$ gleich Null; aus der übrig bleibenden Gleichung ergiebt sich:

$$\lambda' : \lambda'' = \sqrt{-(f'' : f')},$$

also für die Schnittpunkte GT zwei entgegengesetzt gleiche Verhältnisse der Ableitungscoefficienten, q. e. d. (§ 2, 3.)

8. Die Formeln

$$f'_1 x''_1 + f'_2 x''_2 + f'_3 x''_3 + f'_4 x''_4 \text{ und } f''_1 x'_1 + f''_2 x'_2 + f''_3 x'_3 + f''_4 x'_4$$

sind identisch. Liegt demnach ein Punkt x''_k auf der Polarebene eines Punktes x'_k, so liegt auch der Punkt x'_k auf der Polarebene des Punktes x''_k.

Die Polarebenen aller in einer Ebene T gelegenen Punkte umhüllen demnach den Pol dieser Ebene, d. h. den Punkt, dessen Polarebene die Ebene T ist.

Die Polarebenen aller in einer Geraden gelegenen Punkte umhüllen eine Gerade, deren Punkte wiederum die Pole für die durch die erste Gerade gelegten Ebenen enthält. Zwei so beschaffene Gerade heissen zwei conjugirte Polargerade.

9. Die Polarebene jedes Punktes ist eindeutig bestimmt, sobald die Discriminante von f nicht verschwindet.

Denn dann haben stets einige oder einer der vier partiellen Differentialquotienten f'_k von Null verschiedene Werthe.

Verschwindet die Discriminante, so giebt es mindestens einen Punkt, für welchen sämmtlich vier partielle Differentialquotienten verschwinden. Dieser Punkt liegt auf der Fläche; er hat jede beliebige Ebene zur Polarebene.

Sei $f = 0$ eine solche Fläche, x'_k der Punkt, für welchen zugleich

$$f'_1 = f'_2 = f'_3 = f'_4 = 0,$$

x''_k ein beliebiger anderer Punkt der Fläche, so liegt jeder Punkt der Geraden $P'P''$ in $f = 0$; denn substituirt man

$$x_k = \lambda' x'_k + \lambda'' x''_k, \quad \lambda' + \lambda'' = 1$$

in $f = 0$, so entsteht

$$\lambda'^2 f' + \lambda'\lambda'' (f'_1 x''_1 + f'_2 x''_2 + f'_3 x''_3 + f'_4 x''_4) + \lambda''^2 f'' = 0.$$

Da nun $f' = f'_k = f'' = 0$, so wird der Gleichung durch beliebige Werthe von $\lambda'\lambda''$ genügt, q. e. d. Die Fläche zweiter Ordnung, deren Discriminante verschwindet, ist demnach eine Kegelfläche; Mittelpunkt derselben ist der Punkt, für welchen die partiellen ersten Differentialquotienten der Coordinatenfunction verschwinden.

10. Im Allgemeinen giebt es nur einen Punkt, welcher eine gegebene Ebene $T \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$ zur Polarebene hat.

Bedeutet k einen noch unbestimmten Factor, so sind die Coordinaten des Poles von T die Lösungen des Systems

$$f'_1 - ka_1 = 0,$$
$$f'_2 - ka_2 = 0,$$
$$f'_3 - ka_3 = 0,$$
$$f'_4 - ka_4 = 0,$$
$$g_1 x'_1 + g_2 x'_2 + g_3 x'_3 + g_4 x'_4 = \Delta.$$

Sollen die Pole sämmtlicher Ebenen unendlich fern werden, so muss die Determinante dieses Systems unabhängig von den Coefficienten a_k verschwinden; es müssen also die Coefficienten der Glieder der letzten Colonne einzeln verschwinden. Bezeichnet δ_{ik} den Coefficienten des k^{ten} Gliedes der i^{ten} Zeile in der Discriminante der Function f, so liefert dies für die in $f = 0$ auftretenden Coefficienten die vier Gleichungen

$$\delta_{i1} g_1 + \delta_{i2} g_2 + \delta_{i3} g_3 + \delta_{i4} g_4 = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Nach bekannten Determinantensätzen* folgen hieraus die Proportionen:

$$\begin{aligned} g_1 : g_2 : g_3 : g_4 &= a_{11} : a_{12} : a_{13} : a_{14} \\ &= a_{12} : a_{22} : a_{23} : a_{24} \\ &= a_{13} : a_{23} : a_{33} : a_{34} \\ &= a_{14} : a_{24} : a_{34} : a_{44}. \end{aligned}$$

Diese Proportionen liefern vereint:

$$\begin{aligned} &a_{11} : a_{12} : a_{13} : a_{14} : a_{22} : a_{23} : a_{24} : a_{33} : a_{34} : a_{44} \\ &= g_1^2 : g_1 g_2 : g_1 g_3 : g_1 g_4 : g_2^2 : g_2 g_3 : g_2 g_4 : g_3^2 : g_3 g_4 : g_4^2. \end{aligned}$$

Demnach ist die gesuchte Gleichung der Fläche:

$$(g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 + g_4 x_4)^2 = 0;$$

d. h. die Fläche zweiten Grades, für welche die Pole aller Ebenen unendlich fern sind, ist die unendlich ferne Ebene, doppelt gedacht.

11. Die Polarebene aller Punkte ist unendlich fern, sobald für alle Werthe von x'_k die Gleichungen gelten:

$$f'_1 = k g_1, \quad f'_2 = k g_2, \quad f'_3 = k g_3, \quad f'_4 = k g_4.$$

Multiplicirt man der Reihe nach mit $x'_1 x'_2 x'_3 x'_4$ und addirt, so erhält man:

$$2f \equiv x'_1 f'_1 + x'_2 f'_2 + x'_3 f'_3 + x'_4 f'_4 = k(g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 + g_4 x_4);$$

k muss demnach ein linearer Factor von der Form

$$k \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4$$

sein. Bezeichnet man abkürzend

$$T_\infty \equiv (g_1 x_1 + \ldots + g_4 x_4),$$

so liefert die Differentiation und die obigen Gleichungen das System

$$\tfrac{1}{2}(g_k . k + a_k T_\infty) = g_k . k.$$

Hieraus folgt das System

$$a_k T_\infty = k . g_k .$$

Vergleicht man in diesen vier Gleichungen die Coefficienten derselben Coordinaten mit einander, so erhält man:

---

* Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, 2. Auflage, § 6, 2. Leipzig, 1864.

$$a_1 g_2 = a_2 g_1, \quad a_2 g_3 = a_3 g_2,$$
$$a_1 g_3 = a_3 g_1, \quad a_2 g_4 = a_4 g_2,$$
$$a_1 g_4 = a_4 g_1, \quad a_3 g_4 = a_4 g_3.$$

Diese Gleichungen liefern

$$a_1 : a_2 : a_3 : a_4 = g_1 : g_2 : g_3 : g_4$$

Die Fläche zweiter Ordnung, für welche sämmtliche Punkte eine unendlich ferne Polarebene besitzen, ist die unendlich ferne Ebene, doppelt gedacht; ihre Gleichung also ist

$$f \equiv (g_1 x_1 + g_2 x_2 + g_3 x_3 + g_4 x_4)^2 = 0.$$

Dieser Fall bleibe bei den folgenden Betrachtungen ausgeschlossen.

12. Sich selbst conjugirte Tetraeder. Man wähle einen Punkt P', dessen Polarebene T' im Endlichen liegt, wähle auf T' einen Punkt P'' und bestimme dessen Polarebene T''. Auf der Kante $T' T''$ wähle man einen Punkt P''', dessen Polarebene T''' mit $T' T''$ nicht parallel ist; dann ist $P' P'' P''' (\equiv P^{IV})$ die Polarebene von $T' T'' T''' (\equiv T^{IV})$ und das Tetraeder $P' P'' P''' P^{IV}$ ist sich selbst conjugirt, d. h. seine Flächen sind die Polarebenen der gegenüberliegenden Ecken.

Wird die Gleichung der Fläche auf ein sich selbst conjugirtes Tetraeder bezogen, so muss

$$x_k = 0 \text{ Polarebene des Punktes } x_k = 0, \quad x_l = 0, \quad x_m = 0$$

sein, wenn $iklm$ irgend eine Permutation der Zahlen 1234 angiebt. Es gelten also für die Coefficienten von f folgende Gleichungen:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 \equiv A_1 x_1,$$
$$a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 \equiv A_2 x_2,$$
$$a_{13} x_1 + a_{23} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4 \equiv A_3 x_3,$$
$$a_{14} x_1 + a_{24} x_2 + a_{34} x_3 + a_{41} x_4 \equiv A_4 x_4.$$

Hieraus folgt

$$a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24} = a_{34} = 0,$$

und die Gleichung der Fläche zweiten Grades auf ein sich selbst conjugirtes Tetraeder der Fläche bezogen lautet demnach:

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0.$$

23. Pol einer Ebene. Lehrsatz: Ist $\varphi = 0$ die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung in Plancoordinaten, so ist

$$P \equiv \varphi'_1 u_1 + \varphi'_2 u_2 + \varphi'_3 u_3 + \varphi'_4 u_4 = 0$$

die Gleichung des Poles der Ebene u'_k; d. h. die je zwei durch eine willkürliche Gerade G der Ebene u'_k an φ gelegten Tangentialebenen sind der Ebene u'_k und der durch G und P' bestimmten Ebene harmonisch conjugirt.

Beweis: Sei T'' mit den Coordinaten u''_k eine beliebige, durch P gelegte Ebene, so werden die Coordinaten jeder durch die Gerade $T'' T'$ gelegten Ebene T durch die Formeln dargestellt:

$$u_k = \lambda' u'_k + \lambda'' u''_k, \quad \lambda' + \lambda'' = 1.$$

Soll T die Fläche $\varphi = 0$ berühren, so ergiebt dies für $\lambda'\lambda''$, wenn $\varphi_k^{(i)}$ den Werth von φ für $u_k^{(i)}$ bezeichnet, die Gleichung

$$\lambda'^2\varphi' + \lambda'\lambda''(\varphi'_1 u''_1 + \varphi'_2 u''_2 + \varphi'_3 u''_3 + \varphi'_4 u''_4) + \lambda''^2\varphi'' = 0.$$

Der Coefficient von $\lambda'\lambda''$ ist Null, da ja P in T'' enthalten ist; also erhält man für das Verhältniss der λ:

$$\lambda' : \lambda'' = \sqrt{-\varphi'' : \varphi'},$$

d. i. zwei entgegengesetzt gleiche Werthe, q. e. d.

14. Die Formeln

$$\varphi'_1 u''_1 + \varphi'_2 u''_2 + \varphi'_3 u''_3 + \varphi'_4 u''_4 \text{ und } \varphi''_1 u'_1 + \varphi''_2 u'_2 + \varphi''_3 u'_3 + \varphi''_4 u'_4$$

sind identisch. Jede Ebene u''_k also, welche durch den Pol der Ebene u'_k geht, hat ihren Pol auf der Ebene u'_k.

Dreht sich also eine Ebene um einen Punkt, so bewegt sich ihr Pol auf einer Ebene, welche jenen Punkt zum Pole hat.

Dreht sich eine Ebene um eine Gerade, so bewegt sich ihr Pol auf einer Geraden, deren einhüllende Ebenen die Punkte der ersten Geraden zu Polen haben.

15. Der Pol einer Ebene wird nur dann unbestimmt, wenn zugleich sämmtliche partielle erste Differentialquotienten von φ verschwinden. Dies tritt — und zwar im Allgemeinen für nur eine Ebene — ein, sobald die Discriminante verschwindet:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Seien u'_k die Coordinaten dieser Ebene, für welche zugleich

$$\varphi'_1 = 0, \quad \varphi'_2 = 0, \quad \varphi'_3 = 0, \quad \varphi'_4 = 0,$$

ferner u''_k die Coordinaten irgend einer andern Tangentialebene an $\varphi = 0$, so genügt jede durch die Gerade $T''T'$ gelegte Ebene T der Gleichung $\varphi = 0$.

Denn stellt man die Coordinaten von T nach den Formeln dar:

$$u_k = \lambda' u'_k + \lambda'' u''_k, \quad \lambda' + \lambda'' = 1,$$

so liefert die Substitution in φ:

$$\lambda'^2\varphi' + \lambda'\lambda''(\varphi'_1 u''_1 + \varphi'_2 u''_2 + \varphi'_3 u''_3 + \varphi'_4 u''_4) + \lambda''^2\varphi''.$$

Nach den Voraussetzungen ist

$$\varphi' = \varphi'' = \varphi'_1 = \varphi'_2 = \varphi'_3 = \varphi'_4 = 0,$$

also in der That φ durch die Coordinaten von T unabhängig von λ' und λ'' annullirt.

Die Fläche φ, deren Discriminante verschwindet, ist demnach im Allgemeinen als eine Grenzfläche charakterisirt. Die Hauptebene derselben hat keinen bestimmten Punkt zum Pole.

16. Der Pol jeder Ebene wird unendlich fern, wenn unabhängig von den Werthen u'_k die Gleichung besteht:

$$\varphi'_1 + \varphi'_2 + \varphi'_3 + \varphi'_4 = 0.$$

Hierzu ist der Verein folgender vier Gleichungen ausreichend und nothwendig:

$$\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{14} = 0,$$
$$\alpha_{12} + \alpha_{22} + \alpha_{23} + \alpha_{24} = 0,$$
$$\alpha_{13} + \alpha_{23} + \alpha_{33} + \alpha_{34} = 0,$$
$$\alpha_{14} + \alpha_{24} + \alpha_{34} + \alpha_{44} = 0.$$

17. Die Coordinaten der Ebene, welche einen gegebenen Punkt

$$P \equiv \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0$$

zum Pole haben, bestimmen sich aus den fünf Gleichungen

$$\varphi'_k = A\alpha_k,$$
$$g_1 r_1 u_1 + g_2 r_2 u_2 + g_3 r_3 u_3 + g_4 r_4 u_4 = \Delta.$$

Sollen alle Punkte der unendlich fernen Ebene als Pole conjugirt sein, so muss unabhängig von α_k das Gleichungssystem von

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 1$$

erfüllt werden. Hierzu ist ausreichend und nöthig, dass $A = 0$, und es erübrigen dann für die Coefficienten von φ dieselben vier Gleichungen, welche in 16) aufgefunden worden sind.

Beide in 16) und 17) betrachtete Specialfälle fallen demnach zusammen.

Zur näheren Kenntniss der durch diese Gleichungen charakterisirten Fläche bemerke man, dass jeder ihrer Punkte

$$P \equiv \varphi'_1 u_1 + \varphi'_2 u_2 + \varphi'_3 u_3 + \varphi'_4 u_4 = 0$$

auf der unendlich entfernten Ebene liegt, da ja

$$\varphi'_1 + \varphi'_2 + \varphi'_3 + \varphi'_4 = 0.$$

Dann füllt es entweder die ganze unendlich entfernte Ebene aus, d. h. degenerirt zu dieser Ebene selbst, oder es erscheint seine Gleichung in Form der Gleichung zweier unendlich entfernten Punkte.

In der That erfüllen die Coefficienten von

$$(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4)(\alpha'_1 u_1 + \alpha'_2 u_2 + \alpha'_3 u_3 + \alpha'_4 u_4) = 0$$

für

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \text{ und } \alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 + \alpha'_4 = 0$$

die obigen vier Bedingungsgleichungen.

Dieser Fall mag von den künftigen Betrachtungen ausgeschlossen bleiben.

18. Sich selbst conjugirte Tetraeder. Man wähle eine Ebene T', deren Pol P' im Endlichen liegt; ferner eine Ebene T'', welche durch P' geht, T'' nicht parallel ist, und deren Pol P'' ebenfalls im Endlichen liegt; durch die Gerade $P'P''$ lege man eine Ebene T''', welche $T'T''$ nicht parallel ist. Alsdann ist der Punkt $T'T''T'''$ ($\equiv P^{IV}$) der Pol für die Ebene $P'P''P'''$ ($\equiv T^{IV}$), und das Tetraeder $P'P''P'''P^{IV}$ ist ein sich selbst con-

jugirtes Tetraeder, d. h. jede Tetraederfläche hat die gegenüberliegende Ecke zum Pol.

Wird die Gleichung der Fläche auf ein sich selbst conjugirtes Tetraeder bezogen, so hat die Ebene

$$u_k = u_l = u_m = 0 \text{ den Punkt } u_i = 0$$

zum Pol, wenn $iklm$ irgend eine Permutation von 1234 ist. Hieraus folgen für die Coefficienten der Function φ die vier Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} u_1 + \alpha_{12} u_2 + \alpha_{13} u_3 + \alpha_{14} u_4 &\equiv A_1 u_1, \\
\alpha_{12} u_1 + \alpha_{22} u_2 + \alpha_{23} u_3 + \alpha_{24} u_4 &\equiv A_2 u_2, \\
\alpha_{13} u_1 + \alpha_{23} u_2 + \alpha_{33} u_3 + \alpha_{34} u_4 &\equiv A_3 u_3, \\
\alpha_{14} u_1 + \alpha_{24} u_2 + \alpha_{34} u_3 + \alpha_{44} u_4 &\equiv A_4 u_4.
\end{aligned}$$

Dies System ergiebt:

$$\alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{14} = \alpha_{23} = \alpha_{24} = \alpha_{34} = 0.$$

Die Gleichung der Fläche zweiter Classe auf ein sich sich selbst conjugirtes Tetraeder bezogen lautet demnach:

$$\alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_3 u_3^2 + \alpha_4 u_4^2 = 0.$$

19. Die Gleichung der Fläche $f=0$, welche auf ein für Punktcoordinaten definirtes, sich selbst conjugirtes Tetraeder bezogen ist, lautet zufolge der hier vereinfachten Beziehungen:

$$\left\{\begin{aligned}
a_k x_k &= A \cdot \frac{u_k}{h_k}, \\
\frac{u_1 x_1}{h_1} + \frac{u_2 x_2}{h_2} + \frac{u_3 x_3}{h_3} + \frac{u_4 x_4}{h_4} &= 0,
\end{aligned}\right.$$

für Plancoordinaten:

$$\frac{u_1^2}{a_1 h_1^2} + \frac{u_2^2}{a_2 h_2^2} + \frac{u_3^2}{a_3 h_3^2} + \frac{u_4^2}{a_4 h_4^2} = 0,$$

oder, nachdem man mit Δ^2 erweitert hat:

$$\frac{g_1^2}{a_1} u_1^2 + \frac{g_2^2}{a_2} u_2^2 + \frac{g_3^2}{a_3} u_3^2 + \frac{g_4^2}{a_4} u_4^2 = 0.$$

Die Gleichung der Fläche $\varphi = 0$, welche auf ein für Plancoordinaten definirtes, sich selbst conjugirtes Tetraeder bezogen ist, folgt für Punktcoordinaten aus den Beziehungen

$$\alpha_k u_k = A \frac{x_k}{h_k},$$

$$\frac{u_1 x_1}{h_1} + \frac{u_2 x_2}{h_2} + \frac{u_3 x_3}{h_3} + \frac{u_4 x_4}{h_4} = 0$$

nach entsprechender Erweiterung zu

$$\frac{g_1^2}{\alpha_1} x_1^2 + \frac{g_2^2}{\alpha_2} x_2^2 + \frac{g_3^2}{\alpha_3} x_3^2 + \frac{g_4^2}{\alpha_4} x_4^2 = 0.$$

Hieraus folgt: Ein für Punktcoordinaten definirtes, sich selbst conjugirtes Tetraeder ist auch nach der für Behandlung der Gleichungen in Plancoordinaten gegebenen Definition sich selbst conjugirt.

Da nun das erste Paar Pol und Polarebene bei der Construction des sich selbst conjugirten Tetraeders beliebig gewählt wird, so folgt weiter, dass beide Definitionen für Pol und Polare sich auf dieselben conjugirten Paare von Punkt und Ebene beziehen.

20. Directer analytischer Beweis dafür, dass eine Ebene, deren Gleichung $T=0$ ist und deren Coordinaten u'_k sind, und ein Punkt, dessen Gleichung $P=0$ ist und dessen Coordinaten x'_k sind, gleichzeitig die beiden Beziehungen erfüllen:

$$T\equiv f'_1 x_1 + f'_2 x_2 + f'_3 x_3 + f'_4 x_4 = 0,$$
$$P\equiv \varphi'_1 u_1 + \varphi'_2 u_2 + \varphi'_3 u_3 + \varphi'_4 u_4 = 0,$$

wenn $f=0$ und $\varphi=0$ die Gleichungen derselben Fläche zweiter Ordnung in Punkt-, beziehentlich in Plancoordinaten angeben.

Sei T in der Form gegeben:

$$T\equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0,$$

so sind die Coordinaten von T:

a) $$u_k = A\,.\,a_k h_k,$$

wo A einen den vier u_k gemeinsamen Factor bezeichnet.

Die Coordinaten des Punktes P, dessen Polarebene T ist, bestimmen sich aus den Gleichungen

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = B\,.\,a_1,$$
$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = B\,.\,a_2,$$
$$a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = B\,.\,a_3,$$
$$a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4 = B\,.\,a_4.$$

Bezeichnet man mit δ_{ik} den Coefficienten des i^{ten} Gliedes der k^{te} Reihe in der Discriminante von f, so folgen hieraus die Lösungen:

b) $$x_i = C\,(a_1\delta_{i1} + a_2\delta_{i2} + a_3\delta_{i3} + a_4\delta_{i4}),$$

worin C den x_i gemeinsam ist.

Die Gleichung der Fläche f in Plancoordinaten kann geschrieben werden:

$$\varphi \equiv \frac{u_1}{h_1}\Sigma\frac{u_k}{u_k}\delta_{ik} + \frac{u_2}{h_2}\Sigma\frac{u_k}{h_k}\delta_{2k} + \frac{u_3}{h_3}\Sigma\frac{u_k}{h_k}\delta_{3k} + \frac{u_4}{h_4}\Sigma\frac{u_k}{h_k}\delta_{4k} = 0.$$

Da

$$\delta_{i1} = \delta_{1i},$$

so kann man hierfür auch setzen:

$$\varphi \equiv \Sigma\frac{u^2_k}{h^2_k}\delta_{kk} + 2\Sigma\frac{u_i}{h_i}\frac{u_k}{h_k}\delta_{ik},$$

wenn k eine der vier Ziffern 1, 2, 3, 4 und i eine von k verschiedene derselben Ziffern bezeichnen.

Die partiellen Differentialquotienten nach u_i sind hiernach:

$$\varphi_i = 2\,\Sigma\frac{u_k}{h_k}\delta_{ki}, \quad k = 1234.$$

Der Pol von u_k hat hiernach die Coordinaten

$$\xi_i = D\Sigma \frac{u_k}{h_k} \delta_{ki},$$

wenn D einen von i unabhängigen Factor bezeichnet.

Setzt man hier für $\frac{u_k}{h_k}$ die aus a) folgenden Werthe ein, so entsteht

$$\xi_i = E(a_1\delta_{1i} + a_2\delta_{2i} + a_3\delta_{3i} + a_4\delta_{4i}),$$

wofür auch geschrieben werden kann:

c) $$\xi_i = E(a_1\delta_{i1} + a_2\delta_{i2} + a_3\delta_{i3} + a_4\delta_{i4}),$$

wo E von i unabhängig ist.

Vergleicht man die Formeln b) mit c), so folgt

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4.$$

Nimmt man hierzu die Gleichungen

$$\Sigma g_k x_k = \Delta, \quad \Sigma g_k \xi_k = \Delta,$$

so folgt ferner

$$x_k = \xi_k.$$

Der nach Punktcoordinaten definirte Pol x_k ist demnach identisch mit dem nach Plancoordinaten definirten Pol ξ_k, q. e. d.

21. **Unterscheidung der Flächen zweiter Ordnung nach ihren auf ein sich selbst conjugirtes Tetraeder bezogenen Gleichungen.**

Die beiden Gleichungen der Fläche seien

a) $$f \equiv a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0,$$

b) $$\varphi \equiv \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_3 u_3^2 + \alpha_4 u_4^2 = 0,$$

wo also

$$a_k \,.\, \alpha_k = g^2{}_k.$$

A. Einer oder mehrere von den vier Coefficienten a_k oder α_k sind gleich Null. In der Gleichung der Fläche in allgemeinster Form wird dies dadurch angezeigt, dass alsdann die Discriminante der Functionen f, beziehentlich φ, die ja eine Invariante derselben ist, verschwindet.

1. $a_4 = a_3 = a_2 = 0$, also $\alpha_4 = \infty$, $\alpha_3 = \infty$, $\alpha_2 = \infty$, ohne bestimmtes Verhältniss.

Die Gleichung $f=0$ reducirt sich auf $x_1^2=0$, und in Uebereinstimmung damit ergiebt sich aus b): $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, d. h. die Gleichung repräsentirt die eine Ebene des Tetraeders.

2. $\alpha_4 = \alpha_3 = \alpha_2 = 0$, also $a_4 = \infty$, $a_3 = \infty$, $a_2 = \infty$, ohne bestimmtes Verhältniss zu einander.

Man erhält

$$\varphi \equiv \alpha_1 u_1^2 = 0 \text{ und } x_4 = x_3 = x_2 = 0;$$

die Gleichung repräsentirt einen Eckpunkt des Tetraeders.

3. $a_4 = 0$, $a_3 = 0$; $a_1 : a_2 > 0$.

Die Gleichung in Punktcoordinaten wird zu

$$f \equiv a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 = 0,$$

und wird nur durch die Punkte befriedigt, für welche zugleich

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0,$$

also für eine Kante des Tetraeders.

4. $\alpha_4 = 0, \ \alpha_3 = 0; \ \alpha_1 : \alpha_2 > 0.$

Die Gleichung in Plancoordinaten ist

$$\varphi \equiv \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 = 0.$$

Ihr genügen nur die Ebenen, für welche zugleich

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0.$$

Sie umhüllen eine Kante des Tetraeders.

5. $a_4 = 0, \ a_3 = 0; \ a_1 : a_2 < 0.$

In diesem Falle kann man die Gleichung schreiben:

$$f \equiv a^2 x_1^2 - a_2 x_2^2 = 0.$$

Sie stellt zwei Ebenen dar, deren Gleichungen die Form haben:

$$a x_1 + b x_2 = 0 \text{ und } a x_1 - b x_2 = 0.$$

Dies Ebenenpaar ist den Axenebenen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ harmonisch conjugirt.

6. $\alpha_4 = 0, \ \alpha_3 = 0; \ \alpha_1 : \alpha_2 < 0.$

Die Gleichung $\varphi = 0$ kann geschrieben werden:

$$\varphi \equiv \alpha^2 u_1^2 - \beta^2 u_2^2 = 0.$$

Sie ergiebt zwei Punkte:

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = 0 \text{ und } \alpha u_1 - \beta u_2 = 0.$$

Dieses Punktenpaar liegt in einer Tetraederkante und ist den Endpunkten derselben harmonisch conjugirt.

7. $a_4 = 0, \ a_i : a_k > 0.$

Der Gleichung genügt nur ein Punkt:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

8. $\alpha_4 = 0, \ \alpha_i : \alpha_k > 0.$

Der Gleichung entspricht nur eine Ebene:

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0.$$

9. $a_4 = 0$, und nicht alle drei a_k haben gleiches Zeichen.

Die Gleichung $f = 0$ ergiebt einen Kegel zweiter Ordnung, dessen Mittelpunkt in einer Ecke des Tetraeders liegt.

10. $\alpha_4 = 0$, und nicht alle drei α_k haben gleiches Zeichen.

Die Gleichung $\varphi = 0$ ergiebt eine Grenzfläche zweiter Ordnung, für welche die eine Tetraederfläche Hauptebene ist.

22. Zur weiteren Classification der Flächen, deren Discriminante nicht verschwindet, dienen folgende Sätze:

Auf welches der unendlich vielen sich selbst conjugirten Tetraeder man auch eine Fläche bezieht, immer bleibt die Anzahl der positiven und die Anzahl der negativen Coefficienten in der Gleichung der Fläche unverändert.

Dieser Satz folgt aus dem Trägheitsgesetz für quadratische Formen.

23. **Wenn in der Gleichung $f=0$ drei Coefficienten dasselbe Vorzeichen haben, so lassen sich in die Fläche keine Geraden legen.**

Denn wenn sich eine Gerade soll in die Fläche legen lassen, so muss die Fläche alle vier Ebenen des Axentetraeders in reellen Punkten schneiden. Haben aber z. B. $a_1\, a_2\, a_3$ dasselbe Vorzeichen, so hat die Fläche f mit der Ebene $x_4 = 0$ keine reellen Punkte gemein.

24. **Wenn in der Gleichung $f=0$ zwei positive und zwei negative Coefficienten vorhanden sind, so ist die Fläche eine geradlinige Fläche. Durch jeden Punkt der Fläche gehen zwei gerade Linien, die ganz in die Fläche fallen.**

Denn in diesem Falle kann die Gleichung in Punktcoordinaten geschrieben werden:

$$f \equiv a_1^2 x_1^2 - a_2^2 x_2^2 + a_3^2 x_3^2 - a_4^2 x_4^2 = 0.$$

Hierfür kann man setzen:

$$f \equiv (a_1 x_1 + a_2 x_2)(a_1 x_1 - a_2 x_2) + (a_3 x_3 + a_4 x_4)(a_3 x_3 - a_4 x_4) = 0.$$

Kürzt man ab:

$$T_1 \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2, \quad T_2 \equiv a_1 x_1 - a_2 x_2,$$
$$T_3 \equiv a_3 x_3 + a_4 x_4, \quad T_4 \equiv a_3 x_3 - a_4 x_4,$$

so wird f erfüllt für alle Punkte, für welche zugleich

$$T' \equiv \lambda T_1 - \mu T_3 = 0 \text{ und } T'' \equiv \mu T_2 + \lambda T_4 = 0,$$

sowie für alle Punkte, für welche

$$T''' \equiv \lambda T_1 - \mu T_4 = 0 \text{ und } T^{IV} \equiv \mu T_2 + \lambda T_3 = 0.$$

Die Ebenen T' bilden ein Büschel mit $T_1\, T_3$,
" " T'' " " " " $T_2\, T_4$,
" " T''' " " " " $T_1\, T_4$,
" " T^{IV} " " " " $T_2\, T_3$.

Durch Variation der Coefficienten $\lambda\mu$ geht aus der Durchdringung je zweier demselben $\lambda\mu$ zugehörigen Ebenen T' und T'' das eine System, und je zweier zusammengehörigen Ebenen T''' und T^{IV} das andere System von in der Fläche enthaltenen Geraden hervor.

Von den Geraden des einen Systems schneidet keine die andere. Jede Gerade des einen Systems schneidet jede Gerade des andern.

Um nachzuweisen, dass jeder Punkt x'_k, welcher der Gleichung

$$T_1 T_2 + T_3 T_4 = 0$$

entspricht, auf dem Durchschnitt zweier Ebenen

$$T' \equiv \lambda T_1 + \mu T_3 = 0, \quad T'' \equiv \mu T_2 - \lambda T_4$$

liegt, genügt es, zu bemerken, dass sich $\lambda\mu$ immer so wählen lassen, dass

$$\lambda T'_1 + \mu T'_3 = 0, \text{ also } T'_1 = -\frac{\mu}{\lambda} T'_3.$$

Da nun P' die Gleichung erfüllt:

$$T'_1\, T'_2 - T'_3\, T'_4 = 0,$$

so ergiebt sich nach der Substitution des Werthes für T'_1:

$$\mu T'_2 - \lambda T'_4 = 0,$$

q. e. d.

Ebenso lässt sich beweisen, dass jeder Punkt der Fläche auf dem Durchschnitte zweier Ebenen T''' und T^{IV} gelegen ist. Mithin gehen durch jeden Punkt der Fläche zwei Gerade, die ganz der Fläche angehören, q. e. d.

Jede Tangentialebene enthält die durch den Berührungspunkt gehenden Geraden der Fläche.

Denn wenn $x'_k\, x''_k$ die Coordinaten zweier auf einer Geraden der Fläche gelegenen Punkte sind, so gehört auch der Punkt der Fläche an, dessen Coordinaten nach den Formeln gebildet sind:

$$x_k = \lambda' x'_k + \lambda'' x''_k, \quad \lambda' + \lambda'' = 1.$$

Setzt man dies in die Gleichung $f = 0$ ein, so entsteht

$$\lambda'^2 f' + \lambda''^2 f'' + 2\lambda'\lambda'' (f'_1 x''_1 + f'_2 x''_2 + f'_3 x''_3 + f'_4 x''_4) = 0;$$

da nach der Voraussetzung

$$f' = 0 \text{ und } f'' = 0,$$

so ist auch

$$f'_1 x''_1 + f'_2 x''_2 + f'_3 x''_3 + f'_4 x''_4 = 0;$$

der Punkt x''_k genügt demnach der Gleichung der Tangentialebene in x_k, q. e. d.

Ausser diesen Geraden kann es demnach keine auf der Fläche geben.

25. Die analoge Untersuchung für Plancoordinaten ergiebt: Wenn von den Coefficienten der Gleichung $\varphi = 0$ (also auch von $f = 0$) drei dasselbe Zeichen haben, so giebt es kein ebenes Büschel, das aus lauter Ebenen der Fläche φ zusammengesetzt wäre.

Denn dann müsste durch jeden Tetraedereckpunkt eine solche Büschelebene gehen, es müsste also jeder Tetraedereckpunkt eine Ebene von $\varphi = 0$ enthalten. Sind aber z. B. $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ positiv, α_4 negativ, so enthält der Punkt $u_4 = 0$ keine reelle Tangentialebene der Fläche.

26. Sind von den Coefficienten in der Gleichung $\varphi = 0$ (also auch in $f = 0$) zwei positiv und zwei negativ, so giebt es unzählig viele Büschel aus Tangentialebenen. Jede Tangentialebene gehört zwei solchen Büscheln an.

Denn in diesem Falle kann man die Gleichung schreiben:

$$\begin{aligned}\varphi &\equiv \alpha_1^2 u_1^2 - \alpha_2^2 u_2^2 + \alpha_3^2 u_3^2 - \alpha_4^2 u_4^2 \\ &\equiv (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)(\alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2) + (\alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4)(\alpha_3 u_3 - \alpha_4 u_4) = 0.\end{aligned}$$

Man kürze ab

$$P_1 \equiv \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \quad P_2 \equiv \alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2,$$
$$P_3 \equiv \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4, \quad P_4 \equiv \alpha_3 u_3 - \alpha_4 u_4.$$

Alsdann enthält φ alle Ebenen, für welche zugleich

$$P' \equiv \lambda P_1 + \mu P_3 = 0, \quad P'' \equiv \mu P_2 - \lambda P_4 = 0,$$

sowie alle Ebenen, für welche zugleich

$$P''' \equiv \lambda P_1 + \mu P_4 = 0, \quad P^{IV} \equiv \mu P_2 - \lambda P_3 = 0.$$

Die Punkte P' bilden eine geradlinige Reihe mit P_1 und P_3,
„ „ P'' „ „ „ „ „ P_2 „ P_4,
„ „ P''' „ „ „ „ „ P_1 „ P_4,
„ „ P^{IV} „ „ „ „ „ P_2 „ P_3.

Da durch das Verhältniss $\lambda : \mu$ die zusammengehörigen Punktenpaare $P'P''$ und $P'''P^{IV}$ eindeutig bestimmt sind, so folgt, dass keine Ebene zwei Büscheln des Systems $P'P''$ oder beziehentlich $P'''P^{IV}$ gemeinsam sein kann, oder dass von den Büschelaxen $P'P''$, sowie von denen $P'''P^{IV}$ keine die andere schneidet.

Jede Axe des einen Systems schneidet jede Axe des andern.

Es müssen sich dann immer vier Zahlen $\alpha\beta\gamma\delta$ finden lassen, durch welche für irgend vier Werthe $\lambda\mu\lambda'\mu'$ die Identität erfüllt wird:

$$\alpha P' + \beta P'' \equiv \gamma P''' + \delta P^{IV}.$$

Diese führt auf vier für $\alpha\beta\gamma\delta$ lineare Gleichungen; die Determinante dieses Systems

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -\lambda' & 0 \\ \mu & 0 & 0 & \lambda' \\ 0 & \mu & 0 & -\mu' \\ 0 & \lambda & \mu' & 0 \end{vmatrix}$$

verschwindet identisch, also ist die gewünschte Wahl immer ausführbar, q. e. d.

Um endlich nachzuweisen, dass jede Tangentialebene u'_k von $\varphi = 0$ zwei Büscheln angehört, bemerke man, dass alsdann für u'_k

$$P_1 P_2 + P_3 P_4 = 0 \text{ und zugleich } P' = 0, \; P'' = 0,$$

sowie

$$P_1 P_2 + P_3 P_4 = 0 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad P''' = 0, \; P^{IV} = 0.$$

Die beiden Axen, welche eine Tangentialebene enthält, schneiden sich im Berührungspunkte.

Es fallen hiernach die Axen der aus lauter Tangentialebenen zusammengesetzten Büschel und die aus lauter Punkten der Fläche bestehenden Geraden zusammen.

27. Lehrsatz: Beim Uebergange von einem sich selbst conjugirten Tetraeder zu einem andern bleibt die Summe der Coefficienten in der Gleichung $f = 0$, sowie in der Gleichung $\varphi = 0$ unverändert.

Beweis: a) für die Constanz der Summe der Coefficienten in $f = 0$.

Transformirt man nach § 3, 3), so erfüllen die Coefficienten folgende Bedingungsgleichungen, wenn das neue System nach der Voraussetzung ein sich selbst conjugirtes ist:

$$\sum^i a_i a_k^{(i)} a_l^{(i)} = 0.$$

Für k und l wähle man je zwei verschiedene der Nummern 1234, so erhält man die nothwendigen und ausreichenden sechs Bedingungen.

Die Coefficientensumme in der transformirten Gleichung ist

$$S = \Sigma a_i \left(a_1^{(i)2} + a_2^{(i)2} + a_3^{(i)2} + a_4^{(i)2}\right).$$

Fügt man zu dieser Summe die sechs Formeln

$$-2 \sum^i a_i a_k^{(i)} a_l^{(i)} \cos \gamma_{kl} = 0,$$

so erhält man

$$\Sigma a_i \left(a_1^{(i)2} + a_2^{(i)2} + a_3^{(i)2} + a_4^{(i)2} - 2a_1^i a_2^i \cos\gamma_{12} - 2a_1^i a_3^i \cos\gamma_{13}\right.$$
$$\left. - 2a_1^i a_4^i \cos\gamma_{14} - 2a_2^i a_3^i \cos\gamma_{23} - 2a_2^i a_4^i \cos\gamma_{24} - 2a_3^i a_4^i \cos\gamma_{34}\right).$$

Nach den in § 3, 2) enthaltenen Voraussetzungen über die Coefficienten der Transformationsformeln sind die Coefficienten der a_i in dieser Summe gleich der Einheit; also ist

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4,$$

q. e. d.

Beweis: b) für die Constanz der Summe der Coefficienten in $\varphi = 0$.

Transformirt man nach § 3, 7), so erfüllen die Coefficienten nach der Voraussetzung folgende sechs Gleichungen:

$$\sum^i \alpha_i \alpha_k^{(i)} \alpha_l^{(i)} = 0, \quad kl \text{ zwei verschiedene von } 1234.$$

Die Coefficientensumme der transformirten Gleichung ist

$$S = \Sigma \alpha_i \left(\alpha_1^{(i)2} \alpha_2^{(i)2} + \alpha_3^{(i)2} + \alpha_4^{(i)2}\right).$$

Fügt man die sechs Formeln hinzu:

$$2 \sum^i \alpha_i \alpha_k^i \alpha_l^i,$$

so erhält man

$$S = \Sigma \alpha_i (\alpha_1^i + \alpha_2^i + \alpha_3^i + \alpha_4^i)^2.$$

Da nun nach den Voraussetzungen des § 3, 7)

$$\alpha_1^i + \alpha_2^i + \alpha_3^i + \alpha_4^i = 1,$$

so folgt

$$S = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4,$$

q. e. d.

28. B. Classification der Flächen, deren Discriminante von Null verschieden ist.

I. Geradlinige Flächen: Zwei Coefficienten haben dasselbe Vorzeichen.

a) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$.

In diesem Falle liegt der Pol der unendlich fernen Ebene — d. i. das Centrum der Fläche — unendlich fern, denn seine Gleichung ist

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0.$$

Dies charakterisirt das hyperbolische Paraboloid.

b) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ ist von Null verschieden.

Von den beiden Coordinaten des Mittelpunktes sind hier stets zwei negativ, zwei positiv. Das Centrum liegt also für alle sich selbst conjugirten Tetraeder in einem der sechs den Kanten anliegenden Räume.

Wählt man das Centrum selbst als Tetraederecke, so bleibt jene Lage des Centrums ungeändert, also werden zwei Coefficienten der transformirten Gleichung negativ, einer positiv; die Gleichung in Punktcoordinaten erhält also die Form

$$-a_1^2 x_1^2 - a_2^2 x_2^2 + a_3^2 x_3^2 + 1 = 0.$$

Hierdurch wird das einschalige Hyperboloid charakterisirt.

II. Nicht-geradlinige Flächen. Drei Coefficienten haben dasselbe Vorzeichen.

a) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0.$

Das Centrum liegt unendlich fern; der Gleichung gehört das elliptische Paraboloid zu.

In jedem von a) verschiedenen Falle kann man die Gleichung so umbilden, dass

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 > 1.$$

b) Drei Coefficienten sind positiv, einer negativ.

In diesem Falle hat das Centrum drei positive Coordinaten, liegt also in einem der vier einer Tetraederfläche aussen anliegenden Räume. Wählt man den Mittelpunkt als den einen Tetraederpunkt, so wird demnach die Gleichung zu

$$-a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 + a_3^2 x_3^2 + 1 = 0.$$

Dies ist die Gleichung des zweischaligen Hyperboloids.

c) Drei Coefficienten sind negativ, einer positiv. In diesem Falle hat das Centrum drei negative Coordinaten, liegt in dem äusseren Scheitelraume einer Tetraederecke. Bezieht man die Gleichung auf ein Tetraeder, welches das Centrum als Eckpunkt enthält, so wird die Gleichung

$$a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 + a_3^2 x_3^2 - 1 = 0;$$

sie repräsentirt also das Ellipsoid.

29. Bezieht man die Gleichungen der Flächen auf ein Tetraeder, von welchem ein Eckpunkt (A_4) unendlich fern ist, so geht nach § 4, 3) die Gleichung zwischen den homogenen Plancoordinaten in eine nicht-homogene Gleichung zwischen den Abschnitten der variabeln Ebene auf den nach dem unendlich fernen Punkte gezogenen Geraden (also auf Geraden, die durch $A_1\,A_2\,A_3$ parallel mit dem der Ebene $A_1\,A_2\,A_3$ conjugirten Durchmesser gezogen sind) über.

Die eine Coordinate des Centrums wird gegen die anderen verschwindend klein, aber die Vorzeichen der Centrumcoordinaten, die für die Fläche charakteristisch sind, bleiben unverändert.

Hiernach wird die Gleichung

des einschaligen Hyperboloids: $\alpha_1^2 v_1^2 + \alpha_2^2 v_2^2 + \alpha_3^2 v_3^2 = 1,$

„ Ellipsoids: $\alpha_1^2 v_1^2 - \alpha_2^2 v_2^2 - \alpha_3^2 v_3^2 = 1.$

Da unter den nicht verschwindenden Coordinaten des Mittelpunktes beim Ellipsoid hier stets zwei negativ sind und eine positiv ist, so folgt, dass in der Gleichung des Ellipsoids, wenn sie in der angegebenen Form [nicht mit (— 1) erweitert] geschrieben wird:

$$\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 > 0.$$

Die Gleichung des zweischaligen Hyperboloids nimmt in diesem Falle zwei verschiedene Formen an. Legt man das Tetraeder so, dass der Mittelpunkt im Innern des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ liegt, so wird das Glied constant, welches in den negativen Coefficienten multiplicirt ist; die Gleichung erhält also die Form

a) $$\alpha_1^2 v_1^2 + \alpha_2^2 v_2^2 + \alpha_3^2 v_3^2 = 1.$$

Der Tangentialpunkt einer Ebene $v'_1 v'_2 v'_3$ hat die Gleichung

$$\alpha_1 v'_1 v_1 + \alpha_2 v'_2 v_2 + \alpha_3 v'_3 v_3 = 1,$$

wo also

$$\alpha_1^2 v'^2_1 + \alpha_2^2 v'^2_2 + \alpha_3^2 v'^2_3 = 1.$$

Aus beiden Gleichungen folgt, dass es keine Tangentialebene v'_k giebt, deren Tangentialpunkt in der Fläche g_4, d. i. in

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0$$

liegt. Die Schlussfolgerung ist umkehrbar, mithin hat die Gleichung des zweischaligen Hyperboloids dann und nur dann die Form a) mit drei positiven Coefficienten, wenn die Diametralebene $A_1 A_2 A_3$ die Fläche nicht schneidet.

Legt man hingegen das Tetraeder so, dass der Mittelpunkt ausserhalb desselben liegt, wobei er dann stets in einem der einen Kante aussen anliegenden Flächentheile sich befindet, so wird ein mit positivem Coefficienten behaftetes Glied constant; die Gleichung erhält jetzt die Form

b) $$\alpha_1^2 v_1^2 - \alpha_2^2 v_2^2 - \alpha_3^2 v_3^2 = 1.$$

In diesem Falle schneidet die Diametralebene $A_1 A_2 A_3$ die Fläche. Da zwei von den nicht verschwindenden Coordinaten des Centrums positiv sind, die dritte negativ ist, so folgt weiter, dass hier stets

$$\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 < 0.$$

II.

Der Calculus des Victorius.

Von

GOTTFRIED FRIEDLEIN
in Hof.

(Hierzu 9 Tabellen.)

Eine als *liber arithmeticae* bezeichnete Bamberger Pergamenthandschrift des X. oder XI. Jahrhunderts (H. S. IV, 24 (N. 25)) kam durch Herrn Director Halm, der für Hebung der handschriftlichen Schätze unermüdlich nicht allein selbst thätig ist, sondern auch Anderen bereitwilligst die Wege dazu bahnt, zu solchem Nachforschen in die Hände des Herrn Professor Christ, und der Scharfsinn dieses Gelehrten erkannte nicht nur bald, dass zwei Theile in dem Manuscript müssen unterschieden werden: ein Tractat über die Weise der Multiplication und Division bei den Römern nach seinem Dafürhalten, und ein weitläufiger Commentar zu demselben, sondern er ermittelte auch die Verfasser von beiden Arbeiten, nämlich Victorius aus Aquitanien aus dem V. Jahrhundert für die erste, und Abbo, den späteren Abt von Fleury aus dem X. Jahrhundert, für die zweite. Das Ergebniss seiner Forschungen veröffentlichte Christ in den Sitzungsberichten der Akademie zu München 1863, S. 100 – 152. Diese Arbeit veranlasste mich, die Bamberger Handschrift selbst einzusehen, und, was ich auf Grund derselben und anderer Handschriften, welche das Werk des Bernelinus enthielten, der gleichfalls Victorius benutzte, über den Calculus des Letzteren zu sagen vermochte, habe ich in der Zeitschrift für Mathematik und Physik IX, S. 309 und 314 — 320 dargethan. Aus Hultsch, *metrolog. script. rell. II*, S. 155, erfuhr ich, dass der im Bamberger Codex nur verstümmelt erhaltene Calculus des Victorius in einer Berner Handschrift (*ms. math.* 250 4⁰ *saec. IX vel X*) enthalten sei und suchte natürlich zur Einsichtnahme derselben zu gelangen. Als bereitwilligster Vermittler dazu erbot sich mir Herr Director Halm, nur machten es demselben verschiedene Umstände unmöglich, mir in der nächsten Zeit das Gewünschte zu verschaffen. So erhielt ich weitere Kunde über diesen Calculus, während ich an der Arbeit über

die Zahlzeichen u. d. ü. schrieb, die nunmehr in Erlangen bei Deichert erschienen ist*, nur durch die Herausgabe der Werke Gerbert's durch Olleris, und es enthalten daher die Nummern 63 und 130—133 dieser Arbeit nur kleine Fortschritte in der richtigen Erkenntniss des Werkes des Victorius. Während des Druckes derselben jedoch bekam ich die Mittheilungen des Herrn Professor Kinkelin über den Calculus des Victorius in einer Baseler Handschrift in den Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft zu Basel in die Hände und konnte in einem Anhang, S. 160—163, noch Nutzen daraus ziehen.

Es war natürlich, dass sich mein Wunsch wieder regte, die handschriftliche Ueberlieferung selbst einsehen zu können, und zu meiner grossen Freude theilte mir auch Herr Director Halm mit, dass mir im Herbst (1869) noch dies sollte zu Theil werden. Dieses Versprechen wurde in einer Weise gehalten, die alle meine Hoffnungen übertraf und für die ich hier meinen besten Dank auszusprechen habe. Auf Bitte des Herrn Director Halm verstand sich nämlich Herr Professor Eduard Wölfflin dazu, eine mit grösster Genauigkeit und Sorgfalt gefertigte Abschrift der Baseler Handschrift herzustellen. Diese hat Halm selbst mit der Berner Handschrift collationirt und beide Arbeiten freundlichst mir zugestellt, um weiter für die Verwerthung derselben zu sorgen.

So war meine Aufgabe zunächst die, den Inhalt des handschriftlich Vorliegenden zu untersuchen, etwaige Fehler desselben zu ermitteln und insbesondere darauf zu achten, ob Alles, und wenn nicht, wieviel dem Victorius beizumessen ist.

Das Ergebniss konnte mit und konnte ohne Abdruck des in den Handschriften Gebotenen mitgetheilt werden und es lässt sich nicht leugnen, dass man zweifelhaft darüber sein kann, ob die Wiederbekanntgabe eines vor wenigstens 1400 Jahren gebrauchten Rechenknechtes so viel Interesse erregen kann, als es bei den Kosten eines solchen vorauszusetzen ist. Die Erwägung jedoch, dass dieses Werk das einzige in seiner Art ist, das uns aus dem Alterthum erhalten ist, dass es zwar zum Theil in den Werken Beda's, Basel 1563, I, Col. 149—158, abgedruckt ist, aber allein in den ersten 32 Columnen, während es ohne die weiteren Tabellen 98 enthält, und auch in diesen höchst mangelhaft, endlich, dass zugleich auch eine Tradition durch sechs Jahrhunderte, nämlich vom V. bis X. Jahrhundert, dabei in Betracht kommt, diese Erwägung hat mich bestimmt, auch das handschriftlich Gebotene bekannt zu geben, um so mehr, als die rühmlichst bekannte Teubner'sche Buchhandlung die Hand dazu bot. Dabei liess ich jedoch zwei Abschnitte weg, welche bereits von Hultsch in seinen *metrol. script. rell.* abgedruckt sind. Beide sind spätere Zuthaten und es reicht

* Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer und des christlichen Abendlandes vom VII. bis XIII. Jahrhundert. Erlangen 1869.

daher die Mittheilung der abweichenden Lesarten für jede etwaige Untersuchung darüber aus. Weil endlich die Herstellung der Tabellen mit Ersparung unnöthigen Aufwandes erfolgen musste, so wurden sie von dem Texte getrennt, und es finden sich also an der Stelle derselben im Text die Abweichungen der Handschriften. Sind diese Unterbrechungen weniger schön zu nennen, so hat man dafür auf der andern Seite den Vortheil, dass die Tabellen, welche ja doch die Hauptsache bilden, möglichst in der überlieferten Gestalt gegeben werden konnten. Dass nämlich Victorius so seinen Calculus einrichtete, erhellt wenigstens für Col. 1—98 aus den Worten der Einleitung; ob aber auch die Zahlzeichen die des Victorius waren, ist zwar ungewiss, aber es ist sehr wahrscheinlich, dass zu seiner Zeit die umständlichen alten Formen sich in bequemere Formen für die Currentschrift umgestaltet hatten. Christ macht nämlich (S. 104) darauf aufmerksam, dass ganz verwandte Charaktere sich in den Schriften der *gromatici* finden, welche nach Mommsen im V. Jahrhundert zusammengestellt wurden. Da wenigstens gar keine Andeutungen vorliegen, dass eine Aenderung in der Zwischenzeit vom V. bis X. Jahrhundert mit den Zahlzeichen vorgenommen wurde, so bleibt mir nichts Anderes übrig, als die Zeichen möglichst genau wiederzugeben, welche die vorliegenden Handschriften aus dem X. oder XI. Jahrhundert darbieten, natürlich nicht in ihren einzelnen, oft nachlässig und gedankenlos geschriebenen Zügen, sondern so, wie sie sich aus den relativ sorgfältigst geschriebenen Stellen entnehmen liessen.

Demnach ging die Form = für 2 Unzen durch die Mittelform Z über in ↄ, welche, wenn sie selbst den Anfang macht, was bei 2, 3, 4, 5 Unzen der Fall ist, den stärkeren schrägen Strich oben behält, wenn sie aber an ʃ oder ↄ sich anschliesst, was bei 8, 9, 10, 11, 4 und 5 Unzen der Fall ist, dafür einen feinen Verbindungsstrich mit dem Vorhergehenden erhält. Das Zeichen — für die Unze ging über in den schrägen Strich ⁄ mit dem Punkte an dem oberen Ende, wenn 1 Unze allein zu bezeichnen war, und bei den Zeichen für ½ und 1½ Unzen; denn ersteres ist genau dem Wort *semiuncia* entsprechend eine Verbindung des Zeichens für *semis* mit dem für 1 Unze in der Art, dass letzteres unten an das erstere angesetzt wurde, so dass der gerade Strich des Unzenzeichens blieb. Ebenso ist das Zeichen für 1½ Unzen das Zeichen für ½ Unze, durch welches das für 1 Unze hindurchgeht. Wenn aber das Zeichen für 1 Unze mit dem für 2 oder 6 Unzen, oder deren Verbindungen zu vereinigen war, so geschah dies in der Form des Hakens ſ, der an der Biegung jener Zeichen sich anschloss, so dass das Zeichen für 7 Unzen von dem für ½ Unze sich dadurch unterscheidet, dass bei jenem für die eine Unze das Häkchen an der Biegung angesetzt ist, bei diesem aber der gerade Strich unten erscheint. Die Zeichen für *sicilicus*, *sextula* und *scriptulum* sind nur bequemere und kürzere Formen der älteren Zeichen. Die übrigen Zeichen, die vereinzelt vorkommen, bil-

dete ich möglichst genau nach, wie die Abschrift Wölfflin's sie enthielt, wie überhaupt dieselbe möglichst eingehalten wurde; nur die Wiederholungen des *deduc pars* in der Col. 126 und 129 und die des *id est* in der *Janua calculi* glaubte ich ersparen zu können.

Von den Zeichen, die ich selber anwendete, bezeichnet

B_1 die Baseler Handschrift,
B_2 die in Bern,
B_3 die in Bamberg.

Von B_1 bemerkte Herr Professor Wölfflin Folgendes: Sie besteht aus zwei Pergamentheften in Folio: I. Heft Fol. 1—8, II. Heft Fol. 9—12 (in den Tabellen Col. 1-124 mit dem Text auf S. 67 Z. 32-38 und Col. 125—130 mit dem Text auf S. 69 — 79. Von derselben Hand, die in das X. oder IX. Jahrhundert zu setzen ist, sind Fol. 1 — 11^r Z. 32 der 1. und Z. 31 der 2. Columne incl. geschrieben, d. h. das ganze im Folgenden Mitgetheilte mit Ausnahme des Abschnittes *ponderum pars minima cet.*, der bei Hultsch, *metr. script. rell.* II. S. 138—139 steht, und des auf S. 78 stehenden Abschnittes *Calculus minimus est cet.* Diese beiden sind von jüngerer Hand, etwa Saec. XI geschrieben. Auf Fol. 11^v und Fol. 12^r steht im Codex noch das Fragment des Priscian zugeschriebenen *carmen de ponderibus* von v. 1—162 (s. Hultsch a. a. O. S. 88—97. Da Herr Professor Wölfflin davon, weil nicht zum Calculus gehörig, keine Abschrift beifügte, so vermochte ich nicht Varianten davon mitzutheilen). Die Textschrift und Glossenschrift und die derRandnoten auf Fol. 10^r und 10^v (Seite 72—76) sind von derselben Hand.

Die Abweichungen, welche bei B_2 sich finden, sind an den einzelnen Stellen angegeben. Es scheint B_2 eine Abschrift von B_1 zu sein, welche aber eine Correctur an mehreren Stellen erfahren hat. Mit B_3 bezeichnete ich die Abweichungen, die in dem Texte sich finden, welchen Christ mittheilte, und in dem, welchen ich mir aus der Bamberger Handschrift selbst notirte.

Nach der Mittheilung dieser äusseren Umstände ist nunmehr auf die Schrift selbst und ihren Verfasser näher einzugehen.

Es ist ausser Zweifel gestellt, dass der Victorius, dem der Calculus in dem Commentar des Abbo und der Schrift des Bernelinus über die Multiplication und Division der Minutiae beigelegt wird, der als *calculator studiosissimus* und *scrupulosus* gerühmte Victorius von Aquitanien ist, der im Jahre 457 n. Chr. einen *canon paschalis* verfasste (Christ, S. 101—103). Derselbe wird auch Victorinus genannt, aber es hat Christ genügend dargethan, dass die Form Victorius den Vorzug verdient.

Daraus, dass der Calculus nur ein untergeordnetes elementares Werk ist, schliesst Christ, dass derselbe aller Wahrscheinlichkeit nach in eine frühere Lebenszeit des Victorius fällt, als sein Canon, und daher füglich in die Mitte oder die erste Hälfte des V. Jahrhunderts zu setzen ist. Um

zwischen der Mitte und der ersten Hälfte des V. Jahrhunderts zu entscheiden, müssten besondere Anhaltspunkte erst noch gefunden werden. Die Möglichkeit, dass der Calculus erst nach dem Canon veröffentlicht wurde, ist nicht auszuschliessen. Denn was uns jetzt untergeordnet und elementar dünkt, war es nicht ebenso in jener Zeit, und es konnte Victorius auch erst mit seinem Calculus hervortreten, als er sich durch den Canon einen Namen gemacht hatte. Möglich ist auch, dass er überhaupt ein berühmter Rechenkünstler war und sein vorzüglichstes Hilfsmittel dabei frühzeitig bekannt gab. Denn für jene Zeit boten seine Tabellen eine verhältnissmässig ebenso grosse Erleichterung, wie im XVII. Jahrhundert die Logarithmentafeln. Sie mögen daher sehr geschätzt gewesen sein, und jedenfalls spricht dafür sehr der Umstand, dass noch im X. Jahrhundert Abbo einen Commentar darüber schrieb, und am Ende des X. oder Anfang des XI. Jahrhunderts Bernelinus bei seiner Arbeit sie zu Hilfe nahm.

Welcher Name aber ist diesen Tabellen zu geben? Christ giebt S. 132 die Ueberschrift: *Victorii argumentum calculandi*, offenbar nach den Worten der Praefatio: *tale calculandi argumentum* (S. 58 Z. 12); aber an dieser Stelle wird nicht von den folgenden Tabellen geredet, sondern von der Theilung eines Ganzen in der Rechnung (*ut omnis dividenda integritas rationabili per illud* [*i. e. per calculandi argumentum*] *possit partitione secari*). Es ist also das *argumentum calculandi* nichts Anderes als die Theilung des *as*, wie es auch im Folgenden heisst: *In hoc argumento unitas assis vocatur, cuius partes ... propriis sunt insignitae vocabulis*. Dagegen gebraucht Victorius von den Tabellen unzweifelhaft den Namen Calculus (S. 59 Z. 15), und diesen gebraucht auch Abbo (s. Christ S. 101, Anm.), und Bernelinus spricht zwar (S. 386 der Ausgabe von Gerbert's Werken durch Olleris) nur von *Victorii opus*, verweist aber später (S. 389) auf *ipsius calculi inspectio*. Ich zweifle also nicht, dass Victorius seinen Tabellen den Namen Calculus gegeben hat, und habe daher diesen in der Ueberschrift gebraucht.

Damit, dass die Stelle *tale calculandi argumentum antiqui commenti sunt* nicht vom Werke des Victorius zu verstehen ist, fällt eine der Stützen, welche Christ (S. 107) dafür beigebracht hat, dass Victorius ein weit älteres Rechenbuch copirte, dessen Grundzüge wenigstens bis in das II. Jahrhundert nach Chr. hinaufreichen. Es hat eine solche Copirung an sich schon etwas Bedenkliches, weil doch bei einem Rechenknecht die Bedürfnisse der eigenen Zeit und die in derselben gebrauchten Namen in erster Linie zu beachten sind. Dazu sind die Tabellen des Victorius alle so einfach, dass sich Grundzüge derselben nicht unterscheiden lassen von blossen Zuthaten der Ausführung, sondern höchstens eine grössere Ausdehnung als in anderen Werken in Betracht kommen kann. Nun mag es immerhin mehr solche Rechenknechte gegeben haben, aber gross wird die Zahl derselben nicht gewesen sein; denn für die Brüche, welche im

gewöhnlichen Leben vorkommen, war auf dem Abacus mit Knöpfchen genügend gesorgt (s. meine Schrift über die Zahlzeichen u. d. ü. Nr. 32 und 124—127) und wer mehr zu rechnen hatte, wendete statt der Brüche lieber ganze Zahlen an und gab nur das Resultat in Brüchen (s. ebendort Nr. 128—129); dazu kommt, dass man sich die Ergebnisse der Zwischenrechnungen wahrscheinlich in Worten notirte und erst zuletzt Zeichen anwendete. Unzweifelhaft war es nun eine nicht unbedeutende Abkürzung im Rechnen, wenn man Producte häufig vorkommender Zahlen bereits ausgerechnet in Zeichen in einer Tabelle finden konnte, und es ist nicht unwahrscheinlich, dass schon vor Victorius solche Tabellen vorhanden waren; dass aber dieser eine solche copirte und nicht vielmehr selbst nach den Bedürfnissen seiner Zeit ausrechnete, vermag ich nicht anzunehmen. Insbesondere glaube ich eher, dass die Producte der Astheile und Unzentheile von ihm zuerst in Zeichen dargestellt und in eine Tabelle gebracht wurden. Bestimmteres lässt sich bei dem Mangel an Anhaltspunkten nicht sagen.

Doch soll hier sogleich von dem Hauptgrunde gesprochen werden, den Christ (S. 107) für seine Ansicht angegeben hat, nämlich die Zahl der Unzentheile, die Victorius anwendete. Es ist richtig, dass Victorius von den Brüchen, die kleiner als die Uncia sind, nur *semuncia*, *duae sextulae*, *sicilicus*, *sextula*, *dimidia sextula* anwendete, wenn man die Praefatio und die Columnen 1—98 der Tabellen beachtet. Denn die Worte der Praefatio (S. 59 Z. 14—15): *reliquae minutiae*, *quarum congestione dimidium unciae conficitur*, *ut sunt sicilici*, *sextulae et cetera*, beweisen deutlich, dass unter den *cetera* nur die *dimidiae sextulae* noch können gemeint sein, weil *sicilicus* + *sextula* + *dimidia sextula*, d. h. $\frac{1}{48} + \frac{1}{72} + \frac{1}{144} = \frac{6}{144} = \frac{1}{24} =$ *semuncia*, und die Zeichen in den Columnen 1—98 reichen auch nur bis zur *dimidia sextula*. Zwischen Col. 119 und 120 und in Col. 128 und 130 findet sich auch das Zeichen des Scripulus, aber es wird nur bei der Reduction der grösseren Brüche auf Scrupel gebraucht und nicht bei blossen (unbenannten) Zahlausdrücken. Ueberdies ist es noch die Frage, ob auch die weiteren Columnen von 101 an wirklich dem Victorius zuzuschreiben sind. Dass er den Scripulus oder die andere Form Scriptulum kannte, ist ausser Zweifel, da sich nachweisen lässt, dass Varro bereits das Scriptulum als kleinste Bruchzahl kannte (s. Nr. 48 meiner Schrift), und dass Frontinus (ebendort Nr. 51) die Anzahl der Scrupeln in den Zeichen der ganzen Zahlen neben das Zeichen des Scriptulums setzte, stimmt ganz zu dem Gebrauche, der von diesem Zeichen in den genannten Columnen gemacht ist. Sollten also auch diese nicht von Victorius herrühren, so würde dies doch keinen Beleg dafür abgeben, dass Victorius den Scripulus nicht gekannt hätte.

Wenn man also auch noch den Scripulus beizieht, ist noch immer die Behauptung von Christ richtig, dass die alte, echt römische Rechnungsweise bei Victorius vorliegt, insofern man unter Rechnungsweise

die Beiziehung der Bruchzeichen versteht. Ich habe (Nr. 63 m. Schr.) auch von den altrömischen Namen der Bruchtheile gesprochen und dabei nur die Namen für die Brüche, welche kleiner als die Uncia sind, im Auge gehabt. Für diese ist meine Behauptung richtig; aber ich hätte auch die Namen der grösseren Bruchtheile erwähnen sollen und dass für As die Nominativform Assis erscheint. Von dieser hat Christ (S. 104—107) dargethan, dass sie nicht vor dem III. Jahrhundert kann gebräuchlich gewesen sein, vielmehr wahrscheinlich erst nach Constantin aufkam. Es ist aber noch ein zweiter Name in der Praefatio, der hätte hervorgehoben werden sollen, nämlich *Iabus* für 11 Unzen. Ich habe denselben erst in Nr. 89 meiner Schrift bei *Beda* erwähnt, hätte aber beifügen sollen, dass, was bei diesem von den Brüchen sich findet, ganz von Victorius entlehnt ist, sei es nun von ihm selbst oder durch einen Compilator. Woher dieser seltsame Name, für den auch *labus* sich findet, etwa mag entstanden sein, weiss ich nicht zu sagen. Es ist mir wahrscheinlich, dass in dem Worte *Iabus* ein Wort der Volkssprache vorliegt, in der sich neben *undecim* ein Wort befand, das in die Silbe „iab" oder „lab" verstümmelt wurde, wie sich ja auch im Deutschen für 11 und 12 keine Zusammensetzungen mit „zehn", sondern mit dem Stamme „lif" finden nach dem Gothischen „ainlif, tvalif". Stände das Wort *Iabus* nicht in der Praefatio, so würde ich es dem Victorius absprechen und in die Zeit des VII. bis IX. Jahrhunderts versetzen, wohin wohl die Namen gehören, die in der Col. 128 stehen. Denn zu *distas*, *bisse*, *septus*, *treas*, *sescle* passt auch *iabus* oder *labus*, wie es dort heisst. Man könnte auch daran denken, dass *iabus* erst durch Abschreiber in die Praefatio kam, indem einer derselben oder ein Glossator über *deunx* das im Volksmunde gebräuchliche *Iabus* schrieb, das ein anderer in den Text selbst aufnahm. Allein da auch die Form *assis* sich findet und *bissem* für *bessem* in den Handschriften überliefert ist, und in diesen auch *sextas*, *dodras*, *quadras* für *sextans* u. s. w. vorkommt, welche Formen freilich alle durch die Abschreiber erst hineingekommen sein können, so halte ich es nicht für unmöglich, dass Victorius nicht vollständig die Namen der klassischen Zeit gebrauchte, sondern den Dialect seiner Zeit und Umgebung gelten liess. Es stimmt dazu, dass auch die Zeichen damals nach aller Wahrscheinlichkeit ihre Vereinfachung erfuhren. Ist dem aber so, dann wird man auch von dieser Seite her nicht sagen können, dass Victorius ein älteres Rechenbuch copirte, sondern er schrieb selbstständig seiner Zeit gemäss.

Daraus, dass er die Namen *duella*, *drachma*, *hemisescla*, *tremissis*, welche im *liber de asse*, und *obolus*, *siliqua*, *dragma* oder *olce*, welche im *carmen de ponderibus* sich finden, nicht erwähnt und auch die Brüche $\frac{1}{96}$, $\frac{1}{576}$, $\frac{1}{1152}$, $\frac{1}{1728}$, $\frac{1}{2304}$ nicht in seinen Calculus aufnahm, könnte man auf eine späte Zeit der Abfassung der ebengenannten Schriften schliessen. Allein man kann ganz gut bei der Zeitbestimmung bleiben, die Hultsch

für diese Schriften gegeben hat, und leicht einsehen, warum Victorius davon keine Notiz nahm, auch wenn er diese Schriften kannte, was nicht eben wahrscheinlich ist. Sie geben nämlich nur Namen, keine Zeichen, und die Zeichen, welche sich später finden (s. Nr. 88 m. Schr.) sind durchaus nicht der Art, dass man zur Annahme berechtigt wäre, sie wären schon früher bei Rechnungen geschrieben worden. Es hat also Victorius, der seinen Calculus in Zeichen darstellte, nichts weggelassen, was man in seiner Zeit in Zeichen darstellen konnte, und ging also nicht blos auf ein älteres Rechenbuch wieder zurück. So scheint es mir wenigstens.

Es ist aber nun noch zu erwägen, wie viele von den vorliegenden Tabellen wirklich dem Victorius zuzuschreiben sind. Ueber die Columnen 1—98 kann kein Zweifel sein. Der Schluss der Praefatio (S. 59 Z. 17—S. 60 Z. 2) beschreibt dieselben so deutlich, dass Niemand Bedenken tragen wird, diese Columnen und die Praefatio ein und demselben Verfasser zuzuschreiben. Es sind Tabellen von Producten aus *dimidia sextula* u. d. ü. bis *mille* in 2, 3 u. s. w. bis 50, die man bei der Multiplication wie bei der Division gebrauchen konnte, aber bei letzterer nicht so, wie es Christ (S. 110) anzudeuten scheint, dass man nämlich links den Dividenden, rechts den Quotienten ablas, sondern man suchte in der Tabelle zu dem vorliegenden Dividenden das nächstkommende Vielfache des Divisors, also ein Product aus demselben, und zog dieses vom Dividenden ab, wobei allerdings das, was wir jetzt die Ganzen des Quotienten nennen, zur linken Hand stehen oder auch in dem Multiplicator der ganzen Columne enthalten sein konnte. Aber während man von frühester Zeit an das Einmaleins lernen und die Knaben 2 mal 2 ist 4, 2 mal 3 ist 6 u. s. w. sagen liess, sagte man nicht 2 in 4 2mal, 2 in 6 3mal, sondern man sagte: die Hälfte von 4 ist 2, ein Drittel von 6 ist 2, und ob auch nur dieses in einer geordneten Aufeinanderfolge, darüber haben wir keine Andeutung (s. Nr. 127, 135, 139 meiner Schrift).

Dass, wer viel mit Brüchen zu rechnen hatte, für solche Tabellen höchst dankbar sein musste, wenn sie verlässig geschrieben waren, wird Jedem deutlich sein, der sich das Rechnen der damaligen Zeit vergegenwärtigt. Allein, wie ist es mit der Verlässigkeit bestellt? Die lange Liste der Versehen von S. 60—67 zeigt, dass die in den Handschriften enthaltenen Calculi durchaus nicht so sorgfältig geschrieben sind, dass sie bei den Rechnungen hätten benützt werden können. In B_1 ist in der 95. Columne in Zeile 13 eine Zahl ausgelassen und alle folgenden sind daher um eine Stelle höher geschrieben worden, als sie stehen sollten; der Schreiber von B_2 scheint B_1 meist einfach copirt und erst bei einer Revision die fehlende Zahl ergänzt zu haben, wenn nicht ein Anderer der Corrector gewesen ist. Aber noch ein weiterer Umstand darf nicht unbeachtet bleiben. In Col. 35 Z. 45 hat B_1 $\frac{19}{144}$ ausgedrückt durch $\frac{1}{12}\,\frac{1}{48}\,\frac{2}{72}$, B_2 aber durch $\frac{1\frac{1}{2}}{12}\,\frac{1}{144}$, in

Col. 45 Z. 42 haben B_1 und B_2 $\frac{24}{36} = \frac{8}{12}$ ausgedrückt durch $\frac{7}{12}\,\frac{1}{12}$, in Col. 47 Z. 45 hat B_1 $\frac{25}{144} = \frac{2}{12}\,\frac{1}{144}$ ausgedrückt durch $\frac{1\frac{1}{2}}{12}\,\frac{2}{72}\,\frac{1}{48}$. Es ergiebt sich daraus, dass die Abschreiber nicht an allen Stellen nur abschrieben, sondern zum Theil auch dabei rechneten und die Ausdrucksweise, die ihnen dabei näher lag, in die Tabelle einschrieben, unbekümmert um das vorliegende Original. Wir sind also nicht ganz sicher, dass alle Formen so gegeben sind, wie sie von Victorius ausgingen, wozu auch noch gehört, dass 90 bis zur 54. Columne mit LXL gegeben ist, in der 55. aber und in den folgenden immer häufiger mit XC. Doch sind diese Differenzen vereinzelte und unwesentliche. In der Hauptsache liegt die Arbeit des Victorius uns auch der äusseren Form nach vor, und es besteht kein Grund, an der Echtheit der Col. 1—98 zu rütteln.

Anders steht die Sache bei den folgenden Columnen. Am Schluss der Praefatio heisst es nämlich: *et sic usque ad finem;* die Tabellen aber sind mit den Producten mit 50 nicht zu Ende, sondern es folgt noch eine ziemliche Anzahl von solchen, ohne dass auch nur die geringste Andeutung in der Praefatio davon sich fände. So lange ich nur wusste, was Abbo und Bernelinus von dem Calculus des Victorius enthalten, kam mir kein Bedenken über die Echtheit dieser Fortsetzungen und auch Christ (S. 108) war darüber unbedenklich. Seitdem ich aber den Zustand der Handschriften selbst einsehen konnte, kam mir vielmehr die Ueberzeugung, dass der ursprüngliche Calculus des Victorius nur die Productentafel in den Columnen 1—98 umfasste und dass das Schweigen über die anderen Tabellen in der Praefatio nicht ein zufälliges ist, sondern davon herrührt, dass der Calculus keine weitere Ausdehnung hatte und die Zeichen für $50 \cdot \frac{1}{144}$ wirklich am Ende der Arbeit standen.

Hätte nämlich Victorius selbst seine Arbeit weiter ausgedehnt, so würde er, wie der ersten Tabelle, so auch den folgenden einleitende Worte vorausgeschickt haben. Aber von solchen findet sich nicht nur nichts, sondern die Handschriften lassen auch die Columnen 99 und 100 leer. Man könnte freilich sagen, dass eben der Raum auf dem Pergament für die folgende Tabelle nicht bequem zu benützen war, dass man mit der neuen Tabelle überhaupt lieber ein neues Blatt begann und dass sie wegen ihrer Einfachheit keiner Einleitung bedurfte, aber das Folgende enthält in Col. 104 bis 106 Z. 1—12 und in Col. 119 und 120 Z. 1—35 zwei Tabellen, die ganz gut in Col. 99 und 100 hätten untergebracht werden können, und ein anderer Theil der Tabellen ist keineswegs auf den ersten Blick schon seiner Bedeutung nach vollständig so klar, dass eine Einleitung überflüssig gewesen wäre.

Weitere Gründe giebt der Inhalt der Tabellen an die Hand. Es sei zunächst eine Uebersicht desselben gegeben.

1. Col. 101—103 Z. 1—56 enthalten Additionen von 9+9, 9+8 u. s. w. bis 1+1 und hierauf die 2 Summanden von Astheilen, welche 1 As ausmachen.
2. Col. 104—106 Z. 1—12 enthalten die Zeichen für 1, 2 u. s. w. bis 12 Unzen.
3. Col. 104—106 Z. 15—60 und Col. 107—109 Z. 1—20 enthalten Subtractionen der 9 Hunderter von 1000, der 9 Zehner von 100, der 9 Einer von 10, der Bruchtheile, für welche es Zeichen gab, von $\frac{1}{24}$ an immer um $\frac{1}{24}$ zunehmend bis $\frac{11}{12}\,\frac{1}{24}$ von 1, endlich der Bruchtheile der Uncia von $\frac{1}{12}$ Uncia an, immer um $\frac{1}{12}$ Uncia zunehmend bis $\frac{11}{12}$ Uncia von 1 Uncia.
4. Col. 107—109 Z. 22—59 und Col. 110—118 enthalten Additionen von 900+900, 900+800 u. s. w. bis 100+100, 90+90, 90+80 u. s. w. bis 10+10; hierauf von $\frac{11}{12}+\frac{11}{12}$, $\frac{11}{12}+\frac{10}{12}$ u. s. w. bis $\frac{1}{24}+\frac{1}{24}$.
5. Col. 119—120 Z. 1—35 enthalten die Zeichen für 2, 4, 6 u. s. w. *scripuli* bis 24, dann von 36, 48 u. s. w. bis 300 *scripuli.*
6. Col. 119—120 Z. 37—52 und Col. 121 u. 122 Z. 1—34 enthalten die Producte (Quadrate) von 1, 2 u. s. w. bis 50 in sich selbst.
7. Col. 121—122 Z. 36—52 und Col. 123—124 Z. 1—48 enthalten dieselben Producte von $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{3}{4}$; 2, $2\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{4}$ u. s. w. bis 14.
8. Col. 125—127 Z. 1—46 und Col. 128—130 Z. 1—4 geben an, der wievielste Theil *dimidia sextula*, *sextula*, *sicilicus*, *duae sextulae*, *semuncia* und von dieser an die je um $\frac{1}{4}$ Uncia grösseren Brüche bis *deunx semuncia sicilicus* (d. h. $11\frac{3}{4}$ Unzen) von 1 As ist, oder von soviel As, dass der Theil durch eine ganze Zahl ausgedrückt werden kann, so z. B. $4\frac{1}{4}$ Uncia der 48. Theil von 17 Asses oder $4\frac{1}{4}$ Uncia $= \frac{1}{48}$ As . 17.
9. Col. 128—130 Z. 6—24 enthalten die Zeichen des As und seiner Theile von *labus* bis *sescuncia* in *unciae* und *scripuli* ausgedrückt, die der Uncia bis *dimidia sescle* in *scripuli* und endlich das Zeichen des Scripulus.

Dass hier eine planmässige Ordnung nicht vorliegt, ergiebt sich sofort. Um eine solche herzustellen, müsste man die Trennung der Additionen 1 und 4 durch eine Verlegung eines Blattes in der Handschrift erklären, von welcher B_1 und B_2 Abschriften sein könnten, ferner 2, 5 und 9 durch gelegene Beifügung an einer bestimmten Stelle auf dem Pergament, während sie ursprünglich am Anfang oder am Schluss standen. Es würden bei ersterer Annahme auf die Werthangaben für die Zeichen (2, 5, 9) die Additionen (1, 4) folgen, auf diese die Subtractionen (3), dann die Producte von Zahlen in sich selbst (6, 7), endlich die Theile (8). Allein diese Ordnung wäre eine künstlich hergestellte; die Handschriften führen vielmehr zur Annahme, dass man an den Calculus des Victorius andere wünschenswerthe Tabellen zu verschiedenen Zeiten anfügte, die Vic-

torius nicht zum Verfasser haben. Wie sollte auch dieser nach seinen Productentafeln erst die Werthe der gebrauchten Zeichen angeben und Additionen und Subtractionen der einfachsten Art?

Die Tabelle der Quadrate und der Theile von 1 As oder mehreren könnte allerdings von ihm herrühren; aber er würde sie wohl nicht ohne Erklärung und gleich nach der Productentafel angereiht haben. In der That findet sich am Schluss der 7. Tabelle die Erklärung, welche S. 67 mitgetheilt ist. Die früher nur unvollständig bekannten Theile derselben suchte ich in der Zeitschrift f. Math. u. Physik IX, S. 318, und in meiner Schrift über die Zahlzeichen u. d. ü. in Nr. 132 und im Anhang in Nr. 2 zu erklären, aber ich finde nun, dass es eine überflüssige Arbeit war, Sinn da zu suchen, wo die oberflächlichste Bemerkung nur angebracht ist ohne Verständniss der Sache. Was in dem ersten Satze und dann in den mit *secundo* und *tertio* beginnenden Sätzen gesagt ist, gilt von Col. 121 und 122 Zeile 36—38. Mit *secundus trames* ist Col. 122 gemeint; in dieser steht in Zeile 36 *totus prior numerus*, nämlich $1\frac{1}{4}$ der Col. 121, und dann *eius quarta pars*, und zwar jeder Theil für sich, ferner in Zeile 37 *totus prior numerus*, nämlich $1\frac{1}{2}$, und dann *duae quartae partes eius*, aber nicht mehr einzeln, sondern zu $2\frac{1}{4}$ zusammengefasst, so dass ungewiss ist, ob die erhaltene Tabelle die ursprünglich gebrauchten Zeichen enthält, endlich in Z. 38 *totus prior numerus*, nämlich $1\frac{3}{4}$, und *ter quarta pars eius*, gleichfalls in Zusammenfassung in $3\frac{1}{24}\frac{1}{48}$. Obwohl nun von $2\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{4}$, $3\frac{1}{4}$ u. s. w. kein Wort gesagt ist, wird gleichwohl weitergefahren: *Quotquot ergo asses ... praecesserint*, und doch ist nichts Anderes gesagt, als dass mit den Ganzen, die vor $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ stehen, diese Brüche verbunden werden, womit nichts erklärt ist. Endlich heisst es: *usque* [*ad*] XII (= *duodenarii*?) *locum*, *in quo* XII} ... *geminatur*, als ob die Tabelle nur bis $12\frac{1}{4}$ reichte, während sie doch bis XIIII ausgedehnt ist. Es erweist sich also die ganze Stelle als ein müssiger Zusatz eines mit der Sache nicht Vertrauten in einer Handschrift, welche die Tabelle der Quadrate nur von $1\frac{1}{4}$ bis $12\frac{1}{4}$ enthielt. Dieser Zusatz ging auch in andere Abschriften über und Abbo hat ihn für Worte des Victorius selbst genommen, was bei ihm nicht Wunder nehmen darf, da er auch die Anhänge, welche nach der 130. Columne noch in den Handschriften stehen, für echte Werke des Victorius nahm.

Der erste derselben steht S. 69—S. 70 Z. 17 und ist offenbar eine Wiederholung der Col. 1 und 2, aber in Worten nach Anleitung der Praefatio S. 59 Z. 23—S. 60 Z. 2. Selbst Abbo sind die gebrauchten Ausdrücke zu barbarisch und er bemerkt, dass *nec graeca nec latina facundia* sie kennt. Statt aber daraus zu schliessen, dass diese Worte nicht von Victorius herrühren können, ersinnt er sich selbst folgenden Grund: *Creditur tamen ob id esse factum, ne imbuendi magis intendant vocabulis quam vocabulorum figuris*, als ob man bei dem Auswendiglernen des Einmaleins Zeichen lernte. Christ schiebt (S. 109) die barbarischen Worte einem deutschen Kloster

zu, aber offenbar verführt durch die Worte: *bis quinquai id est cean*, die er für 2 . 5 = 10 genommen zu haben scheint, weil er *cean* mit dem altdeutschen „zehan" in Verbindung bringt. Diese Worte lauten aber vollständig: *bis quinquageni id est centeni* und *cean* ist eine Erweiterung von *cen*, welches die Abkürzung von *centeni* ist, wie aus der vollständigen Tabelle nun erhellt. *Ageni* ist verkürzt in *ai* und *teni* wird ganz abgeworfen. Die Endung *us* in Zeile 24—27 auf Seite 69 ist die Verkürzung von *ussis*. Hand in Hand mit diesem barbarischen Verfahren mit den Worten gehen noch andere Willkürlichkeiten, die sich leicht aus dem Mitgetheilten entnehmen lassen. Welches Land sich die Ehre solcher Sprechweise beilegen darf, weiss ich nicht zu sagen; nur soviel sehe ich, dass für Deutschland incl. der Schweiz nichts mehr spricht, als für Frankreich oder Italien oder England, dass vielmehr eher ein Land anzunehmen ist, in welchem das Lateinische auch ins Volk drang, wie in Frankreich. Freilich reicht auch schon der Einfluss der Schule, in welcher die Tabellen herzusagen waren, vollständig aus, die Verstümmelung der Wörter zu erklären. Christ (S. 108 Anm. 12) macht mit Recht darauf aufmerksam unter Verweisung auf Beda's Schrift *de argumentis lunae*. In der Münchener Handschrift 14689 findet sich Fol. 70[b] im Anschluss an einen Abschnitt über die Namen und Zeichen der *unciae*, welcher die Ueberschrift „*Verba Bedae*" hat, folgende Stelle: *Haec inquam ponderum vocabula vel caracteres non modo ad pecuniam mensurandam, verum ad quaevis corpora sive tempora dimetienda conveniunt. Unde et ratio vel mos obtinuit, ut in cantione computorum pueri I et II saepius asse et dipondio mutent, item tressis, quartus, quinquis, sexis, septus et cetera huiusmodi quasi tres asses, quatuor asses proferant, et in eundem modum sequentia numerorum quam plurima.* Es stehen mir Beda's Werke leider nicht zu Gebote, um nachzusehen, ob und welchem Werke Beda's diese Stelle entnommen ist. Der Schluss derselben: *Sic et cetera, quae verbo melius colloquentis quam scribentis stilo disci pariter et doceri queant*, wird von Bernelinus mit dem Beisatz *ut ait quidam* citirt. Er wusste also nichts von der Autorschaft Beda's oder erinnerte sich derselben nur im Augenblick nicht.

Es folgt nun weiter eine *Explanatio extremae partis calculi*, die Abbo (Christ S. 140) eine *obscura brevitas alterius expositionis* nennt. Sie ist auch im Einzelnen nicht zu verstehen. Doch ist etwa Folgendes der Sinn: Die erste Zeile der Col. 125—127 giebt Anlass, über die Form des Aszeichens zu sprechen, die eigentlich ein .I. wie bei dem Zeichen der Einheit ist, aber zuweilen auch durchstrichen erscheint, um sie nicht wiederholt anschreiben zu müssen(?). Dann wird jene erste Zeile selbst wiederholt; aber statt sie zu erklären, werden die Zeichen genannt, bei welchen die Multiplication auch nur 1 As giebt; man vergleiche Col. 125, Z. 1—7, 9, 11, 15, 19, 27. Von den übrigen Zeilen endlich wird erwähnt, dass das Product der in der 125. und 126. Columne stehenden Ausdrücke so viele As giebt, als in

der 127. Columne genannt sind, unter Wiederholung von Col. 125, Z. 8, 10, 23, und Col. 128 Z. 4.

Wir dürfen es Abbo nicht verdenken, dass er sich in dieser Explanatio nicht zurecht fand, ebenso wenig als bei der endlich noch folgenden (S. 71 bis 72), welche die Ueberschrift trägt: *Item alia explanatio prioris partis*, und welche wieder auf die Quadrate zurückkommt. Abbo (Christ S. 139) nennt sie eine *explanatio satis habens obscuritatis* und lässt sich gleichfalls auf sie nicht ein. Bernelinus, bei dem ich Auskunft darüber suchte, führte mich auf eine Regel, die man wirklich eine Explanatio hätte nennen können (s. Zeitschr. f. Math. u. Phys. IX, S. 319). Allein auch hier erfahre ich, dass ich zuviel Sinn in den Worten suchte, die Abbo andeutete. Die nunmehr vorliegende *alia explanatio* besteht in nichts Anderem, als einer Probe der gefundenen Quadrate durch Theilung derselben mit der Grundzahl in der bei den Alten gebräuchlichen Weise der Division. $1\frac{1}{4}$ mit sich multiplicirt giebt $1\frac{1}{2}\frac{1}{24}\frac{1}{48}$. Es wird nun davon zuerst $1\frac{1}{4}$ weggenommen, und es bleibt $\frac{1}{4}\frac{1}{24}\frac{1}{48}$; dann wird $\frac{1}{4}$ von $1 = \frac{1}{4}$ und endlich $\frac{1}{4}$ von $\frac{1}{4} = \frac{1}{24}\frac{1}{48}$ weggenommen, wodurch Alles weggebracht ist. Ebenso wird mit den Quadraten von $1\frac{1}{2}$ und $1\frac{3}{4}$ verfahren. Das Quadrat von 2 wird nur erwähnt, aber als an vierter Stelle stehend, so dass also der Verfasser dieser Explanatio eine andere Vertheilung der Zeilen vor sich hatte, als die Mss. B_1 und B_2 geben. Von dem Quadrat von $2\frac{1}{4}$ wird zuerst das Doppelte von 2 und von $\frac{1}{4}$ weggenommen, dann $\frac{1}{4}$ von 2 und von $\frac{1}{4}$. Ebenso wird bei den Quadraten von $2\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{4}$ verfahren. Endlich wird das Quadrat von 3 erwähnt und dann alles Weitere bereits für verständlich erklärt.

Dass derartige Zusätze für Victorius nicht passen, dürfte einleuchtend sein. Ob sie dem VII. Jahrhundert angehören oder einem späteren, vermag ich nicht zu entscheiden. Im X. Jahrhundert hat sie Abbo bereits so mit dem Calculus des Victorius verbunden gefunden, dass er sie nicht davon zu unterscheiden vermochte. Weil nun aber die drei Erklärungen, welche sich im zweiten Theile der Tabellen finden, nicht von Victorius herrühren, kann ich auch die Tabellen selbst nicht als von ihm herrührend ansehen, um so weniger, als sie nach anderen Tabellen erst angefügt sind, die auch ein schwacher Rechner leicht im Kopfe behalten kann. Dadurch verlieren aber diese Tabellen nicht ganz ihren Werth, sondern sind als Ueberreste dessen, wovon es vom VII. bis zum X. Jahrhundert für nöthig erachtet wurde, es in Tabellenform darzustellen, immerhin der Beachtung werth. Es wird deshalb auch nicht unpassend sein, was Bernelinus und die von mir in der Münchner Handschrift 14639 gefundenen Schriften in dieser Beziehung bieten, in Kürze hier zu erwähnen.

Das 4. Buch des Bernelinus handelt von den Minutien, und zwar, wie ausdrücklich bemerkt wird, mit Benützung des Werkes des Victorius, *qui, dum brevis studuit fieri, factus est obscurissimus.* Zunächst giebt Berne-

:linus im Wesentlichen dasselbe, was in der Praefatio des Victorius von S. 58 Z. 1 — S. 59 Z. 13 enthalten ist, aber neben dem Nominativ *assis* wird auch *as* genannt und bemerkt, dass es bei den Gewichten *libra* heisst. Zwischen *sextula* und *emisescla* (*dimidia sextula*) wird *dragma* zu 3 *scripuli* eingeschaltet und nach dem *scripulus* noch angereiht: *obolus* = 4 *calci* oder 3 *siliquae*, *ceratis* = 2 *calci* oder 1½ *siliqua*, dann *siliqua* und *calcus*. Wie bei Victorius (S. 59 Z. 15) wird dann auf den Calculus selbst verwiesen, dieser aber, d. h. die Col. 1—98, nicht mitgetheilt, so dass also der Besitz des Calculus des Victorius vorausgesetzt erscheint. Dagegen wird die Tabelle angeführt, welche in den Col. 119 und 120 Z. 1—35 steht, aber noch dadurch erweitert, dass für die Theile der *uncia* die Zahlen der *calci* angegeben werden, die darauf treffen. Hieran reiht sich die Behandlung der Producte der *unciae* und *minutiae*, d. h. der damals gebräuchlichen Brüche, die kleiner als ein *as* und kleiner als eine *uncia* sind, in sich und andere *unciae* und *minutiae*. Davon enthält aber der Calculus des Victorius auch mit den Anhängen nichts und es werden vielleicht deshalb Regeln dafür aufgestellt. Die erste lautet: *Quaelibet unciarum vel minutiarum fuerit ducta*, *totam* (d. h. den sovielten) *partem illius*, *in quam ducitur*, *quaeret*, *quota ipsa est assis.* Als Beispiele werden angeführt: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, dann $\frac{11}{12} \cdot \frac{11}{12} = \frac{10}{12} \frac{1}{144}$. Dieses Ergebniss wird durch Division von 24 in 242 gefunden, von dem bemerkt ist, dass es sich zu 264 verhält, wie 264 zu 288. Man suchte also zunächst die Zahl, welche der Proportion entspricht: $x : 264 = 264 : 288$, und zwar ist das zweite und dritte Glied der Proportion deshalb 264, weil 1 *deunx* = 264 *scripuli*, das vierte Glied ist 288, weil 1 *as* = 288 *scripuli.* Diese Zahl x gab dann die Zahl der *scripuli* des Productes und diese brachte man durch Division mit 24 auf *unciae*, wobei der Rest die kleineren Minutien finden liess. Denn 24 ist in 242 10mal enthalten und so hat man den *dextans* ($\frac{10}{12}$), und der Rest 2 giebt 2 *scripuli* oder 1 *emisescla* ($\frac{1}{144}$). Aehnlich wird bei dem 3. Beispiele verfahren: $\frac{11}{12} \cdot \frac{10}{12} = \frac{9}{12} \frac{1}{72}$. Denn die Proportion 288 (*as*) : 264 (*deunx*) = 240 (*dextans*) : x giebt für x die Zahl 220, und diese mit 24 getheilt, 9 *unciae* und 4 *scripuli* oder die *sextula.* Als weitere Beispiele sind gegeben: $\frac{1}{24} \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{576}$ (*obolus*), $\frac{1}{24} \cdot \frac{7}{12} = \frac{1}{24} \cdot \frac{4}{12} + \frac{1}{24} \cdot \frac{3}{12} = \frac{1}{72} \frac{1}{96}$ (*sextula et dragma*) oder $= \frac{1}{48} \frac{1}{288}$ (*sicilicus et scripulus*), $\frac{1}{36} \cdot \frac{4}{12} = \frac{1}{144} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{144}$ (*emisescla et emisesclae tertia*). Wo also die vorhandenen Namen nicht ausreichten, da wendete man Zahlwörter an.

Die zweite Regel (*alia fortassis regula facilior unciarum tantummodo*) lautet: *Si quaeratur*, *quid sit quaeque uncia in se vel in aliam ducta, multiplicetur numerus unciarum in se vel inter se. Et quot duodenarii illa multiplicatione concreverint*, *tot unciae resolutoriae erunt;* z. B. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$, $6 . 6 = 36$, $36 : 12 = 3$, also *quadrans;* $\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{12}$, $6 . 7 = 42$, 12 in 42 3mal, Rest 6, also erhält man zunächst *quadrans*, Der Rest giebt 12 *semiunciae* und diese mit 12 dividirt 1 *semiuncia*, also $\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{12} = \frac{3}{12} \frac{1}{24}$.

Die beiden Regeln unterscheiden sich also dadurch, dass man, um die Rechnung mit Brüchen in eine Rechnung mit ganzen Zahlen umzuwandeln, bei der ersten eine Reduction auf *scripuli*, bei der zweiten auf *unciae* vornahm, und bei ersterer die Form der Proportion beizog, bei letzterer nicht.

Nach diesen Regeln folgte die Tabelle der Producte der *unciae* und *minutiae* in sich und die anderen, die zwar im Münchner Codex fehlt, aber von Olleris in seiner Ausgabe der Werke Gerbert's auf S. 393 bis 396 aus besseren handschriftlichen Quellen gegeben ist. Diese Tabelle, die ich früher als zum Calculus des Victorius gehörig betrachtete, rührt, wie es scheint, von Bernelinus her, da dieser bei seiner Arbeit keine anderen Hilfsmittel gehabt zu haben behauptet, als den Calculus des Victorius, der aber diese Tabelle nicht enthält. Hat Bernelinus jedes Product nach einer der Regeln ausgerechnet, dann hat er sicher eine geraume Zeit dazu gebraucht.

Endlich wird noch Antwort gegeben auf die Frage: *quota pars assis existat quaelibet minutia.* Der Schluss des Werkes des Bernelinus behandelt die Multiplication und Division der Minutien mit Anwendung von Columnen, wovon ich in meiner Schrift von den Zahlzeichen etc., Nr. 169 bis 171 das Nähere angegeben habe.

Es hat also Bernelinus nur die Praefatio des Victorius und die fünfte Tabelle des Anhangs in sein Werk mit eingeflochten, die übrigen Tabellen desselben aber weggelassen und dafür andere gegeben, die für seine Zeit ihm nothwendig erscheinen mochten. Da er sich aber über die dunkle Kürze des Victorius beklagt, so ist zu vermuthen, dass er ein Exemplar mit den oben erwähnten, allerdings kaum verständlichen Erklärungen vor sich hatte und dass auch er dem Victorius beilegte, was einer viel späteren Zeit angehörte.

Die Schrift, welche im *cod. monac.* 14689, *fol.* 64^a—68^b steht, die ich in der Zeitschr. f. Math. u. Phys. X, S. 242, mit A_1 bezeichnete und die Olleris in der Ausgabe der Werke Gerbert's S. 333—345 abdruckte, giebt zuerst die Namen der Astheile, dann in Worten ausgedrückt die Producte der *unciae* in sich und dann eben dieser *unciae* in die anderen *unciae*. Hieran reiht sich folgende *universalis regula: Omne quod sub unitate locatur, sive in numerum quemlibet, sive in aliquid illorum, quae sub unitate sunt, ducatur, non multiplicationem exposcit sed totam* (d. h. den sovielsten) *partem illius, in quem ducitur, quota pars ipsum assis existit;* z. B. *uncia* in 24, *uncia* $= \frac{1}{12}$ *as*, also $\frac{1}{12}.24 = 2$. Solche Beispiele werden noch mehrere gegeben und man erkennt darin die erste Regel des Bernelinus, aber sie ist bereits auch auf Producte von Astheilen und ganzen Zahlen ausgedehnt. Hieran reiht sich auch die zweite Regel des Bernelinus als *alia regula numeros tantum comparandi ad uncias*, und gleichfalls in Ausdehnung auf ganze Zahlen, z. B. *quadranti octonarius comparetur*, d. h. $\frac{1}{4}.8$. Die Ausführung lautet: *quadrans* = 3 *unciae*, 3.8 = 24, 12 in 24 2mal, also Resulat: 2 *asses*. Oder

octonarius trienti, d. h. $8.\frac{1}{3}$; *triens* = 4 *unciae*, $4.8 = 32$, 12 in 32 2 mal, Rest 8; also Ergebniss: 2 *asses bisse*.

Ganz in derselben Weise werden hierauf die *minutiae* behandelt, d. h. die Brüche, welche kleiner als $\frac{1}{12}$ sind. Auch hiervon werden in Worten die Producte der *minutiae* in sich und die anderen *minutiae* und in die *unciae* angegeben und dann die beiden Regeln angewendet, aber die zweite mit Reduction auf *scripuli* und daher Division mit 288. Bemerkenswerth ist, dass die ausgerechneten Producte nur für die *minus capaces* und *minus periti* mitgetheilt werden, also bald nach Bernelinus — denn nach diesem scheint mir die besprochene Schrift anzusetzen zu sein (s. Zeitschr. f. Math. u. Phys. X, S. 276 und 277) — das elementare Rechnen solche Fortschritte machte, dass die Multiplicationstabellen für überflüssig gehalten wurden. Dazu stimmt, dass Victorius nicht erwähnt und sein Calculus, der nur die Producte von ganzen Zahlen in ganze Zahlen und die Brüche bis zur *dimidia sextula* umfasste, nicht zu Hilfe genommen wird.

Dagegen finden sich in derselben Handschrift unmittelbar an den Schluss von A_1 angeschrieben die Anweisungen über die Quadrirungen von Summen aus Ganzen und Brüchen, welche ich in der Zeitschr. f. Math. u. Phys. IX, S. 318, anführte (Olleris giebt sie zum Theil S. 345 und 346) und welche an Col. 121—124 in den Anhängen am Calculus des Victorius erinnern. Man könnte sogar in dem Anfange derselben die Quelle sehen, aus der die Stelle S. 67: „*Quotquot ergo asses ... praecesserint, eodem numero ... geminantur*" genommen ist. Es heisst nämlich dort am Anfang: *Quotlibet asses praecesserint quamlibet de minutiis unciarum, duplo multiplicentur ipsae minutiae, deinceps unius tantum minutiae minutia iungatur, ad ultimum numerositas assium in se, quae minutias praecedit.* Also wenn a die *asses*, m die *minutia* bezeichnet, so hat man $(a+m)(a+m) = 2a.m + m.m + a.a$. Hieran reihen sich noch andere Anweisungen, die sich kurz darstellen lassen durch

$$(a+m)(a+m) = a(a+m) + m(a+m),$$
$$(a+\tfrac{1}{4})(a+\tfrac{1}{4}) = (\tfrac{1}{4}.\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}a) + (a.a + \tfrac{1}{4}a),$$
$$(a+\tfrac{2}{4})(a+\tfrac{2}{4}) = (a.a + \tfrac{1}{2}a) + (\tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}a),$$
$$(a+\tfrac{3}{4})(a+\tfrac{3}{4}) = [a.a + (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4})a] + [\tfrac{3}{4}.\tfrac{3}{4} + (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4})a],$$
$$(a+\tfrac{1}{3})(a+\tfrac{1}{3}) = (\tfrac{1}{3}.\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}a) + (a.a + \tfrac{1}{3}a)$$
$$= a.\tfrac{1}{3} + a.\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}.\tfrac{1}{3} + a.a.$$

Dabei befinden sich in Tabellenform die Andeutungen der Multiplicationen von $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{4}$, $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{4}$, $4\frac{1}{2}$, $1\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{3}$, $2\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{3}$, $3\frac{3}{4}$, $3\frac{1}{3}$, $4\frac{3}{4}$, $4\frac{1}{3}$ in sich selbst und die ausgerechneten Quadrate von 1, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{3}{4}$, 2, $2\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{4}$, 3 zugleich unter Beifügung der Zahl der *scripuli*, welche das Quadrat enthält. Es mag dieser Abschnitt etwas älter sein als A_1, aber er weist gleichfalls auf eine Zeit hin, in der bestimmte Regeln die Tabellen überflüssig machten, die vom V. bis X. Jahrhundert in Gebrauch gewesen zu sein scheinen, dann aber den verbesserten Methoden weichen mussten. An den Calculus des Victorius scheinen allmälig Anhängsel

gemacht worden zu sein; die Tabellen der Quadrate und Producte der *unciae* und *minutiae* wurden dagegen wahrscheinlich selbstständig aufgestellt.

Doch ich kehre nun zum Schluss des im Nachstehenden mitgetheilten Textes zurück. Was auf S. 72 flgg. sich findet, hat Abbo entweder nicht in seiner Handschrift des Calculus des Victorius gefunden oder auch selbst nicht mehr zu diesem Calculus gerechnet, weil er von der letzten Explanatio sagt, dass sie *in fine calculi* sich befinde. Er redet zwar selbst noch von Massen und Gewichten, aber was er angiebt, stimmt nicht zu dem, was in B_1 und B_2 sich findet. Wieviel Werth Letzteres hat, mögen Diejenigen entscheiden, welche eingehendere Studien über die alten Masse gemacht haben. Ich habe möglichst getreu wiedergegeben, was ich in der Abschrift Wölfflin's und der Collation Halm's fand. Jedenfalls liegt ein neuer Beleg vor, wie es mit dem Wissen um das X. und XI. Jahrhundert bestellt war.

Der Calculus des Victorius.

Unitas illa, unde omnis numerorum multitudo procedit, quae proprie ad arithmeticam disciplinam pertinet, quia vere simplex est et nulla partium congregatione subsistit, nullam utique recipit sectionem.

De ceteris vero rebus licet aliquid tale sit ut propter integritatem ac
5 soliditatem suam unitatis meruerit vocabulo nuncupari, tamen quia compositum est divisioni necessario subiacebit. Nihil enim in tota rerum natura praeter memoratam numerorum unitatem tam unum inveniri potest, quod nulla omnino valeat divisione distribui. Quod ideo fit, quia non simplicitate sed compositione subsistit. Dicitur enim unus homo, unus equus, unus dies,
10 una hora, unus nummus ét alia huiusmodi innumerabilia, quae licet unitatis sint sortita vocabulum, tamen pro causae atque rationis necessitate dividuntur. Ad huius divisionis compendium tale calculandi argumentum antiqui commenti sunt, ut omnis dividenda integritas rationabili per illud possit partitione secari, sive id corpus sive res incorporea sit, quod dividendum
15 proponitur.

In hoc argumento unitas assis vocatur. Cuius partes iuxta proportionalitatem suam propriis sunt insignitae vocabulis, notis etiam ad hoc ex-

---

Vor 1) INCIPIT PRAEFATIO DE RATIONE CALCULI B_1 B_2.

5) meruit B_1, meru[er]it B_2, die Correctur vielleicht von erster Hand; vocabulo meruerit B_2. || conpositum B_1.

8) non ulla B_2.

10) quae] quia B_1, qu**, corrigirt in que von jüngerer Hand B_2.

12) conpendium B_1.

17) vocabulis. Notis B_1 B_2.

cogitatis, per quas eadem vocabula exprimantur, ut per discretionem nominum et notas nominibus affixas unius cuiusque particulae notis facilius advertatur. Et assis quidem, qui per .I. litteram, sicut in numeris unum scribi solet, exprimitur, .XII. partes habet, quarum si unam ei detraxeris, reliquae undecim partes iabus dicuntur, illa vero quam detraxisti, id est 5 duodecima, uncia vocatur. Si duas sustuleris, decem residuae dextans et quod sustulisti, id est duae, sextans appellatur. At si tres dempseris, novem quae remanserunt dodrans et tres demptae quadrans vocantur. Quod si quattuor tollere velis, octo reliquas bissem et quattuor [sublatas] trientem nominabis. Quinque vero sublatis septem residuas septuncem et quinque 10 sublatas quincuncem placuit appellari. Cum vero per medium fuerit facta divisio, utrumque dimidium senis partibus constans semissem vocitarunt, unciam autem et dimidiam sescunciam, unciaeque dimidium semunciam. Iam reliquae minutiae, quarum congestione dimidium unciae conficitur, ut sunt sicilici, sextulae et cetera, melius ex ipsius calculi inspectione cogno- 15 scuntur.

Incipit autem idem calculus a mille et usque ad quinquaginta milia progreditur; primo per duplicationem, deinde per triplicationem, tum per ceteras multiplicationes incrementa capiens tanta numerositate concrescit, ut usque ad infinitum quantitatis eius summa perveniat. 20

Scribitur vero lineis a superiori parte in inferiorem descendentibus, superius milium summas ex multiplicatione venientes, inferius divisionum minutias continentibus, a quibus tamen in legendo principium est faciendum et sic sursum versus eundum, quo usque ad milium summam, quae ex illa multiplicatione paulatim adcrescit, legendo veniatur; incipiendumque a di- 25 midia sextula per duplicationem usque ad .$\overline{\text{II}}$., inde iterum a dimidia sex-

---

2) ad fixas B_1.
4) ei fehlt in B_3.
5) undecim] XI B_3.
6) X B_5 || dextas B_3.
7) sextas B_1 B_2 B_3 || III B_3 || VIIII B_3.
8) dodras B_3 || III B_3 || quadras B_3 || vocatur B_3.
9) IIII B_3 || VIII B_3 || IIII B_3 || Das eingeklammerte „sublatas“ ist eine sehr wahrscheinliche Vermuthung von Christ.
10) V B_3 || VII B_3 || V B_3.
11) „vero“ fehlt in B_3.
12) vocaverunt B_3.
14) reliquas minucias B_1, „reliquae minuciae“ infolge von Correctur B_2.
21) superiore B_3.
23) continentes B_1, continentibus B_2, aber nur infolge von Correctur, und so, dass dass e von „es“ noch sichtbar ist.
24) miliaru B_1 B_2.
25) accrescit B_3 || venitur B_1, veni[a]tur, a von jüngerer Hand, B_2.

tula per triplicationem usque ad .$\overline{III}$., tum a dimidia sextula per quadriplicationem usque ad .$\overline{IIII}$., et sic usque ad finem.

Hieran reihen sich in den Handschriften B_1 und B_2 die Tabellen der Producte von *dimidia sextula* bis *mille* in 2 bis 50, auf den Tafeln Columne 1 bis 98, ferner die Tabellen in den Columnen 101—124. Die Columnen 99 und 100 sind auch in den Handschriften frei gelassen.

Die Abweichungen in den Handschriften sind folgende:

Col. 3 Z. 8 DCCC B_1.
„ 20 XXVI B_1.
„ 7 „ 41 ſƒ B_1 B_2, wie überhaupt das Zeichen für $\frac{1}{2}$ (ƒ) ersetzt ist durch ein dem Zeichen für 7 *unciae* (ƒ) fast ganz gleiches.
„ 9 „ 12 CCCLXXX B_1 B_2.
„ 14 CCLX B_1 B_2.
„ 11 „ 29 VIſƒ B_1, Vſƒ B_2.
„ 38 Iſ B_1 B_2.
„ 45 ƒ∪ B_1.
„ 13 „ 7 $\overline{III}$DC B_1 B_2.
„ 29 Vƺſ B_1 B_2.
„ 15 „ 10 DCCC B_1.
„ 38 Iƺ B_1 B_2.
„ 17 „ 38 IIſſ B_1 B_2.
„ 41 ſƒ B_1 B_2.
„ 42 ƺ∪∪ B_1 B_2.
„ 44 ƒ B_1 B_2.
„ 19 „ 33—38 Vſ | IIIIƒ | IIIſſ | IIſƒ | Iſſſ | Iƺƒ B_1 B_2.
„ 40—43 ſſſ | ƺſƒ | ƺƒ∪ | ƺƒ B_1 B_2.
„ 21 „ 7 $\overline{IIII}$CCCC B_1 B_2.
„ 9, 10 $\overline{II}$CC | $\overline{I}$C B_1 B_2.
„ 21 LXVI B_2.
„ 23 „ 3, 4 $\overline{X}$CCC | $\overline{VIIII}$C B_1 B_2.
„ 7 $\overline{V}$C B_2.
„ 13 DCCCCXL B_1 B_2.
„ 39 Iƺƒ B_1 B_2.
„ 42 ƺƒ∪∪ B_1 B_2.
„ 24 „ 17 XX B_2.
„ 25 „ 4 $\overline{VIIII}$CCC B_1 B_2.

---

1) per triplicationem a dimidia sextula B_2. || Nach „sextula" Rasur B_1.
3) EXPLICIT . PRAEFATIO IN $\overline{DI}$ NOMINE INCIPIT LIB CALCULUS. QUEM VICTORIUS CONPOSUIT. B_1. Ebenso nur COMPOSUIT B_2.

Col. 25 Z. 42 ℨƒ B_1, ℨƒ∪ B_2.
„ 43 ℨϸ B_1 B_2.
„ 27 „ 18 CCL B_1.
„ 33 VIIʃƒ B_1 B_2.
„ 35—37 VIɟ | Vɟ | IIIℨϸ B_1 B_2.
„ 41 ʃƒ B_1 B_2.
„ 43 ℨƒↄ B_1 B_2.
„ 29 „ 4 $\overline{\text{XII}}$CC B_2.
„ 9 $\overline{\text{I}}$ICC B_2.
„ 11 $\overline{\text{I}}$CCCCIIII B_1 B_2.
„ 42 ℨƒ∪∪ B_1 B_2.
„ 30 „ 29 ʃʃƒ B_2.
„ 31 „ 4 $\overline{\text{XII}}$DCCC B_2.
„ 31 XIIʃɟ B_1 B_2.
„ 34 VIIIɟ B_1 B_2.
„ 38 IIIʃʃƒ B_1 B_2.
„ 40 Iʃƒ B_1 B_2.
„ 42 ℨƒϸ∪ B_1 B_2.
„ 44 ℨƒ B_1 B_2.
„ 45 ⁄∪∪ B_1 B_2.
„ 32 „ 2 DCCC B_2.
„ 33 „ 3 $\overline{\text{XIIII}}$CCC B_1.
„ 13 $\overline{\text{I}}$CLX B_1 B_2.
„ 15 DCCC B_2.
„ 22 CXXV B_1 B_2.
„ 32 XV B_1 B_2.
„ 42 ɟ B_1 B_2.
„ 43 ℨƒɟ B_1 B_2.
„ 35 „ 15 DCCCL B_1.
„ 33 X⁄ B_1 B_2.
„ 45 ϸΨ B_2.
„ 37 „ 11 $\overline{\text{I}}$DCC B_1 B_2.
„ 29 XVIIIℨƒ B_1 B_2.
„ 30 XVIʃ B_1 B_2.
„ 42 ʃϸ∪∪ B_1 B_2.
„ 43 ℨϸↄ B_1, ℨϸↄ B_2.
„ 39 „ 20 CLXXVIIII B_1 B_2.
„ 30 XVIʃ B_1, XVIIʃ corrigirt aus XVIʃ B_2.
„ 39 IIʃƒ B_1 B_2.
„ 44 ℨƒ B_1 B_2.
„ 41 „ 34 X B_1 B_2.
„ 44 ℨƒↄ B_1, ℨƒϸ B_2.

Col. 41 Z. 45 ⁄ſ◡◡ B_1 B_2.
„ 43 „ 21 CLXXX B_1 B_2.
„ 40 ſſſ B_1 B_2.
„ 41 ſſſ B_1 B_2.
„ 42 ſſ◡ B_1 B_2.
„ 44 ℈ſ◡◡ B_1 B_2.
„ 45 ℈ſƆ◡ B_1 B_2.
„ 45 „ 6 $\overline{\text{XII}}$D B_1 B_2.
„ 9 $\overline{\text{IIII}}$DCCCC B_2.
„ 27 XLVIIII B_1.
„ 36 VIIII B_1 B_2.
„ 42 ſ⁄ B_1 B_2.
„ 47 „ 5 $\overline{\text{XV}}$D B_1 B_2.
„ 29 XXVſſſ B_1 B_2.
„ 30 XXVſſſ B_1.
„ 32 XVIIſſ B_1 B_2.
„ 45 ℈ſ◡◡Ɔ B_1.
„ 49 „ 20 CCXXIIII B_1 B_2.
„ 31 XVIIII℈ B_1 B_2.
„ 38 IIII℈ſ B_1 B_2.
„ 51 „ 4 $\overline{\text{XVIIII}}$DCCCC B_1 B_2.
„ 17 DCCCC B_1 B_2.
„ 20 CCXLIIII B_1 B_2.
„ 31 XX℈ B_1 B_2.
„ 34 XIIIIſ B_1 B_2.
„ 40 II℈ B_1 B_2.
„ 53 „ 6 $\overline{\text{XIIII}}$D B_1 B_2.
„ 23 CLXIIII B_1.
„ 30 XX℈ſ B_1 B_2.
„ 32 XVIIIIſſ B_1 B_2.
„ 33 XV℈ſ B_1 B_2.
„ 42 ſſ B_1 B_2.
„ 44 ℈ſ B_1 B_2.
„ 55 „ 3 $\overline{\text{XXIIII}}$CC B_1 B_2.
„ 8 $\overline{\text{VII}}$DCC B_1 B_2.
„ 23 CLXXXIIII B_1.
„ 32 XVIII℈ſ B_1 B_2.
„ 33 XXſſſ B_1 B_2.
„ 37 VII℈ſ B_1 B_2.
„ 39 IIIſſ B_1 B_2.
„ 40 II℈ſ B_1 B_2.
„ 41 I℈ſ B_1 B_2.

Col. 55 Z. 42 ſſſ∪ B_1 B_2.

„ 44 ſſſ∪∪ B_1 B_2.

„ 57 „ 41 Iℌ B_1 B_2.

„ 43 ſſ B_1 B_2.

„ 44 ℌſ B_1 B_2.

„ 59 „ 2 $\overline{\text{XXVI}}$DCCCC B_1 B_2.

„ 5 $\overline{\text{XXIIII}}$DC B_1, $\overline{\text{XVIIII}}$DC B_2.

„ 14 $\overline{\text{II}}$DCCCCLX B_1.

„ 29 XXVIIIℌſ B_1 B_2.

„ 33 XVIII∪ B_1 B_2.

„ 36 Xſſ B_1 B_2.

„ 37 VIIſſ B_1 B_2.

„ 39 IIIℌſ B_1 B_2.

„ 41 Iℌſ B_1 B_2.

„ 43 ſſ B_1 B_2.

„ 44 ℌſ∪ B_1 B_2.

„ 61 „ 20 CCLXXXVIIII B_1 B_2.

„ 29 XXVIIIℌſ B_1 B_2.

„ 32 XXIℌſ B_1 B_2.

„ 35 XIIIℌſ B_1 B_2.

„ 45 ℌſ∪ B_1 B_2.

„ 63 „ 5 $\overline{\text{XVIII}}$DCCC B_1 B_2.

„ 33 XVIIIIℌ B_1 B_2.

„ 36 X B_1 B_2.

„ 39 IIIIℌ B_1 B_2,

„ 42 ſſſ⁄ B_1 B_2.

„ 44 ſſ B_1 B_2.

„ 65 „ 3 $\overline{\text{XXVI}}$CC B_1 B_2.

„ 6 $\overline{\text{XVI}}$ B_1 B_2.

„ 11 $\overline{\text{III}}$DC B_1 B_2, aber in B_2 hat es eine jüngere Hand in $\overline{\text{IIII}}$LX corrigirt.

„ 25 CXXVI B_1 B_2.

„ 41 Iℌſ B_1 B_2.

„ 43 ſſſℌſ B_1 B_2.

„ 67 „ 3 $\overline{\text{XXVII}}$ B_1 B_2.

„ 13 $\overline{\text{II}}$CCC B_1 B_2.

„ 18 DCCC B_1 B_2.

„ 41 Iℌſſ B_1 B_2.

„ 44 ℌſſ∪∪ B_1 B_2.

„ 69 „ 3 $\overline{\text{XXVII}}$DCCC B_1 B_2.

„ 13 $\overline{\text{II}}$DLXX B_1 B_2.

REESE LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Col. 69 Z. 20 CCCXXVIII B_1 B_2.
„ 21 CCLXXXVIIII B_1.
„ 27 LXXI B_1 B_2.
„ 37 VIII B_1 B_2.
„ 42 I∪∪ B_1 B_2.
„ 43 Ɔʃʃ B_1, ∪ʃʃ B_2.
„ 44 ∪ʃ B_1 B_2.
„ 45 Ψʒ B_1 B_2, aber bei B_2 ist Ψ wegradirt.
„ 71 „ 15 $\overline{\text{I}}$DCCCCL B_1 B_2.
„ 19 CCCLX B_1 B_2.
„ 25 CXLVIIII B_1 B_2.
„ 27 LXXII B_1 B_2.
„ 37 VIIIʒ B_1 B_2.
„ 39 IIIIʃʃ B_1 B_2.
„ 45 ʒΨ B_1 B_2.
„ 73 „ 4 $\overline{\text{XXVI}}$D B_1 B_2.
„ 5 $\overline{\text{XXXII}}$DCCC B_1 B_2.
„ 27 LXXIII B_1 B_2.
„ 38 VIIʃʃ B_1 B_2.
„ 39 IIIIʃʃ B_1 B_2.
„ 45 ʒ∪ B_1.
„ 75 „ 4 $\overline{\text{XXVI}}$CCC B_2.
„ 6 $\overline{\text{XXVIIIII}}$D B_2.
„ 21 CCCXXII B_1 B_2.
„ 29 XXXVʃʃ B_1 B_2.
„ 31 XXVIIIʒ B_1 B_2.
„ 32 XXVʃʃ B_1 B_2.
„ 33 XXIIʃ B_2.
„ 34 XVIIIIʃ B_2.
„ 39 IIIʃʃʃ B_1 B_2.
„ 41 Iʃʃ B_1 B_2.
„ 43 ʃʃʃ B_1, ʃʃʃƆ B_2.
„ 77 „ 7 $\overline{\text{XV}}$ B_2.
„ 34 XXI B_1 B_2.
„ 35 XVIʃʃ B_1 B_2.
„ 40 Iʃʃ B_1 B_2.
„ 45 ʒƆΨ B_1.
„ 79 „ 41 Iʃʃʃ B_1 B_2.
„ 81 „ 11 $\overline{\text{II}}$DCLXXX B_1, $\overline{\text{III}}$DCLXXX B_2.
„ 14 $\overline{\text{II}}$DCXX B_1 B_2.
„ 32 XXXVIII B_1.
„ 33 XXXIIIIʃ B_1.

Col.	Z.	
Col. 81	Z. 36	VIII $B_1 B_2$.
	„ 37	Vʃ $B_1 B_2$.
	„ 38	IIII $B_1 B_2$.
	„ 39	Vȝ $B_1 B_2$.
	„ 44	ȝ $B_1 B_2$.
„ 83	„ 11	$\overline{\text{III}}$DCCCCLXX $B_1 B_2$.
	„ 29	XXXVIIIIɔʃʃ $B_1 B_2$.
	„ 31	XXXIIɔ $B_1 B_2$.
	„ 36	XIIIIȝ $B_1 B_2$.
	„ 41	Iʃʃ℘ $B_1 B_2$.
	„ 45	ʃʃΨ $B_1 B_2$.
„ 85	„ 20	CCCLXXXIII $B_1 B_2$.
	„ 28	XLIII B_1.
	„ 29	XLʃʃ $B_1 B_2$.
	„ 30	XXXVIII $B_1 B_2$.
	„ 32	XXVIIIIɔʃʃ $B_1 B_2$.
	„ 35	XVIIIɔʃʃ $B_1 B_2$.
	„ 37	XII $B_1 B_2$.
	„ 38	VIIɔʃʃ $B_1 B_2$.
	„ 43	ʃʃʃ $B_1 B_2$.
„ 87	„ 8	$\overline{\text{XIIII}}$D $B_1 B_2$.
	„ 20	CCCCII $B_1 B_2$.
	„ 31	XXXʃʃ $B_1 B_2$.
	„ 43	ʃʃʃ℘ B_2.
	„ 44	℘℘∪ B_2.
	„ 45	ȝʃ∪∪ B_2.
„ 89	„ 8	$\overline{\text{XIIII}}$DCCC $B_1 B_2$.
	„ 27	XCIIII $B_1 B_2$.
	„ 30	XXXVIIIɔʃʃ $B_1 B_2$.
	„ 36	XVɔʃʃ $B_1 B_2$.
	„ 39	Vʃʃ $B_1 B_2$.
	„ 41	Iʃʃʃ B_2.
	„ 42	Iɔ∪∪ $B_1 B_2$.
	„ 43	ʃʃʃ℘ $B_1 B_2$.
„ 91	„ 4	$\overline{\text{XXII}}$DCCCC $B_1 B_2$, aber in B_1 vor $\overline{\text{XXII}}$ eine Rasur.
	„ 6	$\overline{\text{XXIII}}$CC $B_1 B_2$.
	„ 8	$\overline{\text{XVIIII}}$C $B_1 B_2$.
	„ 27	XCVI B_1; IIII auf Rasur B_2.
	„ 32	XXXIɔʃʃ $B_1 B_2$.
	„ 34	XXʃ $B_1 B_2$.
	„ 43	Iʃʃʃʃↄ $B_1 B_2$.
„ 93	„ 4	$\overline{\text{XXXIIII}}$D $B_1 B_2$.
	„ 11	$\overline{\text{III}}$CCCXX $B_1 B_2$.

Col. 93 Z. 18 DCCCLX $B_1 B_2$.
„ 25 CCXCII B_2.
„ 26 CXLIII $B_1 B_2$.
„ 27 XCVIII $B_1 B_2$.
„ 31 XXXV $B_1 B_2$.
„ 42 I𝔍𝔉 $B_1 B_2$.
„ 43 I⁄ $B_1 B_2$.
„ 45 𝔍𝔉 B_1.
„ 95 „ 3 $\overline{XXXVIII}$CC $B_1 B_2$.
„ 5 $\overline{XXVIII}$CCCC $B_1 B_2$.
„ 11 $\overline{IIII}$CCCX $B_1 B_2$.
„ 13 $\overline{III}$CCCCXX ist in B_1 ausgelassen und alle folgenden Zahlen um eine Stelle aufwärts gerückt. Die letzte dadurch leer gewordene Zeile hat eine jüngere Hand mit Bleistift durch 𝔍ſΨ ausgefüllt. B_2 hat $\overline{III}$CCCCXX zwischen den Zeilen eingeflickt und die letzte Zeile leer.
„ 24 CCXLII $B_1 B_2$.
„ 29 XLIIII $B_1 B_2$.
„ 32 XXIIſſ $B_1 B_2$.
„ 41 IIſ $B_1 B_2$.
„ 44 ſſ $B_1 B_2$.
„ 45 ƆΨ $B_1 B_2$.
„ 97 „ 31 XXVIIſ $B_1 B_2$.
„ 32 XXXIII𝔍𝔉 $B_1 B_2$.
„ 36 XVſſ $B_1 B_2$.
„ 38 VIII𝔍𝔉 $B_1 B_2$.
„ 42 I𝔍𝔉ſ◡ $B_1 B_2$.
„ 103 „ 36 VIIII $B_1 B_2$.
„ 104—106 Z. 46 zweimal in B_1 und B_2 geschrieben, aber in B_2 sind die Zeichen ſ⁄ ausradirt. Z. 47 fehlt in B_2.
„ 105 Z. 46 𝔍𝔉 $B_1 B_2$.
„ 106 „ 31 X∴ B_1; C ist ausgewischt, aber kein X an seine Stelle gesetzt.
„ 44 ſſſſ B_1.
„ 107—110 Z. 14 fehlt in $B_1 B_2$.
„ 108 Z. 1 ſ𝔉 $B_1 B_2$.
„ 5 ſſ𝔉 $B_1 B_2$.
„ 8 ſſſ $B_1 B_2$.
„ 9 ſſ𝔉 B_1.
„ 10 ⁑ B_1.
„ 109 „ 1 𝔍𝔉ſ $B_1 B_2$.
„ 3 𝔍𝔉 $B_1 B_2$.

Col. 109 Z. 5 ʃȜ $B_1 B_2$.
„ 10 ʃↄ∪ $B_1 B_2$.
„ 113—115 Z. 42 fehlt in $B_1 B_2$.
„ 118 Z. 10 IȜ $B_1 B_2$.
„ 119 „ 25 ʃꞩ B_2.
„ 120 „ 37 II $B_1 B_2$.
„ 49 CXLVIIII $B_1 B_2$, aber bei B_2 in CLXVIIII corrigirt.
„ 121 „ 13 XXXVIIII B_1.
„ 41 IIʃ $B_1 B_2$.
„ 122 „ 8 DLXXXIII $B_1 B_2$, aber bei B_2 in DLXXVI corrigirt.
„ 11 DCCCLXXVIIII $B_1 B_2$, aber bei B_2 CL ausradirt.
„ 12 DCCCLXXXIIII $B_1 B_2$, aber bei B_2 ein C ausradirt.
„ 13 DCCXXV B_1, DCCC*XLI B_2. (über DCCC*: c c)
„ 18 ĪCLXVI $B_1 B_2$.
„ 36 IȜʃↄ $B_1 B_2$.
„ 38 IIIȜↄ $B_1 B_2$.
„ 42 VȜ B_1, VIȜ B_2, zum Theil auf Rasur.
„ 51 XVIIIIꞩↄ $B_1 B_2$.
„ 123 „ 29 XȜ B_1.
„ 44 XIIIʃ $B_1 B_2$.
„ 124 „ 5 XXXȜ $B_1 B_2$.
„ 19 LXVIIIIʃↄ B_1, LXVIII*ʃↄ B_2.
„ 28 Cʃↄ B_1.
„ 29 CVȜↄ $B_1 B_2$.
„ 30 CXʃ $B_1 B_2$.
„ 45 CLXXXIIʃ $B_1 B_2$.

An den Schluss der Tabelle in der 124. Columne reiht sich folgender Text:

Totus prior numerus et eius quarta pars in secundo tramite invenitur. Secundo totus prior numerus et duae quartae partes eius in secundo tramite invenitur. Tertio totus prior numerus et ter quarta pars eius in secundo tramite invenitur. Quotquot ergo asses ·Ȝ· aut ·ʃ aut ·ꞩ· praecesserint, eodem numero assium ipsi ·Ȝ· vel ·ʃ· vel ·ꞩ· geminantur usque [ad?] XII locum, in quo XIIȜ in se .CLꞩↄ. efficiunt, eo quod duodecies ·Ȝ· geminatur. 5

---

5) assum $B_1 B_2$ || ipse $B_1 B_2 B_3$ || .ʃȜ. vel .ʃ. vel .ʃ. $B_1 B_2$, Ȝ aut ʃ aut ꞩ B_3 || „ad" fehlt in $B_1 B_2$.

5—7) „usque ... geminatur" ist im Commentar des Abbo, d. h. in B_3 weggelassen.

Hierauf folgen die Tabellen, welche in den Columnen 125—130 stehen; die Abweichungen in den Handschriften sind:

Col. 125 Z. 10 Ʒ B_1. B_2 hat die Zeichen hier und in den folgenden Zeilen zum Theil auf Rasur; ob von erster oder zweiter Hand, ist nicht zu unterscheiden.

„ 11 ƷƆ B_1, Ʒ* B_2.
„ 12 ʃƒ B_1.
„ 13 ƷƷƆ B_1.
„ 14 Ʒ B_1.
„ 15 ƒƆ B_1, ƒ B_2.
„ 16 ƷƒƆ B_1, ƒƆ B_2.
„ 17 Ʒʃ:· B_1.
„ 18 §Ɔ B_1.
„ 19 §ƒ B_1, § B_2.
„ 20 §ƒ B_1, §Ɔ B_2.
„ 21 Ʒƒ B_1.
„ 22 ƷƒƆ B_1.
„ 23 Ʒƒƒ B_1.
„ 24 ʃ B_1.
„ 25 ʃƆ B_1.
„ 26 ʃƒ B_1.
„ 27 ʃƒƆ B_1, ʃ* B_2.
„ 28 ƒ B_1.
„ 29 ƒƆ B_1.
„ 30 ƒƒ B_1.
„ 31 ƒƒ B_1.
„ 32 § B_1.
„ 33 §Ɔ B_1.
„ 34 §ƒ B_1.
„ 35 §ƒƆ B_1.
„ 36 § B_1.
„ 37 §ƒ B_1.
„ 38 §ƒƆ B_1.
„ 40 §ƒƒƆ $B_1 B_2$; aber bei B_2 ist ƒ ausradirt.
„ 41 §§ B_1, §ʃ* B_2.
„ 42 §§Ɔ B_1.
„ 43 §§ƒ B_1; bei B_2 ist ƒ wegradirt.
„ 44 §§ƒƆ B_1; bei B_2 ist ƒ wegradirt.
„ 45 §§ʃ B_1.

„ 126 „ 30 XLVIII auf Rasur B_2.
„ 127 „ 30 XXIIII auf Rasur B_2.
„ 40 XXXVI $B_1 B_2$.
„ 128 „ 15 quaras $B_1 B_2$.
„ 22 sesclae B_2 mit durchstrichenem a.

An die Columnen 128—130 reiht sich folgender Text:

Janua calculi.

Bis media sescle id est sescle.			
Bis sescle	„	duae sesclae.	
Bis sicilicus	„	semuncia.	
Bis duae sesclae	„	semuncia et sescle.	5
Bis semuncia	„	uncia.	
Bis uncia	„	sextas.	
Bis sescuncia	„	quadras.	
Bis sextas	„	treas.	
Bis quadras	„	semis.	10
Bis treas	„	bisse.	
Bis quincunx	„	distas.	
Bis semis	„	assis.	
Bis septas	„	assis et sextas.	
Bis bisse	„	assis et treas.	15
Bis dodrans	„	assis et semis.	
Bis distas	„	assis et bisse.	
Bis labus	„	assis et distas.	
Bis assis	„	dipondius.	
Bis bini	„	quaterni.	20
Bis terni	„	seni.	
Bis quaterni	„	octeni.	
Bis quini	„	deni.	
Bis seni	„	decus dipondius.	
Bis septus	„	decus quartus.	25
Bis octus	„	decus sextus.	
Bis nonus	„	decus octus.	
Bis deni	„	viceni.	
Bis vigeni	„	quadrageni.	
Bis trigeni	„	sexageni.	30
Bis quadrageni	„	octuageni.	
Bis quinquai	„	cean.	
Bis sexai	„	cean biae.	

2) „sesclae" an beiden Stellen B_3.
3) sescle] sesclae B_3.
5) sesclae] sescle B_1 B_2.
11) biss B_1.
18) iabus B_2.
28) veceni B_1.
33) ceaubie B_3.

Bis septai	id est	cean quadrai.
Bis octai	„	cean sexai.
Bis nonai	„	cean octai.
Bis cean	„	ducen.
5 Bis ducen	„	quadricen.
Bis tricen	„	sexacen.
Bis quadricen	„	octicen.
Bis quinquien	„	chile.
Bis sexacen	„	chile ducen.
10 Bis septacen	„	chile quadricen.
Bis octacen	„	chile sexacen.
Bis nonocen	„	chile octacen.
Bis chile	„	dischile.

Item.

15 Ter media sescla.
Quater media sescla.
Quinquies media sescla et reliqua.

Explanatio extremae partis calculi.

Producitur pars .CXLIIII. ł haec est forma vel nota assis; sed aliquando corrumpitur forma eius notae inscriptione eius quia sic est .ł. haec figura rationabiliter. Ideo enim assium notae corrumpuntur nisi in uno loco ubi absque duplicatione in postremo ordine sunt ante pondera, quia, cum haec figura nota assis est .ł. et multitudo iuncta simul figurarum eius occuparet membranum, ut hi .III.łłł. exempli causa. .I. forma assis ponitur primitus et inde notatur quia ipsa de notis impletur formis subsequentibus eam et ne multitudo formarum assis quia sicilicus verbi causa .XLVIII. vicibus unum assim implet et cetera. .łΨ. deduc pars .CXLIIII. et rel. Hae notae semel multiplicatae unum assim implent, ut puta Ψ.∪.Ɔ.∪∪. ϸ.ϸƆ.⁄.ϸ.ʒ.ʒ.ʒʃ.ʃ.

30 Quando vero numerus iteratur et iterum duc, per priorem numerum notae multiplicatae insequenti numero minore asses efficiunt, ut puta .⁄Ɔ.

---

7) octacen B_1.
18) IXIREMAE B_2.
19) ł] pro B_1. Es scheint .I. ursprünglich gestanden zu haben.
20) ł] pro B_1.
21) assuum B_1; bei B_2 ist u durch Rasur in i verwandelt.
26) Zwischen „assis“ und „quia“ scheint eine kurze Zeile ausgefallen zu sein.
28) Ψ.∪.Ɔ.∪∪.ʃ.ʃ.∪ — ʃ ∪ʒʒʒʃ B_1, Ψ.∪ Ɔ.∪∪.ϸϸ (beides auf Rasur), *Ɔ.*ϸ. (über den drei letzteren auf Rasur: /./Ɔ.)./ϸƆ.ʒ. (Diese vier Zeichen auf Rasur.) ʃƆ.ʒϸ.ʒϸƆ.

XLIIII . V. asses; ∕ȝɔ . XLIIII . VII. asses; ȝƒ. XII asses .V. usque dum dicit ƒƒȝɔ . XLVIII. asses XLVII.

Item alia explanatio prioris partis.

Iȝ in se Iſȝɔ. In primis tolle aequalitatem prioris numeri de subsequenti, hoc est .Iȝ· remanet ·ȝȝɔ·, quae isto modo dividas super priorem numerum, id est .Iȝ·, ȝ· mitte super .I., eiusdem scilicet quartam partem, ȝɔ· super ȝ, similiter ipsius quartam partem. In secundo loco dicis .Iſ· in se .IIȝ· Tolle iterum semper ut ante prioris numeri plenitudinem de subsequenti, id est .Iſ., remanet ·ſȝ· Ista vice semis mitte super .I., id est ipsius medietatem, ·ȝ· autem super ·ſ·, illius similiter medietatem. Tertio loco aeque ponis .Iƒƒ· in se .III.ȝɔ. Similiter ut supra tolle priori numero de subsequenti aequalem partem, id est .Iƒƒ·, remanet .Iȝȝɔ., quae sic inmittuntur. Tolle de .I. qui remansit .ƒƒ. et mitte super priorem, id est ter quaternam partem; deinde .ſȝɔ., quae remanserunt, mittis simi liter super priorem .ƒƒ., eiusdem ter quaternam partem, id est .III. super unamquamque unciam. Quarto deinde loco ad perfectum devenit, quando dicit .II. in se .IIII. Secundo ordine dicis .II.ȝ. in se .Vȝɔ. Nunc inprimis tolle .IIII. de subsequenti numero ad illa priora et ·ſ· ad ·ȝ·, remanent .ſȝɔ.·ſ mitte super .II., id est quartam partem, ut antea, .ȝɔ. ad .ȝ. [In secundo loco dicis .IIſ· in se .VIȝ·] Duc ut ante de inferiore numero .IIII. ad complementum prioris numeri, et remanent .II. et .ȝ. Iterum mitte .I. ad .ſ. complendum. Alterum unum ad superiores, id est dimidietatem ad utrumque, .ȝ. iterum iunge ad ·ſ·, id est dimidietatem, ut supra. Cum dicis tertio .IIƒƒ. in se .VII.ſȝɔ., adplica ut ante .IIII. de .VII. inferioribus ad .II. superiores, remanent .III.ſȝɔ. Adde iterum ad

---

1) ∕ȝɔ] ſ∪ɔ B_1; bei B_2 das Richtige auf Rasur. || „dum" fehlt bei B_1 und ist bei B_2 eingeflickt.

6) .Iȝ. fehlt bei B_1, das zweite ȝ bei B_2.

7) „ȝɔ ... partem" fehlt bei B_2. || .Iſ.] Iſ B_1.

9) .I. fehlt bei B_2, wo über der Zeile „assem" steht.

10) .ſ.] ſ B_1.

14) nach „partem" steht bei B_2 am Rand „sicilicos".

14 — 15) „deinde ... partem" fehlt bei B_2.

15) .III.] tres B_2.

17) .V.ȝɔ.] .IIſɔ. B_1; bei B_2 steht das Richtige auf Rasur.

20) Das Eingeklammerte fehlt in B_1 B_2; die Ergänzung ist nach Analogie gebildet und kann auch anders ausgedrückt gewesen sein.

21) .II.] I* B_3.

22) .I.] ſ B_2. || „complendum"] über der Zeile dazu noch ad B_2. || dimidietatem] „demedietatem" mit i über den beiden ersten e B_1 B_2.

25) Nach .III.ſȝɔ. ist in B_2 am Rande beigefügt „∸ quae ponas duobus". || ad dodras .Iſ. B_1, ad dodrantē ƒƒ B_3 von nt an auf Rasur.

dodrantem .ſſ. .Iſ· duo dodras; [remanent] .II.ℓↄ. Item ponas duos dodrantes superiores, remanent .ſℓↄ., quae mittes iterum super dodrantem, ut ante, id est tres sicilicos ad unamquamque unciam. Postea dicis .III. in se .VIIII. Sic isto modo per omnia crescente numero intellectus aperit.

5 OLEARIA INCIPIUNT PONDERA.

sextarius dicitur a .VI. parte congei .II. unciarum.

Mesura . centum sextarii.

·I· magnus sextarius et parvus . sed magnus sextarius bis XV uncias habet parvus bis .X.

10 Omnes sextarii himminae duae

quartarius quarta pars sextarii id & ʒſ.

Quartarii .IIII. octuarii .VIII.

XX unciae.

Chiati .XII.

15 XL scripuli.

Chiatus olei pendit zſſ IIII. LX scripuli.

Octuarius ʒſ . quartarius ʒſ .

himmina .ſſſ.

pondus librae enim quō generale est ut huic aliquando specialis quō idem significat assis .XII. unciarum. ·

20 Sextarius olei pendit libram .Iſſ·

CXX unciae.

Congeus . sextarii . VI.

pondo .XII. unciae.

25 Olei pondo .X . CLX. unciae.

Simodius congeus .III.ʒſ. sextarii.

VIII. olei pondo .XIII.ʒſ.

CCCXX unciae. CCXL unc. unum asses et ſſLXXX unc. efficiunt.

Modius . simodii . II . congei . II.

30 & . VI . semis sextarii . XVI.

Olei pondo .XXVI.ſſ.

DCCCCLX unciae.

---

1) „remanent" fehlt bei B_1 und B_2. || II.ℓↄ.] I.ſ auf Rasur B_2. || duo dodras B_1; in B_2 ist das Richtigere durch Correctur hergestellt.

2) Zu „superiores" ist in B_2 „duos" hinzugeflickt. || .ſſI. B_1, bei B_2 steht ↄ auf Rasur. || super dodras B_1; bei B_2 ist das Richtigere durch Correctur hergestellt.

4) VIII B_1.

6) Das klein Gedruckte sind Glossen, die, wie sie mitgetheilt sind, in den Handschriften B_1 B_2 zwischen dem Text stehen.

10) Dazu am Rand: „himmina dicitur quasi seminina hoc est semi sextarii" B_1 („semis sextari" B_2).

16) „LX scripuli" fehlt bei B_1.

25) .X.] decem B_2.

Anfora italica . modii . III.
simodi . VI . congei . VIII.
Ī . CCLXXX unciae.
Sextarii XLVIII . olei pondo . LXXX.
Anfora gallica modii . IIII. Simodi . VIII. 5
hic . ʃʃ . LXXX . significat . quia convenit eo quod octavum indicat numerum.
Congei . X . ʃʃ . sextarii . LXIIII.
Olei . pondo . CVIʃʃ.

ITEM MELARIA ĪÑC.

Chiatus mellis pendit . Ꝫ .10
XCʃʃ.
Octuarius . Ꝫʃʃ VI.
tertia pars unius cuiusque mensurae olei additur ad mensuram mellis . mel enim gravius est quam oleum et ideo tertia pars additur. Vas enim quod IX unciae olei implent, si melle impleatur . XII. uncias tenet; et haec con- 15 venientia in reliquis mensuris debet observari.
VII . unciae et semiuncia.
Quartarius ʃ & ʃ.
XII . unciae.
himmina . Iʃ. 20
XXX unciae. I olei pondo.
Sextarius mellis pondo . II . ʃ . CLXXX.
mellis.
sextarius . ⁖ VI.
mellis pondo . XVIIII . uncias habet. 25
mellis pondo . X.
CCXL uncias.
simodius ∸ CLXXX.
congeus . ⁖ IIII . ʃʃ.
IIII asses olei et trias CXL. 30
sextaria . VIII . mellis.
pondo . XIII . ʃʃ.
hic treas significat . CCCC.
Modius . LXXX . uncias.
treas enim in melle . in oleo . ʃ. 35
Congei mellis . CCC . LX . uncias . VI . asses
XVIII mellis . CVIII . uncias . ʃʃ . mellis XII unciae.

---

14) quod] quae B_1; B_2 „quod" infolge von Correctur.
15) IX unciae] ex uncia B_1 B_2.
18) ʃ Ꝫ B_1.
31 und 32) in einer Zeile B_2.

Simodii . II . congei . II . VI . ʃʃ. . XII . unciae.
Sextarii XVI mellis . pondo . XXVI . ʃʃ. •
Anfora . ĪCCCCXL unciae.
unusquisque enim modius . LXXXV. uncias habet in mensura mellis.
5 Italia modii . III . simodi . VI . congei . VIII.
Unusquisque sextarius . XXX . uncias.
Sextarii . XLVIII . mellis . pondo LXXX; XVIIII unc. in uno quoque mellis pondo.
Anfora gallica modii . IIII . ĪDCCCCXX unciae simodi . VIII . Xʃʃ. bisse hic
10 CXX uncias habet . id est decem duodecies.
Sextarii . LXIIII . mellis . pondo . C.
VI . ʃʃ . melle XII . uncias ad mensuram
ad libram mellis . in libra duo . III . V duobus unciis adde tres . ad tres uncias olei bis duos unciis mellis implent . simul sextarium mellis.
15 decem enim unciis mellis dimidia pars additur hoc est duae unciae.
Oleo in sextario . VI . ad sextarium . I . sexies . V. bisenim duo mellis unciae propter . II . accipiuntur . in oleo.
Centum pondo olei . sextarii LX. ĪCC unc.
Centum pondo mellis . sextarii LX. DCCCCLX unciae olei mellis auri ar-
20 genti rel.
Talentum cuiuslibet mercedis . pondo LXXX.
Talentum olei . sextarii XLVIII. DCCCCLX unc.
Talentum mellis . XXXII . sextarii. DCCCCLX unc.

25 De geometrica nunc loquitur.

Digitus habet . ℘Ɔ . extremus artus auricularis in longum XVIII scripulos.
Palma . Ɨ. Cubitus . IƗ. cubitus ab ulna usque ad ungulas . Gressus . IIʃ . duos pedes et dimidium, id est . XXX . unciae policis.
Passus . V. pedes . LX . unciae. Pertica pedes . X . hoc est . CXX . unciae.
30 Aripinis vel aripennis perticas XII habet, hoc est ĪCCCXL uncias, passus . XXIIII . pedes . CXX.
Leuua habet passus ĪD . pedes $\overline{\text{VIID}}$. aripinis LXIIʃ . ictus . LX.
Stadium habet pedes DCXXV . passus CXXV.

---

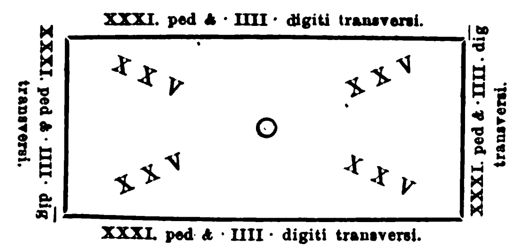
16) . I .] unum B_2.
17) . II .] es scheint . VI . zu schreiben.
19) Hierzu ist am Rande bemerkt: „ĪCC . similiter sunt tunc tertia pars numeri sextariorum olei. In mellis sextarium continetur.“ Bei B_2 sind einige Buchstaben abgeschnitten.
25) Digiometrica B_2.
26) articularis B_2.
32) Lĕua B_1.

Iugerum habet passus XLVIII . pedes CCXL.
Digiti XVI transversi pes est, hoc est XII . unciae.
Bisse vel bes VIII unciae policis . cubitus ulna dodras . propterea dicit cubitus ulna ad discretionem mensurae a sinu intus incipiente, quae bes dicitur. et usque ad artum pugni utraque mensura extenditur. 5
Achina . C . pedes.
Ictus habet XXV pedes in quadro, a medio incipientes in . IIII . partes, per circuitum autem . CXXV . pedes. Duo aripines iugerum faciunt, ĪD passus leuua est, IIII passuum passus scinus sive parasanga.
Obolus dimidius scripulus, minima pars mensurae. 10
Dodras . VIIII . uncias habet.
Denarios . X . numero . I . scripuli . pondeus duo et semis.
. I . II . scripuli et semis ĪDCCCCXX unc.
Sestertium . V . sextarii . Gomor . VI . modii.
modius dignus . I . III . unc. & . VII . scripuli. 15
Medignum . sextula sexta pars sextarii.
idem et assis XVI.
Libra C/u XII. Mna libra greciae.
. I . cum dicitur LX librae atticae talentum. 20
LX librae atticae talentum.

De rebus liquidis.

coclearia scrip et quarta pars scripuli. X scrip.
Duo coclearia cleme dr, quattuor clemeses mistrum faciunt; Mister /IIII . pars chiati est. 25
. IIII . hoc est . XL . scripuli.
Chiatus . sexta pars himminae est.
Himmina - medius sextarius.
Oephi sive opha . III . modii . quorum decima pars
IIII . sextarii LXXX unc X VI 30
est quadrisextium . & himmina & semis

6) Unterhalb dieser Zeile am Raude befindet sich in B_1 und B_2 folgende Figur:



7) . IIII .] quattuor B_2.
24) deme B_2. || demeses B_2.

LXXX unc

Hin vero modius & . III . sextarii, cuius quarta pars aeq: quadrisextium &
X unc   I . II . unc hoc est semis himmine.
himmina & semis . quia pars trium sextariorum quarta / himmina &
5 semis est.

DE ALTERA RATIONE.

duae unciae   dimidium sextarii XII unciarum
II . ⁄ sextarius, himmina . I⁄ quartarius . ℓ Octuarius . Ɔ . chiatus . ᴗ . Congeus sextarii VI . XII . ⁄ passos XII . LX librae talentum est, LXXX
10 pondos talentum . Stater . XX . ℌ.
XIIII scripuli. VI script scriptulus & scriptula
Sicel & sicilicus ⁄ . I . stater.
Dragma . II . ℌ . Didragma . ⁄ duae dragmae IIII . ℌ . Et alibi dragma . III . ℌ . Didragma . VI . ℌ . XXIIII scripuli ⁄ uncia est.
15 Denarium . X . ℌ . Scriptula & dimidium . ⁄ trimesis est, tres trimeses ⁄ solidus est.
Tributum . X . pars pecuniae . census solidus ab uno quoque denario X scriptulae.

Unter der Rubrik

DE SIGNIS PONDERUM

folgt, was bei Hultsch, *metrol. script. rell. II*, S. 121 Z. 9 bis S. 123 Z. 10 und S. 133 Z. 14 bis S. 135 Z. 6 bereits gedruckt ist.

Die Abweichungen von ersterem Text als dem verwandteren sind:

S. 121 Z. 16 geminata $B_1 B_2$.
„ 17 nach T „te" $B_1 B_2$.
„ 18 . IIII . $B_1 B_2$.
„ 19 .V. $B_1 B_2$.
„ 122 „ 1 nach H „eta" $B_1 B_2$. || octo] .VIII. B_1, VIII (with I above) B_2.
„ 3 nomisma] Nummisma $B_1 B_2$.
Zwischen Z. 4 und 5 haben $B_1 B_2$: IB . Iota adiuncta beta significat dimidium solidum.
„ 5 <] ⱶ B_1, ⱶ ⱶ B_2.
„ 8 N] En $B_1 B_2$. || adiunctum $B_1 B_2$. || greco $B_1 B_2$.
„ 10 [◦] Γ° $B_1 B_2$. || Gammae B_1.
„ 12 lauda $B_1 B_2$.

---

3) X unc fehlt in B_2. || hoc est] li ÷ B_1.
6) fehlt in B_2.
17) denario (with v above) B_1; bei B_2 scheint o aus u von erster Hand corrigirt.

S. 122 Z. 13 adiectum B_2, aber corrigirt aus „adiunctum". || „habens" fehlt bei $B_1 B_2$.
„ 14 cornuum adiuncto $B_1 B_2$.
„ 15 V Latina] fix latinum $B_1 B_2$. || chiatum $B_1 B_2$.
„ 17 cotilem $B_1 B_2$.
„ 123 „ 1 Xi grecum $B_1 B_2$. || „iunctum" fehlt $B_1 B_2$.
„ 3 „habuerit" fehlt $B_1 B_2$.
„ 4 acitabulum quod greci oxifalona $B_1 B_2$.
„ 5 mi grecum superposito N. latino $B_1 B_2$.
„ 6 mna $B_1 B_2$.
„ 7 T^A^. T] Aλ B_1, Aλa B_2. || lauda grecum $B_1 B_2$.
„ 9 X°. X] λo B_1, λoa B_2. || superiori $B_1 B_2$.
„ 10 coniuncta . kenix $B_1 B_2$.

Hierauf folgt in B_1 von jüngerer Hand, etwa des XI. Jahrhunderts, was bei Hultsch ib. S. 138 Z. 24 bis S. 139 Z. 18 steht. Die Abweichungen sind:

S. 138 Z. 27 „In pondere" ist zu dem Folgenden gezogen.
„ 139 „ 2 quatuor autem.
„ 5 faciunt] reddunt.
„ 17 sed] ʃ.

B_2 hat diesen Abschnitt nicht.

INC. NOMINA PONDERUM MEDICINALIUM QUORUM MENTIO IN SINGULIS CONFECTIONIBUS CONTINETUR.

Obolus est scripulus dimidius . siliquae . III.
Coclearium . scripulus . I . et dimidius, id est siliquae . VIIII.
Dragma . scripuli . III . id est siliquae . XVIII. 5
Ulcae . scripuli . III.
Stater habet dragmas . IIII . id est scripulos . XII . facit semunciam siliquarum . LXXII.
Cyatus habet dragmas . X . id est scripulos XXX . facit unciam . I . scripulos . VI . siliquas . CLXXX. 10
Acitabulum habet dragmas . XVI . id est scripulos . XLV . facit unciam Iʃ & scripulos . VIIII . siliquas . CCLXX.
Cotula habet dragmas . LXXII . id est scripulos . CCXVI . facit uncias . VIIII . siliquas . ∞CCXCVI.
Mina habet stateres . XXV . id est dragmas . C . scripulos . CCC . facit libram . I . siliquas . ∞DCCC. 15
Talentum habet minas . LX . facit libras . LXXIʃ . siliquas . CVIII.

---

1) „Inc." fehlt bei B_2. || „singulis" fehlt bei B_2.
6) Ulc*e B_2.

Libra habet scripulos . CCLXXXVIII . facit dragmas . XCVI.
Congius habet ⅌.VI.
⅌ habet ⚌ XVIII.
Cyatus habet ⚌ IS·
Cotula habet cyatos .VI.
Acitabulum habet octavam partem sextarii.
Cocleare habet tertiam partem cyati.
Sextarius vini habet libram . I . ⚌ .VI.
Sextarius olei habet libram . IS·
Sextarius mellis habet libras . IIS·
Ulcen dragma . I . id est scripuli . III.
Tetrobolon . dragmae . XV . id est scripuli . XLV.

Bei B_1 ist parallel mit dem oben aus B_1 Erwähnten gleichfalls von derselben jüngeren Hand noch beigeschrieben:

Calculus minimus est omnium; ponderatur enim hordei grano uno aut lentis granis duobus. Siliqua secundum quosdam ponderatur hordei granis IIII . inde et obulus, cum eius triplus sit, granis hordei . XII . Secundum quosdam autem siliqua ciceris granis et lentis granis mediatis . III . ac inde
5 obulus, cum eius sit triplus, ciceris granis . VIIII . asseverant constare. Scripulus et gramma et olca nominatur; constat autem obolis duobus. Emina, id est sextarius dimidius, ponderatur libra una, sextarius libris duobus, koenix sextariis . III ., cinath sextariis .V., congius sextariis .VI. Modius vero . XXII . sextarios. Urna modius semis. Satum sextarios XXXIII.
10 Batus sextarios . L . Medimna modii .V. Artaba sextarios LXXII. Gomor modii . XV. Chorus modii . XXX.

De mensuris in liquidis.

Coclear minimum in mensuris, id est dragma et dimidia. Them̄ coclearia II. Mistrum themes III. Ciatus dragmae . X . Acitabulum vel oxiphalon
15 dragmae . XV. Emina C̄ dragmae, sextarius CC dragmae. Amphora urne II. Sextarius vini aut aquae libra una et uncia semis. Sextarius olei libra et semis. Semis libra et duae librae sextarius mellis.

Am Rande der letzten Columne steht in B_1 von späterer Hand des X. oder XI. Jahrhunderts:

— obolus.
⚌ oboli duo.

---

3) cum eius] cuei B_1.
6) gamma B_1.
8) sextarius . III . B_1.
12) Bei B_1 Alles in einem Zuge, ohne besondere Zeile für die Ueberschrift.
15) C̄ dramae B_1.

T	oboli tres.
ϝ	oboli . IIII .
Є	oboli quinque.
<	dragma.
ƚIϑ	siliquae .VIII .
N	solidus.
Ib	solidus dimidius.
KY	cyatus.
KO	emina.
ʒ	acitabulus.
ΓO	uncia.
NΓ	semuncia.
Ʒ	sextarius.
$\overset{N}{M}$	mina.
T	talentum.
λ_{ι}	libra.

Kleinere Mittheilungen.

I. Ueber algebraische Curven, deren Punkte sich mit einer Variablen in eindeutige Beziehung setzen lassen.

Diese Curven wurden schon mehrfach untersucht und es soll der Zweck dieser kurzen Note sein, zu zeigen, wie sich die Haupteigenschaften der besagten Curven aus ihrem oben angedeuteten Merkmale ableiten lassen.

Wir fassen eine Curve C_n n^{ter} Ordnung ins Auge, von welcher wir voraussetzen, dass sich jeder ihrer Punkte durch einen Werth eines veränderlichen Parameters eindeutig bestimmen lässt, während auch umgekehrt jedem Punkte der Curve nur ein einziger Parameterwerth entsprechen soll.* Den Parameter des variablen Punktes x der Curve wollen wir kurz auch mit x bezeichnen. Nach unserer Voraussetzung entspricht also jedem Curvenpunkte ein einziger x-Werth und umgekehrt jedem x-Werthe ein einziger Curvenpunkt.

Da zwei Punkte x_1, x_2 der Curve C_n eine Gerade G und folglich auch deren $n-2$ weitere Schnittpunkte mit der Curve C_n bestimmen, so werden sich die Parameterwerthe der letzteren Punkte aus den zwei Parametern x_1, x_2 bestimmen lassen. Es wird sich somit eine Beziehung in Form einer Gleichung zwischen den Parametern x_1, x_2, x_3 dreier Punkte der Curve C_n, welche in gerader Linie liegen, aufstellen lassen.

Wir wollen diese Gleichung:

$$f(x_1 x_2 x_3) = 0 \tag{1}$$

zum Ausgangspunkte unserer Betrachtungen machen. Was die Form der Gleichung 1) anbelangt, so lässt sich von ihr im Allgemeinen behaupten,

---

1) Hierbei ist ein Doppelpunkt wirklich als ein doppelter Punkt aufzufassen, so dass einer solchen Stelle der Curve zwei von einander verschiedene Parameter entsprechen.

dass sie in jeder der drei variablen vom $(n-2)^{\text{ten}}$ Grade sein müsse. Denn nimmt man für zwei von den drei Variablen beliebige Werthe an, so sind hierdurch zwei Punkte von C_n unzweideutig bestimmt und die dritte Variable gehört dann als Parameter solchen Punkten von C_n an, welche auf der Verbindungslinie der beiden angenommenen liegen. Auf dieser Verbindungslinie liegen jedoch (weil C_n von der n^{ten} Ordnung ist) ausser den zwei angenommenen noch $(n-2)$ weitere Punkte, woraus folgt, dass Gleichung 1) bei gegebenen Werthen zweier der drei Grössen $x_1 x_2 x_3$ $(n-2)$ Werthe für die dritte liefern müsse und dass folglich die Gleichung 1) bezüglich jeder der drei Variablen eine Gleichung $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades sein müsse. Ueberdies erkennt man, dass, wenn $f(x_1 x_2 x_3)=0$ von einem Werthsystem $x_1 x_2 x_3$ erfüllt wird, diese Gleichung auch von jedem andern aus $x_1 x_2 x_3$ durch Vertauschung gebildeten Werthsystem erfüllt werden muss. Denn sind $x_1 x_2 x_3$ drei Punkte einer Geraden, so sind es ebenso $x_2 x_1 x_3$, $x_3 x_2 x_1$ u. s. w.; es wird also die Gleichung 1) im Allgemeinen in x_1, x_2, x_3 symmetrisch sein. Das Gesagte genügt, um zu erkennen, dass Gleichung 1) in folgende Form gebracht werden kann:

$$1)\quad \begin{aligned} & A\, x_1^{n-2} x_2^{n-2} x_3^{n-2} \\ & + B\,(x_1^{n-2} x_2^{n-2} x_3^{n-2} + x_1^{n-2} x_2^{n-3} x_3^{n-2} + x_1^{n-3} x_2^{n-2} x_3^{n-2}) + \ldots = 0. \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich nun sofort die Hauptcharaktere unserer Curve C_n, nämlich: Classe, Zahl der Inflexions- und Doppeltangenten.

Ein Inflexionspunkt der Curve C_n ist eine Stelle derselben, für welche Gleichung 1) von drei gleichen Parameterwerthen erfüllt wird, denn die Inflexionstangente schneidet die Curve in drei unendlich nahen Punkten. Setzt man also in 1): $x_2=x_3=x_1$, so erhält man die Gleichung für die Inflexionspunkte der Curve. Diese Gleichung wird aber offenbar in x_1 vom $3(n-2)^{\text{ten}}$ Grade, woraus folgt:

„Die Curve C_n besitzt $3(n-2)$ Inflexionspunkte."

Die Parameter der Inflexionspunkte sind also die Wurzeln der Gleichung

$$2)\qquad f(x_1 x_1 x_1)=0.$$

Denkt man sich in 1) einen Parameter, z. B. x_1, constant, so stellt diese Gleichung die Beziehung zwischen den Parametern der Punkte $x_2 x_3$ dar, welche durch Gerade, die durch x_1 gehen, auf C_n bestimmt werden. Eine solche Gerade wird aber zur Tangente, wenn $x_2=x_3$ wird. Um also die Berührungspunkte der durch einen Punkt x_1 gehenden Tangenten von C_n zu finden, hat man in 1) $x_3=x_2$ zu setzen. Die entstehende Gleichung

$$3)\qquad f(x_1 x_2 x_2)$$

ist in x_2 offenbar vom Grade $2(n-2)$, und folglich lassen sich durch jeden Punkt der Curve C_n an sie $2(n-2)$ Tangenten legen, und da die Tangente des betreffenden Punktes für zwei durch ihn gehende Tangenten gilt, so

lassen sich durch jeden Punkt an unsere Curve C_n $2(n-2)+2$, d. i. $2(n-1)$ Tangenten legen, woraus also folgt:

„Die Curve C_n ist von der $2(n-1)^{\text{ten}}$ Classe.“

Die Gleichung 3) stellt die Beziehung zwischen einem Punkte x_2 der Curve und den $(n-2)$ Punkten (x_1) dar, in welchen C_n von der Tangente des Punktes x_2 getroffen wird. Fallen von diesen $(n-2)$ Punkten zwei zusammen, so ergiebt sich eine Doppeltangente der Curve C_n, für welche x_2 und der doppelte von den Punkten x_1 Berührungspunkte sind. Um also die Zahl und die Berührungspunkte der Doppeltangente von C_n zu finden, hat man nur zu bestimmen, für wieviele und für welche Werthe von x_2 die Gleichung 3) zwei gleiche Wurzeln x_1 erhält. Damit 3) für x_1 zwei gleiche Wurzeln liefert, ist nothwendig, aber auch hinreichend, dass die Discriminante verschwinde. Diese ist, weil 3) in x_1 vom $(n-2)^{\text{ten}}$ Grade in den Coefficienten von x_1, vom Grade $2(n-3)$, und da diese Coefficienten in x_2 vom Grade $2(n-2)$ sind, so ist die entstehende Gleichung in x_2 vom Grade $4(n-2)(n-3)$. Diese Gleichung wird die Berührungspunkte der Doppeltangenten liefern, und da jeder Doppeltangente zwei Berührungspunkte zukommen, so ergiebt sich:

„Die Curve C_n besitzt $2(n-2)(n-3)$ Doppeltangenten.“

Nachdem man so die Classe, die Inflexions- und Doppeltangenten von C_n bestimmt hat, ist es nicht schwer, diejenigen Singularitäten von C_n anzugeben, welche diese Curve von den allgemeinen Curven n^{ter} Ordnung unterscheiden werden. Es werden dies, der erniedrigten Classenzahl wegen, im Allgemeinen Doppelpunkte sein. Bezeichnet man ihre Zahl mit x, so ergiebt sich einer bekannten Gleichung zufolge für x:

$$n(n-1)=2(n-1)+2x,$$

und hieraus:

$$x=\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Diese Zahl stimmt, wie man sich leicht überzeugen kann, mit den anderen von uns gefundenen Hauptmerkmalen der Curve C_n überein. Man erhält z. B. für die Zahl der Inflexionspunkte einer Curve n^{ter} Ordnung mit x Doppelpunkten bekanntlich die Zahl

$$3n(n-2)-6x$$

und folglich für unsern Werth von x nach einer einfachen Reduction

$$3(n-2),$$

wie wir auch direct gefunden hatten.

„Wenn sich also die Punkte einer Curve n^{ter} Ordnung in eindeutige Beziehung mit einem variablen Parameter setzen lassen, so ist die Curve im Allgemeinen eine mit $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Doppelpunkten.“

Es ist dies die grösste Zahl von Doppelpunkten, welche bei einer Curve n^{ter} Ordnung auftreten können, ohne dass diese in Curven niederer Ordnung zerfallen müsste.

Als besondere Fälle des von uns gefundenen stellen sich jene dar, wo die Doppelpunkte von C_n theilweise zu Spitzen werden, oder wo durch das Zusammenfallen dieser Doppelpunkte mehrfache Punkte der Curve C_n zum Vorschein kommen.

Prag, 20. September 1870. Dr. Emil Weyr.

II. Elementares über das Dreieck.

Herr Professor C. W. Baur hat in dieser Zeitschrift* einen Satz aufgestellt, welcher einen eigenthümlichen Weg angiebt, auf dem man zu der Berührungstangente ** zwischen dem einem Dreieck einbeschriebenen Kreise und dem zu demselben Dreiecke gehörigen sogenannten Kreise der neun Punkte gelangen kann, ohne von diesen beiden Kreisen auszugehen. Mit etwas veränderter Bezeichnung lautete dieser Satz:

„Wenn man die drei Eckpunkte eines Dreiecks mit A_1, A_2, A_3, die ihnen gegenüberliegenden Seiten entsprechend mit a_1, a_2, a_3 bezeichnet, und nun von A_2 aus auf a_3 die Strecke a_1 bis B_3^1, von A_3 aus auf a_2 dieselbe Strecke a_1 bis B_2^1 abträgt, darauf den Schnittpunkt b_1 der beiden Verbindungsgeraden $A_3B_3^1$ und $A_2B_2^1$ mit A_1 verbindet, und endlich den Punkt D_1 bestimmt, in welchem die soeben erhaltene Verbindungsgerade A_1b_1 die Seite a_1 oder deren Verlängerung schneidet; und wenn man sich alsdann in ganz analoger Weise durch cyclische Vertauschung der Indices die Punkte D_2 auf a_2 und D_3 auf a_3 verschafft, so liegen die drei Punkte D_1, D_2, D_3 in derselben geraden Linie, welche nichts Anderes ist, als die Berührungstangente zwischen dem einbeschriebenen Kreise und dem bekanntlich von diesem berührten Kreise der neun Punkte."

Ausser dem in diesem Theorem erwähnten einbeschriebenen Kreise k giebt es aber noch drei andere Kreise k_1, k_2, k_3, welche auch die Richtungen der Dreiecksseiten berühren, und die drei an a_1, an a_2, an a_3 anbeschriebenen Kreise heissen, je nachdem sie die Seite a_1 oder a_2 oder a_3 zwischen den Eckpunkten, die beiden anderen Seiten dagegen in ihren Verlängerungen berühren. Da nun diese drei Kreise k_1, k_2, k_3 den Kreis der neun Punkte p ebensowohl berühren wie k, so liegt die Frage nahe, ob man nicht vielleicht auch die drei Berührungstangenten zwischen p einerseits und

* Jahrg. XII S. 354, Kleinere Mittheilung XIX.

** Berührungstangente zwischen zwei sich berührenden Kreisen möge die Gerade heissen, welche beide in ihrem Berührungspunkte tangirt.

k_1, k_2, k_3 andererseits auf ähnliche Weise gewinnen kann, wie die Gerade $D_1 D_2 D_3$, welche ja nach dem Baur'schen Theoreme die Kreise p und k in ihren Berührungspunkten tangiren soll.

In der That ergiebt die Untersuchung dieser Frage das Resultat, dass man zu allen vier Berührungstangenten durch die nachfolgende Construction gelangen kann:

Man trage die Strecke a_1 erstens von A_2 aus nicht blos auf die Seite a_3 selber, sondern auch auf deren Verlängerung ab, wodurch man die beiden Punkte B_3^1 und W_3^1 erhalten möge; zweitens trage man dieselbe Strecke a_1 auch von A_3 aus auf die Richtung von a_2 sowohl nach A_1 hin, wie auch nach der entgegengesetzten Seite hin ab, wodurch man die beiden Punkte B_2^1 und W_2^1* erhalten möge; man ziehe alsdann die vier Verbindungsgeraden $A_2 B_2^1$, $A_2 W_2^1$, $A_3 B_3^1$, $A_3 W_3^1$, und bestimme die vier Schnittpunkte

C_1 von $A_2 B_2^1$ und $A_3 B_3^1$,
C_1^1 " $A_2 W_2^1$ " $A_3 W_3^1$,
C_1^2 " $A_2 W_2^1$ " $A_3 B_3^1$,
C_1^3 " $A_2 B_2^1$ " $A_3 W_3^1$;

alsdann verbinde man diese vier Punkte mit A_1, wodurch man vier Gerade $A_1 C_1$, $A_1 C_1^1$, $A_1 C_1^2$, $A_1 C_1^3$ erhält, welche die Seite a_1 oder deren Verlängerung entsprechend in den vier Punkten D_1, D_1^1, D_1^2, D_1^3 schneiden; endlich wiederhole man durch cyclische Vertauschung der Indices zweimal dieselbe Construction, indem man nun a_2 und a_3 in derselben Weise bevorzugt, wie eben a_1 bevorzugt wurde.

Dann hat man schliesslich auf jeder Dreiecksseite vier Punkte erhalten, nämlich

D_1, D_1^1, D_1^2, D_1^3 auf a_1,
D_2, D_2^2, D_2^3, D_2^1 " a_2,
D_3, D_3^3, D_3^1, D_3^2 " a_3,

von welchen zwölf Punkten je vier in derselben Geraden liegen, nämlich:

D_1, D_2, D_3 in d,
D_1^1, D_2^1, D_3^1 in d_1,
D_1^2, D_2^2, D_3^2 in d_2,
D_1^3, D_2^3, D_3^3 in d_3,

und zwar sind diese vier Geraden d, d_1, d_2, d_3 die obenerwähnten Berührungstangenten zwischen dem Kreise p und den vier Kreisen k, k_1, k_2, k_3.

* Was die Bezeichnung hier und im Folgenden anbetrifft, so bedeuten die Ziffern, welche an Punkte bezeichnende grosse Buchstaben oben oder unten angefügt sind, immer Indices, und zwar soll ein unten angefügter Index andeuten, dass der entsprechende Punkt, wenn er auf einer Dreiecksseite liegt, auf derjenigen liegt, welche mit demselben Index behaftet ist. Dagegen soll der einem Punkte B oder W oben angefügte Index anzeigen, dass der Punkt durch Abtragung der Dreiecksseite von gleichem Index erhalten ist.

Um dies nachzuweisen, suchen wir zuvörderst die Verhältnisse auf, nach welchen die Dreiecksseiten von den zwölf Punkten D getheilt werden, und berücksichtigen dabei, dass gleichgerichtete Strecken gleiche, entgegengesetzt gerichtete entgegengesetzte Vorzeichen erhalten, dass also z. B. $A_2D_1 = -D_1A_2$, und $\frac{A_2D_1}{A_3D_1}$ negativ ist, wenn D_1 auf A_2A_3 zwischen A_2 und A_3 liegt, dagegen positiv ist, wenn D_1 auf der Verlängerung von A_1A_2 liegt. Dann ist, weil sich die drei Eckpunktstransversalen A_1D_1, $A_2B_2^1$, $A_3B_3^1$ der oben angegebenen Construction gemäss in demselben Punkte C_1 schneiden, nach dem Satze des Ceva:

$$\frac{A_2D_1}{A_3D_1}\cdot\frac{A_3B_2^1}{A_1B_2^1}\cdot\frac{A_1B_3^1}{A_2B_3^1} = -1$$

oder

$$\frac{A_2D_1}{A_3D_1}\cdot\frac{a_1}{a_1-a_2}\cdot\frac{a_1-a_3}{a_1} = -1,$$

also

$$\frac{A_2D_1}{A_3D_1} = -\frac{a_1-a_2}{a_1-a_3}.$$

In derselben Weise ergeben sich aus der Construction die Verhältnisse für die übrigen elf Punkte D, so dass man erhält:

$$\frac{A_2D_1}{A_3D_1} = -\frac{a_1-a_2}{a_1-a_3}, \qquad \frac{A_2D_1^1}{A_3D_1^1} = -\frac{a_1+a_2}{a_1+a_3},$$

$$\frac{A_2D_1^2}{A_3D_1^2} = -\frac{a_1+a_2}{a_1-a_3}, \qquad \frac{A_2D_1^3}{A_3D_1^3} = -\frac{a_1-a_2}{a_1+a_3};$$

$$\frac{A_3D_2}{A_1D_2} = -\frac{a_2-a_3}{a_2-a_1}, \qquad \frac{A_3D_2^2}{A_1D_2^2} = -\frac{a_2+a_3}{a_2+a_1},$$

$$\frac{A_3D_2^3}{A_1D_2^3} = -\frac{a_2+a_3}{a_2-a_1}, \qquad \frac{A_3D_2^1}{A_1D_2^1} = -\frac{a_2-a_3}{a_2+a_1};$$

$$\frac{A_1D_3}{A_2D_3} = -\frac{a_3-a_1}{a_3-a_2}, \qquad \frac{A_1D_3^3}{A_2D_3^3} = -\frac{a_3+a_1}{a_3+a_2},$$

$$\frac{A_1D_3^1}{A_2D_3^1} = -\frac{a_3+a_1}{a_3-a_2}, \qquad \frac{A_1D_3^2}{A_2D_3^2} = -\frac{a_3-a_1}{a_3+a_2}.$$

Daraus folgt:

$$1)\quad \frac{A_2D_1}{A_3D_1}\cdot\frac{A_3D_2}{A_1D_2}\cdot\frac{A_1D_3}{A_2D_3} = \left(-\frac{a_1-a_2}{a_1-a_3}\right)\cdot\left(-\frac{a_2-a_3}{a_2-a_1}\right)\cdot\left(-\frac{a_3-a_1}{a_3-a_2}\right) = +1,$$

und ebenso ergiebt sich:

$$2)\quad \frac{A_2D_1^1}{A_3D_1^1}\cdot\frac{A_3D_2^1}{A_1D_2^1}\cdot\frac{A_1D_3^1}{A_2D_3^1} = +1,$$

$$3)\quad \frac{A_2D_1^2}{A_3D_1^2}\cdot\frac{A_3D_2^2}{A_1D_2^2}\cdot\frac{A_1D_3^2}{A_2D_3^2} = +1,$$

$$4)\quad \frac{A_2D_1^3}{A_3D_1^3}\cdot\frac{A_3D_2^3}{A_1D_2^3}\cdot\frac{A_1D_3^3}{A_2D_3^3} = +1.$$

Die Anwendung der Umkehrung des Satzes des **Menalaos** auf jede dieser vier Gleichungen führt zu dem Resultat, dass viermal drei der Punkte D in derselben Geraden liegen, nämlich

1) D_1, D_2, D_3 in d, 2) D_1^1, D_2^1, D_3^1 in d_1,
3) D_1^2, D_2^2, D_3^2 in d_2, 4) D_1^3, D_2^3, D_3^3 in d_3.

Und da ferner

$$5)\quad \frac{A_2 D_1^1}{A_3 D_1^1} \cdot \frac{A_3 D_2^2}{A_1 D_2^2} \cdot \frac{A_1 D_3^3}{A_2 D_3^3} = -1,$$

$$6)\quad \frac{A_2 D_1}{A_3 D_1} \cdot \frac{A_3 D_2^3}{A_1 D_2^3} \cdot \frac{A_1 D_3^2}{A_2 D_3^2} = -1,$$

$$7)\quad \frac{A_2 D_1^3}{A_3 D_1^3} \cdot \frac{A_3 D_2}{A_1 D_2} \cdot \frac{A_1 D_3^1}{A_2 D_3^1} = -1,$$

$$8)\quad \frac{A_2 D_1^2}{A_3 D_1^2} \cdot \frac{A_3 D_2^1}{A_1 D_2^1} \cdot \frac{A_1 D_3}{A_2 D_3} = -1$$

ist, so ergiebt die Umkehrung des Satzes des **Ceva**, dass von den zwölf Geraden, welche man durch Verbindung jedes der zwölf Punkte D mit dem gegenüberliegenden Eckpunkte des Dreiecks erhält, viermal drei sich in demselben Punkte treffen, nämlich

5) $A_1 D_1^1, A_2 D_2^2, A_3 D_3^3$, 6) $A_1 D_1, A_2 D_2^3, A_3 D_3^2$,
7) $A_1 D_1^3, A_2 D_2, A_3 D_3^1$, 8) $A_1 D_1^2, A_2 D_2^1, A_3 D_3$.

Wenn nun noch gezeigt wird, dass die vier Berührungstangenten zwischen p einerseits und k, k_1, k_2, k_3 andererseits jede der Dreiecksseiten auch dem Vorzeichen nach in denselben Verhältnissen schneiden, in denen diese Seiten von den eben gefundenen Geraden d, d_1, d_2, d_3 getheilt werden, so ist damit dann auch die Richtigkeit des **erweiterten Baur-schen Theorems** nachgewiesen.

Zu dem Ende bezeichnen wir auf den drei Seiten a_1, a_2, a_3 entsprechend die Mittelpunkte mit M_1, M_2, M_3, die Höhenpunkte mit H_1, H_2, H_3, die Berührungspunkte des einbeschriebenen Kreises k mit T_1, T_2, T_3, des an a_1 anbeschriebenen Kreises k_1 mit T_1^1, T_2^1, T_3^1, die von k_2 mit T_1^2, T_2^2, T_3^2, die von k_3 mit T_1^3, T_2^3, T_3^3. Ferner sollen die vier Punkte, in welchen k, k_1, k_2, k_3 den Kreis der neun Punkte p berühren, bezüglich U, U_1, U_2, U_3 heissen. Die ihnen entsprechenden Berührungstangenten mögen a_1 in E_1, E_1^1, E_1^2, E_1^3, a_2 in E_2^1, E_2^2, E_2^3, a_3 in E_3, E_3^1, E_3^2, E_3^3 schneiden. Da nun der Kreis der neun Punkte bekanntlich durch die sechs Punkte M_1, M_2, M_3, H_1, H_2, H_3 geht, so ist nach dem Tangentensatze $E_1 U_1$, wofür wir das ihm gleiche $E_1 T_1$ setzen, mittlere Proportionale zu $E_1 M_1$ und $E_1 H_1$, und Analoges muss für alle Punkte E gelten. So erhält man für jeden dieser Punkte eine Proportion, aus der sich leicht das Verhältniss bestimmen lässt, in welchem er die ihn enthaltende Dreiecksseite theilt. Wir wollen dies nur für einen der zwölf Punkte E ableiten, um einen beliebigen herauszugreifen für E_2^1, d. h. den Punkt, in welchem der an a_1 anbeschriebene Kreis a_2 berührt. Diesem Punkte entspricht die Proportion

$$E_2^1 H_2 : E_2^1 T_2^1 = E_2^1 T_2^1 : E_2^1 M_2$$

oder

$$E_2^1 H_2 - E_2^1 T_2^1 : E_2^1 T_2^1 - E_2^1 M_2 = E_2^1 T_2^1 : E_2^1 M_2,$$

d. h.

$$T_2^1 H_2 : M_2 T_2^1 = E_2^1 T_2^1 : E_2^1 M_2,$$

oder

$$M_2 T_2^1 - T_2^1 H_2 : E_2^1 M_2 - E_2^1 T_2^1 = M_2 T_2^1 : E_2^1 M_2,$$

d. h.

$$2 M_2 T_2^1 - M_2 H_2 : M_2 T_2^1 = M_2 T_2^1 : M_2 E_2^1,$$

indem im zweiten und vierten Gliede auch die Vorzeichen umgekehrt sind. Nun ist aber

$$A_1 T_2^1 = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{2}, \quad \text{also} \quad M_2 T_2^1 = \frac{a_3 + a_1}{2},$$

ferner

$$(A_1 H_2 + A_3 H_2).(A_1 H_2 - A_3 H_2) = (a_3 + a_1).(a_3 - a_1),$$

also

$$M_2 H_2 = \frac{(a_3 + a_1).(a_3 - a_1)}{2 a_2},$$

und

$$2 M_2 T_2^1 - M_2 H_2 = \frac{(a_3 + a_1)(2 a_2 - a_3 + a_1)}{2 a_2},$$

daher

$$M_2 E_2^1 = \frac{\frac{a_2}{2}(a_3 + a_1)}{2 a_2 - a_3 + a_1},$$

daher

$$A_1 E_2^1 = \frac{a_2}{2}\left(\frac{a_3 + a_1}{2 a_2 - a_3 + a_1} + 1\right) \quad \text{und} \quad A_3 E_2^1 = \frac{a_2}{2}\left(\frac{a_3 + a_1}{2 a_2 - a_3 + a_1} - 1\right),$$

also das Verhältniss beider

$$\frac{A_1 E_2^1}{A_3 E_2^1} = \frac{a_3 + a_1 + (2 a_2 - a_3 + a_1)}{a_3 + a_1 - (2 a_2 - a_3 + a_1)} = \frac{a_2 + a_1}{a_3 - a_2} = -\frac{a_2 + a_1}{a_2 - a_3}.$$

Der Punkt E_2^1 theilt also a_2 auch dem Vorzeichen nach in ganz demselben Verhältniss, wie der Punkt D_2^1, fällt also mit ihm zusammen. Man übersieht sehr bald, dass auch jeder andere Punkt E mit demjenigen unter den Punkten D identisch ist, welcher dieselben Indices hat. Demnach fällt auch jede Gerade e in die mit demselben Index behaftete Gerade d, was der Inhalt unserer früheren Behauptungen war.

Das einfache Gesetz, nach welchem oben die zwölf Punkte C und die zwölf Punkte D construirt sind, und das uns schon zu einer Reihe von Beziehungen der Lage unter den Punkten D geführt hat, ist geeignet, uns vermuthen zu lassen, dass damit der Schatz der geometrischen Beziehungen zwischen den vielen Punkten und Geraden, auf die wir gekommen sind, noch nicht erschöpft ist. Die auf der Lage der Punkte C und D zu einander beruhenden Relationen lassen sich alle in der Form aussprechen, dass entweder drei Punkte in derselben Geraden liegen, oder reciprok dazu drei

Gerade durch denselben Punkt gehen. Von diesen Beziehungen mögen einige hier kurz angeführt werden.

Von den sechs Verbindungsgeraden $C_1 C_1^1$, $C_2 C_2^2$, $C_3 C_3^3$, $C_1^2 C_1^3$, $C_2^1 C_2^3$, $C_3^1 C_3^2$ lassen sich viermal drei derartig zu einem Tripel zusammenstellen, dass die drei Geraden eines solchen Tripels sich in demselben Punkte schneiden. Diese vier Tripel sind:

9) $C_1 C_1^1$, $C_2 C_2^2$, $C_3 C_3^3$, 10) $C_1 C_1^1$, $C_2^3 C_2^1$, $C_3^1 C_3^2$,

11) $C_1^2 C_1^3$, $C_2 C_2^2$, $C_3^1 C_3^2$, 12) $C_1^2 C_1^3$, $C_2^1 C_2^3$, $C_3 C_3^3$,

und zwar sind die vier Punkte, von denen jeder der gemeinsame Schnittpunkt dreier Verbindungsgeraden ist, die Eckpunkte eines Vierecks, dessen sechs Seiten diese Geraden sind. Ganz dasselbe findet auch bei den nachfolgenden vier Tripeln von Verbindungsgeraden statt:

13) $C_1 C_1^1$, $C_2 C_2^2$, $C_3 C_3^3$, 14) $C_1 C_1^1$, $C_1^3 C_3^1$, $C_2^1 C_1^2$,

15) $C_2^3 C_3^2$, $C_2 C_2^2$, $C_2^1 C_1^2$, 16) $C_2^3 C_3^2$, $C_1^3 C_3^1$, $C_3 C_3^3$.

Ferner bilden die sechs Punkte C_1^2, C_1^3, C_2^3, C_2^1, C_3^1, C_3^2 ein Sechseck, von dessen 15 Seiten dreimal je drei sich in demselben Punkte treffen, nämlich: 17) $C_2^1 C_3^1$, $C_1^2 C_1^3$, $C_2^3 C_3^2$, 18) $C_3^2 C_1^2$, $C_2^3 C_2^1$, $C_3^1 C_1^3$,

19) $C_1^2 C_2^1$, $C_1^3 C_2^3$, $C_3^1 C_3^2$.

Zu der reciproken Beziehung, welche aussagt, dass drei Punkte in derselben Geraden liegen, gelangt man, wenn man sich die sechs Punkte aufsucht, in denen a_1 von $C_1 C_1^1$ und $C_1^2 C_1^3$, a_2 von $C_2 C_2^2$ und $C_2^3 C_2^1$, a_3 von $C_3 C_3^3$ und $C_3^1 C_3^2$ geschnitten wird. Dann liegen nämlich viermal drei dieser Punkte in derselben Geraden, und zwar die Schnittpunkte von

20) $C_1^2 C_1^3$ und a_1, $C_2^3 C_2^1$ und a_2, $C_3^1 C_3^2$ und a_3;

21) $C_1^2 C_1^3$ und a_1, $C_2 C_2^2$ und a_2, $C_3 C_3^3$ und a_3;

22) $C_1 C_1^1$ und a_1, $C_2^3 C_2^1$ und a_2, $C_3 C_3^3$ und a_3,

23) $C_1 C_1^1$ und a_1, $C_2 C_2^2$ und a_2, $C_3^1 C_3^2$ und a_3,

und zwar bilden diese vier Geraden, auf denen je drei der Punkte liegen, ein Vierseit, dessen sechs Eckpunkte diese Punkte sind. Ganz dasselbe findet statt bei den sechs Punkten, in denen a_1 von $C_2^3 C_3^2$ und $C_2^1 C_3^1$, a_2 von $C_3^2 C_1^3$ und $C_3^2 C_1^2$, a_3 von $C_1^2 C_2^1$ und $C_1^3 C_2^3$ geschnitten wird. Dann sind die vier Tripel von Schnittpunkten, welche in gerader Linie liegen, folgende:

24) $C_2^3 C_3^2$ und a_1, $C_1^3 C_3^1$ und a_2, $C_1^2 C_2^1$ und a_3,

25) $C_2^3 C_3^2$ und a_1, $C_3^2 C_1^2$ und a_2, $C_1^3 C_2^3$ und a_3,

26) $C_2^1 C_3^2$ und a_1, $C_3^1 C_1^3$ und a_2, $C_1^3 C_2^3$ und a_2,

27) $C_2^1 C_3^1$ und a_1, $C_3^2 C_1^2$ und a_2, $C_1^2 C_2^1$ und a_3.

Schliesslich ist vielleicht noch erwähnenswerth, dass viele der angeführten geometrischen Relationen sich noch in etwas anderer Form aussprechen lassen, indem nämlich in ihnen die Eigenschaft von sechs Geraden enthalten ist, Tangenten eines und desselben Kegelschnittes zu sein, oder von sechs Punkten, Punkte eines und desselben Kegelschnittes zu sein.

Potsdam, 10. December 1870. Dr. H. SCHUBERT.

Tabelle I.

	1	
	ĪI	Ī
	ĪDCCCC	DC
	ĪDC	DC
	ĪCCCC	DC
5	ĪCC	DC
	Ī	D
	DCCC	CC
	DC	CC
	CCCC	CC
10	CC	C
	CLXXX	LX
	CLX	LX
	CXL	LX
	CXX	LX
15	C	L
	LXXX	XL
	LX	XX
	XL	XX
	XX	X
20	XVIII	VIII
	XVI	VIII
	XIIII	VII
	XII	VI
	X	V
25	VIII	IIII
	VI	III
	IIII	II
	II	I
	Iſſſ-	ſſſ-
30	Iſſ	ſſſ
	Iſ	ſſ-
	Iℨℨ	ſſ
	Iʒ	ſ-
	I	ſ
35	ſſſ	ℨℨ-
	ſſ	ℨℨ
	ſ	ℨ-
	ℨℨ	ʒ
	ℨ-	ℒ-
40	ʒ	⁄
	⁄	ℒ
	ℒ◡	◡◡
	ℒ	ɔ
	ω	◡
45	◡	Ψ

	11	12	13
	V̄II	Ī	V̄ĪĪĪ
	V̄ICCC	DCCCC	V̄IICC
	V̄DC	DCCC	V̄ICCCC
	ĪĪĪĪDCCCC	DCC	V̄DC
5	ĪĪĪĪCC	DC	ĪĪĪĪDCCC
	ĪĪĪD	D	ĪĪĪĪ
	ĪĪDCCC	CCCC	ĪĪĪCC
	ĪĪC	CCC	ĪĪCCCC
	ĪCCCC	CC	ĪDC
10	DCC	C	DCCC
	DCXXX	LXL	DCCXX
	DLX	LXXX	DCXL
	CCCCLXL	LXX	DLX
	CCCCXX	LX	CCCCLXXX
15	CCCL	L	CCCC
	CCLXXX	XL	CCCXX
	CCX	XXX	CCXL
	CXL	XX	CLX
	LXX	X	LXXX
20	LXIII	VIIII	LXXII
	LVI	VIII	LXIIII
	XLVIII	VII	LVI
	XLII	VI	XLVIII
	XXXV	V	XL
25	XXVIII	IIII	XXXII
	XXI	III	XXIIII
	XIIII	II	XVI
	VII	I	VIII
	VIℨℨ	ſſſ-	VIIℨℨ
30	Vſſſ	ſſſ	VIſſ
	Vʒ-	ſſ-	VI
	IIIIſſ	ſſ	Vℨℨ
	IIII⁄	ſ-	IIIIſſ
	IIIſ	ſ	IIII
35	IIſſſ-	ℨℨ-	IIIℨℨ
	IIℨℨ	ℨℨ	IIſſ
	Iſſ-	ℨ-	II
	Iʒ	ʒ	Iℨℨ
	ſſſℒ	ℒ-	I
40	ſ	⁄	ſſ
	ʒℒ	ℒ	ℨℨ
	ʒ◡◡	◡◡	ʒℒ◡
	ℒɔ	ɔ	ʒ
	⁄◡	◡	⁄◡◡
45	[illegible]	Ψ	[illegible]

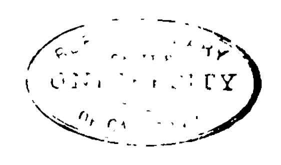
REESE LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

126	127
XLIIII	
XXII	
XLVIII	
XXXVI	
XIIII	
XVI	
XII	
XLVIII	Duc V
VIII	
XLVIII	Duc VII
VI	
XVI	Duc III
XIIII	Duc V
XLVIII	Duc XI
III	
XLVIII	Duc XIII
XIIII	Duc VII
XVI	Duc V
II	
XLVIII	Duc XVII
VIII	Duc III
XLVIII	Duc XVIIII
XII	Duc V
XVI	Duc VII
XXIIII	Duc XI
XLVIII	Duc XXIII
I	
XLVIII	Duc XXV
XXIII	Duc XIII
XVIII	Duc VIIII
XII	Duc VII
XLVIII	Duc XXVIIII
VIII	Duc V
XLVIII	Duc XXXI
II	Duc II
XVI	Duc XI
XXIIII	Duc XVII
XLVIII	Duc XXXV
III	Duc III
XLVIII	Duc XXXVII
XXIIII	Duc XVIIII
XVI	Duc XIII
VI	Duc V
XLVIII	Duc XLI
VIII	Duc VII

128	129	130
ł ʃʃʃ-	deduc pars XII	Duc XI
ł ʃʃʃ-ↄ	„ „ XVI	Duc XV
ł ʃʃʃ-ℒ	„ „ XXIIII	Duc XXIII
ł ʃʃʃ-ℒↄ	„ „ XLVIII	Duc XLVII

128	129		130
I as	XII	unciae	ℋ CCLXXXVIII
ʃʃʃ- labus	XI	unciae	ℋ CCLXIIII
ʃʃʃ distas	X	unciae	ℋ CCXL
ʃ- dodras	VIIII	unciae	ℋ CCXVI
ʃʃ bisse	VIII	unciae	ℋ CXCII
ʃ- septus	VII	unciae	ℋ CLXVIII
ʃ semis	VI	unciae	ℋ CXLIIII
ℌ- quincus	V	unciae	ℋ CXX
ℌ treas	IIII	unciae	ℋ XCVI
ʒ- quadras	III	unciae	ℋ LXXII
ʒ sextas	II	unciae	ℋ XLVIII
ℒ- sescuncia	I	uncia et semis	ℋ XXXVI
⁄ uncia			ℋ XXIIII
ℒ semuncia			ℋ XII
ᴗᴗ duae sescle			ℋ VIII
ↄ sicilicus			ℋ VI
ᴗ sescle			ℋ IIII
ψ dimidia sescle			ℋ II
ℋ scripulus.			

BERSE UNIV





III.

Zur Theorie der Erdtemperatur.

Von

Dr. O. Frölich,

Docent an der Akademie Hohenheim.

Die Absicht, welche Physiker und Meteorologen bei Beobachtungen der Erdtemperatur gewöhnlich verfolgen, ist entweder die Erlangung einer Anschauung über den Gang derselben im Vergleich zur Lufttemperatur, über die Grösse der jährlichen und täglichen Schwankung in den verschiedenen Tiefen, über die Art der Fortpflanzung der einzelnen Störungen von der Oberfläche nach unten u. s. w., oder aber die Auffindung der numerischen Werthe für die in Betracht kommenden Wärmeconstanten des Erdbodens und für die Wärmequellen, welche die Temperatur der Erde bedingen, die Sonnenwärme, die Himmelswärme und die Eigenwärme der Erde. Der Endzweck, welcher durch die genannten Beobachtungen und Berechnungen schliesslich erreicht werden soll, kann wohl kein anderer sein, als die Uebertragung der aus einzelnen Fällen gewonnenen Resultate auf die ganze Erde und die Aufstellung der allgemeinen Bilanz zwischen Wärmeabgabe und -einnahme für die Erde und ihre Atmosphäre; denn man darf wohl behaupten, dass, wenn auch Pouillet's bekannte Untersuchungen eine Vorstellung geliefert haben für die Werthe der ausserhalb der Erde liegenden Wärmequellen, dennoch diese Werthe keine genauen sind und über die Art, wie dieselben beim Durchgang durch die Atmosphäre und die oberflächliche Schicht der Erde modificirt werden, beinahe Nichts bekannt ist.

Die wenigen Versuche nun, welche angestellt wurden, um die Elemente, wie die in die Erde dringende Sonnenwärme, die Temperatur des Himmels, die absorbirende Kraft der Atmosphäre u. s. w. zu berechnen, zeigen deutlich, dass weder die bisher angestellten Messungen genau genug sind, noch die theoretischen Formeln den Sachverhalt treu genug wiedergeben. Die Möglichkeit der Berechnung jener Elemente jedoch ist vorhanden;

denn bei jedem Apparat, in welchem verschiedene Ursachen irgendwelche physikalische Vorgänge bewirken, müssen sich immer auch Beobachtung und Berechnung so einrichten lassen, dass jene ursächlichen Elemente bestimmt werden können. Die Punkte, in welchen die Einrichtung der Beobachtungen der Verbesserung bedarf, lassen sich leicht angeben; namentlich gehört hierher das Schützen der Erde vor dem Eindringen des Tagwassers; von Theorie über diesen Gegenstand besitzen wir beinahe nur die Poisson'sche Formel, welche zwar das Gesetz der Temperaturveränderung liefert, aber für genaue Berechnung nicht ausreicht.

Aus diesem Grunde schien es mir wünschenswerth, die Theorie der Erdtemperatur so weit auszubilden, als es die genauere Berechnung von hierher bezüglichen Beobachtungen verlangt, und ich glaube im Folgenden dieses Ziel auch erreicht zu haben. Die Formel, welche Poisson für die Temperatur der Erde gegeben hat, ist erweitert worden durch Berücksichtigung der wechselnden Absorption der Sonnenwärme in der Atmosphäre, und es wurde ferner nach der Methode, welche Tralles (Berliner Akad. 1818—1819) angegeben hat, eine neue aufgestellt. Beide Formeln zeigen eigenthümliche Vortheile und Nachtheile in Bezug auf die Berechnung der Beobachtungen; die erstere verlangt eine Zeitdauer der Beobachtungen von wenigstens Einem Jahre, die letztere dagegen macht es möglich, aus den Beobachtungen Eines Tages und Einer Nacht sämmtliche Elemente zu bestimmen, so dass nach derselben je nach der Güte der Beobachtungen beliebig kleine oder grosse Zeiträume zur Bestimmung der Elemente mit einander verbunden werden können. Die Poisson'sche Methode stellt die Einwirkung der Sonnenwärme und analog die Temperatur der Erde für das ganze Jahr durch eine trigonometrische Doppelreihe (tägliche und jährliche Periode) dar, die Tralles'sche Methode betrachtet jeden Tag und jede Nacht für sich und bestimmt die Constanten der Nacht aus denjenigen des vorhergehenden Tages u. s. w. Die erstere Methode ist für die tägliche Periode praktisch unbrauchbar, weil ultraelliptische Integrale als Coefficienten auftreten; die letztere jedoch erlaubt, die Erdtemperatur für jeden Tag und jede Nacht als Function der Zeit darzustellen.

Die Vorstellung, von welcher ausgegangen wird, ist diejenige eines aus Erde bestehenden, nach dem Innern der Erde zu unendlichen Stabes, in welchem die Wärmeströme nur längs der Axe sich bewegen, indem die Umgebung entweder dieselbe Temperatur hat, wie der Stab, oder für Wärme undurchdringlich ist, und in welchem von einer gewissen Tiefe unter der Oberfläche an die Temperatur des Stabes der Zeit nach constant ist, aber mit der Tiefe wächst. *

* Was die Breite des Ortes betrifft, so sind die Verhältnisse im Polarkreis im Nachstehenden nicht behandelt; die Aufstellung der betreffenden Formeln unterliegt jedoch keiner Schwierigkeit.

Wir werden im Folgenden die beiden Formeln nach einander ableiten und sie dann hinsichtlich der Berechnung der Beobachtungen vergleichen. Vorerst muss jedoch der Einwirkung der Sonnenwärme eine zweckmässigere Form gegeben werden.

Entwickelung der Einwirkung der Sonnenwärme nach trigonometrischen Functionen der Zenithdistanz der Sonne.

Sei σ die in der Zeiteinheit senkrecht zur Flächeneinheit auftreffende Sonnenwärme, wenn die Entfernung der Erde von der Sonne gleich der halben grossen Axe der Erdbahn, $\varepsilon.\sigma$ derjenige Theil derselben, der in die Erde dringen würde ohne die Absorption in der Atmosphäre, wenn ferner z der Weg der Sonnenstrahlen durch die Atmosphäre, H die Höhe der Atmosphäre, α der Absorptionscoefficient der Luft für Sonnenwärme für $z=H$, ϑ die Zenithdistanz der Sonne, η die Excentricität der Erdbahn, v die wahre Länge der Sonne, ω diejenige des Perihels, so ist

$$P=\varepsilon\sigma . e^{-\alpha\frac{z}{H}} . \cos\vartheta\,[1+2\eta . \cos(v-\omega)]$$

die in der Zeiteinheit in die Einheit der Oberfläche eindringende Sonnenwärme. Die Grösse α wird für den jeweilen betrachteten Zeitraum als constant angenommen; ferner ist, wenn R der Radius der Erde,

$$\frac{z}{H}=-\frac{R}{H}\cos\vartheta+\frac{R+H}{H}\sqrt{1-\left(\frac{R}{R+H}\right)^2\sin^2\vartheta},$$

oder, wenn $\frac{R}{R+H}=k$ gesetzt wird,

$$\frac{z}{H}=\frac{1}{1-k}\left\{-k\cos\vartheta+\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}\right\}.$$

Wenn μ die Breite des Ortes, γ die Neigung der Ekliptik, v die wahre Sonnenlänge und ψ der Winkel, den der Meridian der Sonne mit dem Meridian des Ortes bildet, also der Stundenwinkel, so ist

$$\cos\vartheta=\sin\mu\sin\gamma\sin v+\cos\mu\cos\psi\sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2 v}.$$

ϑ kann nur Werthe annehmen von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, bei Auf- und Untergang der Sonne ist $\vartheta=\frac{\pi}{2}$. Wenn wir daher der Function P zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π den Werth Null geben, so ist die Entwickelung von P nach den Cosinus der Vielfachen von ϑ:

$$P=\varepsilon\sigma\,(1+2\eta\cos[v-\omega])\,\{A_0+A_1 . \cos\vartheta+A_2 . \cos 2\vartheta+\ldots\},$$

wo

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha\frac{z}{H}} . \cos\vartheta . d\vartheta, \qquad A_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha\frac{z}{H}} . \cos^2\vartheta . d\vartheta,$$

$$A_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha\frac{z}{H}} . \cos\vartheta . \cos 2\vartheta . d\vartheta$$

u. s. w.

Diese Integrale suchen wir auf einander zu reduciren.

Zunächst wird, wenn man $\vartheta = am\,u, k$ setzt und für $\cos\vartheta = \cos am\,u, k$ und $\Delta\vartheta = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\vartheta}$ die Jacobi'schen Reihen benutzt, welche nach Potenzen von $q_1 = e^{-\pi\frac{K}{K_1}}$ (Jacobi'sche Bezeichnung) fortschreiten, der Exponent $\frac{z}{H}$, mit Vernachlässigung der Ordnung q_1^2:

$$\frac{z}{H} = \tfrac{1}{2}\left\{e^{\frac{\pi}{2K_1}u} + e^{-\frac{\pi}{2K_1}u}\right\} = Cy,$$

wo

$$u = F(\vartheta) = \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\vartheta}}, \quad Cy = \tfrac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \text{ und } y = \frac{\pi}{2K_1} . u.$$

Was die Vernachlässigung betrifft, so sei bemerkt, dass nach der Pouillet'schen Annahme $H = \frac{1}{80} R$,

$$k = 0.987654, \quad q_1 = 0.0015528,$$

q_1^2 also eine sehr kleine Grösse. Führt man nun in den Integralen $A_0 A_1$ die Variable y ein, so werden dieselben sämmtlich ausgedrückt durch Integrale von der Form

$$F_m(\alpha) = \int_0^{y'} \frac{e^{-\alpha . Cy} . dy}{C_y^m},$$

wo

$$y' = \frac{\pi}{2} \frac{K}{K_1},$$

und zwar wird:

$$A_0 = \frac{2K_1}{\pi^2} . F_2(\alpha),$$

$$A_1 = \frac{4K_1}{\pi^2} \{F_3(\alpha) + 4q_1 [F_3(\alpha) - F_1(\alpha)]\},$$

$$A_2 = \frac{4K_1}{\pi^2} \{2.F_4(\alpha) - F_2(\alpha) + 8q_1 [F_4(\alpha) - 2F_2(\alpha)]\},$$

$$A_3 = \frac{4K_1}{\pi^2} \{4.F_5(\alpha) - 3.F_3(\alpha) + 12q_1 [4.F_5(\alpha) - 5.F_3(\alpha) + F_1(\alpha)]\} \text{ etc.}$$

Nun ist aber

$$F_m(\alpha) = -\frac{d}{d\alpha} F_{m+1}(\alpha);$$

es lassen sich daher alle Integrale $F(\alpha)$ durch Differentiation, resp. Integration nach α ableiten aus einem einzigen Integral dieser Reihe, das man beliebig wählen kann, und wenn für dieses eine Integral eine zur praktischen Berechnung geeignete Entwickelung gefunden wird, so sind dadurch ähnliche Entwickelungen für alle anderen gegeben.

Die obere Grenze $y' = \frac{\pi}{2}\frac{K}{K_1}$ kann ohne merklichen Fehler bis ∞ ausgedehnt werden, den Fall ausgenommen, wo α klein ist. So ist

für $\alpha = 0.5, \quad 1.0, \quad 1.5,$

wo z. B.

$$F_0(\alpha) = \tfrac{9}{10}, \quad \tfrac{4}{10}, \quad \tfrac{2}{10},$$

der bei der Ausdehnung der oberen Grenze auf ∞ begangene Fehler kleiner als $\frac{3}{10^4}$, $\frac{2}{10^7}$, $\frac{3}{10^{10}}$.

Für das Integral

$$\int_0^\infty e^{-\alpha . Cy} . dy,$$

das wir nun für $F_0(\alpha)$ setzen, besitzen wir aber eine Entwickelung; Schläfli (*Annali di Matematica*, *Serie II^a*, *Tomo I^o*, *Fasc. III*) zeigt, dass das allgemeinere Integral

$$\int_0^\infty e^{-\alpha . Cy} . S^{2\alpha} y . dy$$

einem speciellen Fall der Bessel'schen Differentialgleichung genügt, und giebt die Entwickelung desselben nach Potenzen von α. Hieraus ergiebt sich für $F_0(\alpha)$:

$$F_0(\alpha) = -\left[\Gamma'(1) + \log\frac{\alpha}{2}\right] \left\{ 1 + \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{1!\,1!} + \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^4}{2!\,2!} + \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^6}{3!\,3!} + \cdots \right\}$$
$$+ \left\{ \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{1!\,1!}\,\frac{1}{1} + \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^4}{2!\,2!}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right) + \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^6}{3!\,3!}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \cdots \right\},$$

wo nach Legendre $\Gamma'(1) = 0.577216$.

Leitet man hieraus die Entwickelungen für $F_1(\alpha)$, $F_2(\alpha)$ etc. ab und setzt dieselben in die Ausdrücke für A_0, A_1, A_2 ... ein, so erhält man schliesslich diese letzteren Grössen, die Coefficienten in der trigonometrischen Reihe für die Wirkung der Sonnenwärme P, explicite in Function von α und q_1, d. h. von dem Absorptionsvermögen und der Höhe der Atmosphäre. Man findet

$$\frac{\pi^2}{2K_1} \cdot A_0 = 1 - 1.57080 \,.\, \alpha + 0.46139 \,.\, \alpha^2 + 0.02095 \,.\, \alpha^4 +$$
$$+ 0.00067 \,.\, \alpha^6 + 0.00001 \,.\, \alpha^8 + \ldots$$
$$- \log\frac{\alpha}{2} \{0.5.\alpha^2 + 0.02083.\alpha^4 + 0.00052.\alpha^6 + 0.00001.\alpha^8 + \ldots\},$$

$$\frac{\pi^2}{4K_1} \cdot A_1 = 0.78540 - \alpha + 0.78540.\alpha^2 - 0.20936\,\alpha^3$$
$$- 0.00502.\alpha^5 - 0.00011.\alpha^7 - \ldots$$
$$+ \log\frac{\alpha}{2} \{0.16667.\alpha^3 + 0.00417.\alpha^5 + 0.00007.\alpha^7 + \ldots\}$$
$$+ 4q_1 \left\{ \begin{array}{l} -0.785 - 0.577.\alpha + 0.785.\alpha^2 - 0.146.\alpha^3 - 0.001.\alpha^5 - \ldots \\ + \log\frac{\alpha}{2}(-\alpha + 0.084 \,.\, \alpha^3 + 0.001.\alpha^5 + \ldots) \end{array} \right\},$$

$$\frac{\pi^2}{4K_1} \cdot A_2 = 0.33333 + 0.53861.\alpha^2 - 0.52360.\alpha^3 + 0.10457\,\alpha^4$$
$$+ 0.00125.\alpha^6 + 0.00001.\alpha^8 + \ldots$$
$$- \log\frac{\alpha}{2} \{-0.5.\alpha^2 + 0.06251.\alpha^4 + 0.00086.\alpha^6 + 0.00001.\alpha^8 + \ldots\}$$
$$+ 8q_1 \left\{ \begin{array}{l} -1.333 + 2.357.\alpha - 0.423.\alpha^2 - 0.262.\alpha^3 + 0.021\,\alpha^4 + \ldots \\ - \log\frac{\alpha}{2}(-\alpha^2 - \ldots) \end{array} \right\},$$

$$\frac{\pi^2}{4K_1} \cdot A_3 = 0.33333.\alpha - 0.78540.\alpha^2 - 0.03860.\alpha^3 + 0.26180.\alpha^4$$
$$- 0.04182.\alpha^5 - 0.00027.\alpha^7 - \ldots$$
$$+ \log\frac{\alpha}{2} \{-0.50001.\alpha^3 + 0.02081.\alpha^5 + 0.00019.\alpha^7 + \ldots\}$$
$$+ 12q_1 \left\{ \begin{array}{l} 1.910.\alpha - 2.356.\alpha^2 + 0.317.\alpha^3 + 0.262.\alpha^4 - 0.036.\alpha^5 - \ldots \\ + \log\frac{\alpha}{2}(\alpha - 0.750\,\alpha^3 + 0.015.\alpha^5 - 0.001.\alpha^7 - \ldots) \end{array} \right\}$$

u. s. w.

Für kleine α können diese Formeln nicht benutzt werden; in diesem Falle wird man sich wohl durch Berechnung von Tabellen helfen, oder auch die Exponentialgrösse direct entwickeln und dann integriren.

Poisson'sche Methode.

Entwickelung der Formel für die Temperatur.

Wenn t die Zeit, x die Entfernung eines Punktes in dem betrachteten Stabe aus Erde von der Oberfläche, k die innere Leitungsfähigkeit, C die specifische Wärme, D die Dichtigkeit der Erde und $K = \frac{k}{C.D}$, so ist die Differentialgleichung für die Temperatur u

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Wenn ferner h die äussere Leitungsfähigkeit der Erde, ξ die Temperatur einer über der Erde ausgebreiteten Hülle, welche der Erde dieselbe Wärme zuschickt, wie der Weltraum und die Atmosphäre zusammen, so herrschen an der Oberfläche die Bedingungen:

$$x = 0, \quad h(v - \xi) - k\frac{\partial v}{\partial x} = P.$$

Hier ist nun

$$P = 2\sigma \cdot e^{-\alpha\frac{z}{H}} \cdot \cos\vartheta\,[1 + 2\eta \cdot \cos(v - \omega)]$$

zuerst nach Cosinus der Vielfachen von ψ, dem Stundenwinkel, dann, da nur die jährliche Periode betrachtet wird, das von ψ unabhängige Glied nach Cosinus und Sinus der Vielfachen der wahren Sonnenlänge v zu entwickeln und die Sonnenlänge schliesslich in wahre Zeit zu verwandeln. Für diese Rechnung verweise ich auf meine Doctordissertation (Königsberg, 1868) und gebe hier blos das Resultat an. Wenn T die Zeit eines Jahres, so wird

$$P = \varepsilon\sigma \left\{ C_0 + S_1 \cdot \sin\frac{t}{T} 2\pi + C_2 \cdot \cos\frac{t}{T} 4\pi + \ldots \right\}.$$

Die Coefficienten C_0, S_1, C_2 sind nur in linearer Abhängigkeit von den Constanten N_0, N_1, N_2, welche nur von dem Absorptionscoefficienten α und H, der Höhe der Atmosphäre, abhängen und auf folgende Weise erhalten wurden: Um die Rechnung nicht allzu verwickelt zu machen, wurde die Reihe für $e^{-\alpha\frac{z}{H}} \cdot \cos\vartheta$ beim 3. Glied abgebrochen und gesetzt:

$$e^{-\alpha\frac{z}{H}} \cdot \cos\vartheta = N_0 + N_1 \cdot \cos\vartheta + N_2 \cdot \cos 2\vartheta,$$

wo aber N_0, N_1, N_2 nicht als Coefficienten einer Fourier'schen Reihe bestimmt sind, sondern durch die Bedingung der Methode der kleinsten Quadrate, dass nämlich

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{-\alpha\frac{z}{H}} \cdot \cos\vartheta - N_0 - N_1 \cdot \cos\vartheta - N_2 \cdot \cos 2\vartheta\right)^2 \cdot d\vartheta = Min.$$

Aus dieser Bedingung folgt, dass die N linear von den Integralen abhängen, welche oben mit A_0, A_1, A_2 bezeichnet wurden, nämlich

$$\begin{aligned}
\Delta \cdot N_0 &= -\tfrac{3}{8}\pi^2\left(1 - \frac{16}{9\pi^2}\right) \cdot A_0 + \frac{3\pi}{4} \cdot A_1 - A_2, \\
\Delta \cdot N_1 &= \frac{3\pi}{2} \cdot A_0 \qquad - \frac{3\pi^2}{8} \cdot A_1 + \frac{\pi}{2} A_2, \\
\Delta \cdot N_2 &= -2 \cdot A_0 \qquad + \frac{\pi}{2} \cdot A_1 - \frac{3\pi^2}{8}\left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right) \cdot A_2,
\end{aligned}$$

wo

$$\Delta = \tfrac{11}{6} - \tfrac{3}{16} \cdot \pi^2,$$

so dass man nur die Entwickelungen der A nach α und q_1 einzusetzen hat, um die N in Function dieser beiden Grössen zu erhalten.

Für C_0, S_1, S_2 hat man zunächst

$$\begin{aligned}
C_0 &= a_0 . N_0 + a_1 . N_1 + a_2 . N_2 ,\\
S_1 &= \lambda_0 . N_0 + \lambda_1 . N_1 + \lambda_2 . N_2 ,\\
S_2 &= \mu_0 . N_0 + \mu_1 . N_1 + \mu_2 . N_2 ;
\end{aligned}$$

a_i, λ_i, μ_i sind die bereits von Poisson berechneten Coefficienten.

Die a, λ, μ sind schliesslich mit elliptischen Integralen, welche von der Breite μ des Ortes und der Neigung γ der Ekliptik abhängen, verbunden durch eine Kette von Relationen, welche folgt (η ist die Excentricität der Erdbahn):

$$\begin{aligned}
&a_0 = a_0, && \lambda_0 = b_0 - 2\eta . a_0, && \mu_0 = 2\eta (b_0 + d_0),\\
&a_1 = a_1, && \lambda_1 = b_1 - 2\eta . a_1 - \eta . c_1, && \mu_1 = c_1 + 2\eta . b_1,\\
&a_2 = a_2, && \lambda_2 = b_2 - 2\eta . a_2 - \eta . c_2, && \mu_2 = c_2 + 2\eta (b_2 + d_2),
\end{aligned}$$

$$a_0 = \tfrac{1}{2},$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi^2 \cos\mu} (\sin^2\mu \sin^2\gamma . J_1 + 2 \cos^2\mu . H_0),$$

$$a_2 = \tfrac{1}{2} [- \sin^2\mu + \tfrac{1}{2} \sin^2\gamma (3 \sin^2\mu - 1)],$$

$$b_0 = \frac{2}{\pi^2} \operatorname{tg}\mu \sin\gamma . J_1,$$

$$b_1 = \tfrac{1}{2} \sin\mu \sin\gamma,$$

$$b_2 = \frac{2}{\pi^2} \operatorname{tg}\mu \sin\gamma \{- [\sin^2\mu - \tfrac{3}{4} \sin^2\gamma (3 \sin^2\mu - 1)] . J_1$$
$$- \tfrac{1}{12} \sin^2\gamma (3 \sin^2\mu - 1) J_2 + 3 \cos^2\mu (H_0 - H_2)\},$$

$$c_1 = \frac{1}{\pi^2 \cos\mu} [- \sin^2\mu \sin^2\gamma (J_1 - \tfrac{1}{3} J_2) + 4 \cos^2\mu . H_1],$$

$$c_2 = - \tfrac{1}{4} \sin^2\gamma (3 \sin^2\mu - 1),$$

$$d_0 = \frac{2}{3\pi^2} \operatorname{tg}\mu . \sin\gamma . J_2,$$

$$d_2 = \frac{2}{\pi^2} \operatorname{tg}\mu \sin\gamma [\tfrac{1}{2} \sin^2\gamma (3 \sin^2\mu - 1) (- \tfrac{1}{2} J_1 + \tfrac{1}{3} J_2 - \tfrac{1}{10} J_3)$$
$$- \tfrac{1}{3} \sin^2\mu . J_2 + 3 \cos^2\mu (H_1 - H_2)],$$

$$J_1 = \frac{\;}{\sin^2\gamma} \{- \cos^2\gamma (\Pi_1 - K) + \sin^2\gamma . E_1\},$$

$$J_2 = - \frac{8}{\sin^4\gamma} \{- (1 - \tfrac{5}{4} \sin^2\gamma + \tfrac{1}{4} \sin^4\gamma) (\Pi_1 - K) + (\cos^2\mu - \tfrac{1}{4} \sin^4\gamma) K$$
$$- \cos^2\mu . E_1\},$$

$$J_3 = \frac{32}{\sin^6\gamma} \left\{ \begin{aligned} &- (1 - \tfrac{7}{4} \sin^2\gamma + \tfrac{13}{16} \sin^4\gamma - \tfrac{1}{16} \sin^6\gamma) (\Pi_1 - K)\\ &+ \cos^2\mu \left(\tfrac{5}{3} - \tfrac{2}{3} \sin^2\mu - \tfrac{17}{12} \sin^2\gamma + \tfrac{1}{6} \frac{\sin^6\gamma}{\cos^2\mu}\right) K\\ &- \cos^2\mu (\tfrac{5}{3} - \tfrac{2}{3} \sin^2\mu - \tfrac{13}{12} \sin^2\gamma) E_1 \end{aligned} \right\},$$

$$H_0 = E_1,$$

$$H_1 = \frac{2}{3k^2} \{-(1-k^2) K + (1-\tfrac{1}{2}k^2) E_1\},$$

$$H_2 = -\frac{16}{3k^4} \frac{1}{1+4k^2} \{-(1-\tfrac{3}{2}k^2+\tfrac{1}{2}k^4) K + (1-k^2+\tfrac{1}{16}k^4) \cdot E_1\}.$$

Hier sind K, E_1, $\Pi_1(n, k)$, die elliptischen Integrale erster, zweiter und dritter Gattung nach der Legendre'schen Definition; für den Modul k und den Parameter n hat man

$$k = \frac{\sin\gamma}{\cos\mu}, \quad n = -\sin^2\gamma.$$

Um eine Anschauung zu geben für die Grösse der Coefficienten α, λ, μ in mittlerer Breite, folgen nachstehend ihre Werthe für Königsberg und Brüssel:

Königsberg:	Brüssel:
$a_0 = 0.5$	$a_0 = 0.5$
$a_1 = 0.19226$	$a_1 = 0.20579$
$a_2 = -0.29355$	$a_2 = -0.26884$
$\lambda_0 = 0.18448$	$\lambda_0 = 0.15669$
$\lambda_1 = 0.15621$	$\lambda_1 = 0.14758$
$\lambda_2 = 0.04393$	$\lambda_2 = 0.07810$
$\mu_0 = 0.00676$	$\mu_0 = 0.00559$
$\mu_1 = -0.00334$	$\mu_1 = 0.00007$
$\mu_2 = -0.03814$	$\mu_2 = -0.02929.$

Nachdem nun der Ausdruck für die Einwirkung der Sonnenwärme in Function der Zeit gefunden, gehen wir zur Aufstellung der Lösung über. Es sei

$$u = u_1 + u_2 + u_3,$$

wo für u_1, u_2, u_3 resp. folgende Differentialgleichungen und Bedingungen gelten [$(u)_0$ ist die Anfangstemperatur]:

$\underline{u_1}$

$$0 = \frac{d^2 u_1}{dx^2},$$

$$x = 0, \quad u_1 - \frac{k}{h}\frac{du_1}{dx} = \xi + \frac{\varepsilon\sigma}{h} \cdot C_0.$$

$$x = \infty, \quad u_1 = \text{endlich},$$

$\underline{u_2}$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = K \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2},$$

$$x = 0, \quad u_2 - \frac{k}{h}\frac{\partial u_2}{\partial x} = 0,$$

$$x = \infty, \quad u_2 = 0,$$

$$t = 0, \quad u_2 = (u)_0 - u_1 - u_3;$$

$\underline{u_3}$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2},$$

$$x = 0, \quad u_3 - \frac{k}{h}\frac{\partial u_3}{\partial x} = \frac{\varepsilon\sigma}{h}\left\{S_1 \cdot \sin\frac{t}{T} 2\pi + C_2 \cdot \cos\frac{t}{T} 4\pi + \ldots\right\},$$

$$x = \infty, \quad u_3 = 0.$$

REESE LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Für u_1 erhält man:

$$u_1 = \xi + \frac{\varepsilon\sigma}{h} C_0.$$

u_2 ist derjenige Theil der Temperatur, welcher von der Anfangswärme der Erde abhängt; bekanntlich ist gegenwärtig sein Werth ein sehr geringer. Um nicht in unnütze Wiederholungen zu verfallen, geben wir hier nur das Resultat der Poisson'schen Untersuchung. Darnach wird schliesslich

$$u_2 = f\left(1 + \frac{h}{k} x\right),$$

wo f eine von dem Anfangszustande der Erdwärme und dem Alter der Erde abhängige Constante.

Für u_3 erhält man

$$u_3 = \frac{\varepsilon\sigma}{h} \left\{ \frac{S_1}{D_1} \cdot e^{-x\sqrt{\frac{\pi}{KT}}} \cdot \sin\left(\frac{t}{T} 2\pi - x\sqrt{\frac{\pi}{KT}} - \delta_1\right) + \frac{C_2}{D_2} \cdot e^{-x\sqrt{\frac{2\pi}{KT}}} \cdot \cos\left(\frac{t}{T} 4\pi - x\sqrt{\frac{2\pi}{KT}} - \delta_2\right) + \ldots \right\},$$

wo

$$D_n = \sqrt{\left(1 + \frac{k}{h}\sqrt{\frac{n\pi}{KT}}\right)^2 + \left(\frac{k}{h}\sqrt{\frac{n\pi}{KT}}\right)^2}, \quad tg\,\delta_n = \frac{\frac{k}{h}\sqrt{\frac{n\pi}{KT}}}{1 + \frac{k}{h}\sqrt{\frac{n\pi}{KT}}}.$$

Die vollständige Lösung für die Temperatur u nach der Poisson-schen Methode ist daher

$$u = f\left(1 + \frac{h}{k} x\right) + \xi + \frac{\varepsilon\sigma}{h} C_0 + \frac{\varepsilon\sigma}{h} \left\{ \frac{S_1}{D_1} \cdot e^{-x\sqrt{\frac{\pi}{KT}}} \cdot \sin\left(\frac{t}{T} 2\pi - x\sqrt{\frac{\pi}{KT}} - \delta_1\right) + \frac{C_2}{D_2} \cdot e^{-x\sqrt{\frac{2\pi}{KT}}} \cdot \cos\left(\frac{t}{T} 4\pi - x\sqrt{\frac{2\pi}{KT}} - \delta_2\right) + \ldots \right\}.$$

Berechnung der Beobachtungen.

Die zu bestimmenden Elemente sind: K, $\frac{h}{k}$, α, $\frac{\varepsilon\sigma}{h}$, ξ, f; die beiden ersten lassen sich unmittelbar aus den Beobachtungen ermitteln, zur Bestimmung der vier übrigen ist die Kenntniss der beiden ersten nöthig. Wir geben die Methode der Berechnung, wie sie bereits Poisson angegeben hat.

Wenn man in der Formel für die Temperatur den periodischen Theil u' von der mittleren Temperatur u_1 trennt, so ist

$$u' = Q_1 \,.\, e^{-p_1 . x} \,.\, \sin\left(\frac{t}{T} 2\pi - p_1 x - \delta_1\right)$$
$$- Q_2 \,.\, e^{-p_2 . x} \,.\, \cos\left(\frac{t}{T} 4\pi - p_2 x - \delta_2\right) \ldots,$$

wo

$$Q_1 = \frac{\varepsilon\sigma}{h} \frac{S_1}{D_1}, \quad Q_2 = \frac{\varepsilon\sigma}{h} \frac{C_2}{D_2} \text{ etc.},$$
$$p_1 = \sqrt{\frac{\pi}{KT}}, \quad p_2 = \sqrt{\frac{2\pi}{KT}} \text{ etc.}$$

Für t_a und t_i, die Eintrittszeiten des Maximums und des Minimums, hat man

$$\frac{t_a}{T} 2\pi = p_1 \,.\, x + \delta_1 + \frac{\pi}{2} + \zeta_a, \quad \frac{t_i}{T} 2\pi = p_1 \,.\, x + \delta_1 + \frac{3\pi}{2} + \zeta_i,$$

wo ζ_a und ζ_i kleine Grössen, die sich leicht berücksichtigen lassen.

Wenn u_a und u_i das Maximum und das Minimum der Temperatur, so ist, abgesehen von Correctionen, die jährliche Schwankung

$$u_a - u_i = 2\, Q_1 \,.\, e^{-p_1 x};$$

nimmt man hierzu noch die Gleichung

$$\frac{t_a + t_i}{T} \pi - \pi = \delta_1 + p_1 x,$$

so lassen sich nach der Methode der kleinsten Quadrate Q_1, δ und zweimal p_1 bestimmen. Aus den beiden für p_1 erhaltenen Werthen zieht man das Mittel, K ergiebt sich dann aus p, $\frac{h}{k}$ aus δ_1 und p_1, indem

$$K = \frac{1}{p_1^2} \frac{\pi}{T} \quad \text{und} \quad \frac{h}{k} = p_1 (\cot g\, \delta_1 - 1).$$

Für die Bestimmung von α und $\frac{\varepsilon\sigma}{h}$ müssen hier die Werthe von Q_1 und Q_2 benutzt werden. Zunächst hat man für α:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = - \frac{C_2}{S_1} \frac{D_1}{D_2};$$

hier enthalten D_1 und D_2 nur die beiden Grössen $\frac{h}{k}$ und K, sind also bekannt, für C_2 und S_1 lassen sich, wie oben gezeigt wurde, Entwickelungen in α und q_1 angeben, in welchen alle Coefficienten durch die Breite des Ortes und die Schiefe der Ekliptik gegeben sind. Wenn man daher für die Höhe der Atmosphäre, resp. q_1, eine anderweitig begründete Annahme macht, so kann α aus dem Verhältniss $\frac{Q_2}{Q_1}$ bestimmt werden. Dieses Verhältniss lässt sich nach verschiedenen Methoden aus den Beobachtungen ableiten; die brauchbarste ist wohl diejenige, nach welcher man die Beobachtungen des ganzen Jahres für jede Tiefe durch zwei periodische Glieder darstellt, und dann aus ihren Coefficienten, welche Glieder von zwei geo-

metrischen Reihen sind, die entsprechenden für $x=0$ berechnet. $\frac{\varepsilon\sigma}{h}$ erhält man, indem man aus dem für α gefundenen Werth S_1 berechnet und die Gleichung

$$\frac{\varepsilon\sigma}{h}=\frac{Q_1}{S_1}D_1$$

anwendet.

Die mittlere Temperatur u_1 ist

$$u_1=f\left(1+\frac{h}{k}x\right)+\xi+\frac{\varepsilon\sigma}{h}\cdot C_0.$$

Stellt man dieselbe als lineare Function der Tiefe dar:

$$u_1=a+b\cdot x,$$

so ist

$$f=\frac{b}{\frac{h}{k}}.$$

Der Werth des Gliedes $\frac{\varepsilon\sigma}{h}\cdot C_0$ lässt sich aus α und $\frac{\varepsilon\sigma}{h}$ berechnen und man erhält daher auch endlich ξ aus

$$\xi=u_1-f\left(1+\frac{h}{k}x\right)-\frac{\varepsilon\sigma}{h}\cdot C_0.$$

Die Bestimmung der Elemente nach dieser Methode wurde zuerst von Poisson bei den Pariser Beobachtungen, ohne Rücksicht auf die Absorption in der Atmosphäre, ausgeführt; die Resultate sind aber jedenfalls ungenau, namentlich für die Hüllentemperatur ξ. Bei der Berechnung der Beobachtungen von Herrn Professor Neumann in Königsberg und Herrn Quètelet in Brüssel (in meiner Dissertation) ergaben sich bessere Resultate; dort wurde auch der Absorptionscoefficient α bestimmt.

Tralles'sche Methode.

Entwickelung der Formel für die Temperatur.

Hier wird T, die Temperatur am Tage, und N, diejenige in der Nacht, jede für sich, behandelt; die allgemeine Formel für die letztere erhält man aus der ersteren, indem man die Sonnenwärme gleich Null setzt.

Für T gelten dieselbe Differentialgleichung und dieselben Bedingungen, wie oben bei der Poisson'schen Methode; nur braucht man hier die Einwirkung der Sonnenwärme blos nach Cosinus der Vielfachen des Stundenwinkels ψ zu entwickeln, da man die Sonnenlänge v während eines Tages als constant annehmen darf; die Veränderung der Sonnenlänge wird erst berücksichtigt bei der Zusammenstellung von Beobachtungen mehrerer Tage.

Oben wurde die Entwickelung

$$e^{-\alpha\frac{z}{H}} . \cos\vartheta = A_0 + A_1 . \cos\vartheta + A_2 \cos 2\vartheta + \ldots$$

ausgeführt; für $\cos\vartheta$ hat man

$$\cos\vartheta = \varphi + \chi . \cos\psi, \text{ wo } \varphi = \sin\mu \sin\gamma \sin v,$$
$$\chi = \cos\mu \sqrt{1 - \sin^2\gamma \sin^2 v};$$

drückt man $\cos\vartheta$, $\cos 2\vartheta \ldots$ hiermit durch $\cos\psi$, $\cos 2\psi \ldots$ aus, so hat man die gesuchte Entwickelung.

Wenn

$$P = \varepsilon\sigma . e^{-\alpha\frac{z}{H}} . \cos\vartheta \cos [1 + 2\eta \cos(v - \omega)] = a_0 + a_1 . \cos\frac{t}{T}\pi + a_2 . \cos\frac{t}{T} 2\pi + \ldots,$$

indem $\psi = \frac{t}{T}\pi$, wo T nun der halbe mittlere Sonnentag = 12 Stunden, so haben die a_0, $a_1 \ldots$ die Werthe

$$\frac{a_0}{1 + 2\eta . \cos(v - \omega)} = A_0 + \varphi . A_1 + (2\varphi^2 + \chi^2 - 1) A_2 + (-3 + 4\varphi^2 + 6\chi^2)\varphi . A_3 + \ldots,$$
$$\frac{a_1}{1 + 2\eta . \cos(v - \omega)} = \chi . A + \varphi\chi . A_2 + (4\varphi^2 + \chi^2 - 1) 3\chi . A_3 + \ldots,$$
$$\frac{a_2}{1 + 2\eta . \cos(v - \omega)} = \chi^2 . A_2 + 6\varphi\chi^2 . A_3 + \ldots,$$
$$\frac{a_3}{1 + 2\eta . \cos(v - \omega)} = \chi^3 . A_3 + \ldots$$

u. s. w.

Wenn man hier von derselben Vorstellung ausgeht, wie oben, nämlich von einem unendlichen Stabe, so zeigt sich, dass der von der Anfangstemperatur abhängige Theil der Formel, welcher hier nun eine wichtige Rolle spielt, eine Form annimmt, welche die Berechnung der Beobachtungen sehr erschwert. Man ist daher genöthigt, zu einer andern Vorstellung zu greifen. Bekanntlich wird nun die Temperatur in grösserer Tiefe unter der Erdoberfläche constant; wir können uns daher auch einen Stab von der Länge L denken, dessen eines Ende in der Erdoberfläche liegt und dessen anderes Ende auf einer constanten Temperatur A erhalten wird. Wir beginnen mit der Lösung für diesen Fall und leiten dann aus derselben diejenige für einen unendlichen Stab ab.

L endlich.

Es sei, ähnlich wie oben,

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

mit folgendermassen vertheilten Bedingungen [$(T)_0$ ist die Anfangstemperatur]:

$\underline{T_1}$

$$0 = \frac{d^2 T_1}{dx^2},$$

$$x = 0, \quad T_1 - \frac{k}{h}\frac{dT_1}{dx} = \xi + \frac{\varepsilon\sigma}{h} . a_0,$$

$$x = L, \quad T_1 = A,$$

$\underline{T_2}$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = K\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2},$$

$$x = 0, \quad T_2 - \frac{k}{h}\frac{\partial T_2}{\partial x} = 0,$$

$$x = L, \quad T_2 = 0,$$

$$t = 0, \quad T_2 = (T)_0 - T_1 - T_3,$$

$\underline{T_3}$

$$\frac{\partial T_3}{\partial t} = K\frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2},$$

$$x = 0, \quad T_3 - \frac{k}{h}\frac{\partial T_3}{\partial x} = \sum_1^\infty \frac{\varepsilon\sigma}{h} a_n . \cos n\frac{t}{T}\pi,$$

$$x = L, \quad T_3 = 0.$$

Nach den bekannten Methoden erhält man schliesslich folgendes Resultat:

$$T = A\frac{1+\frac{h}{k}x}{1+\frac{h}{k}L} + \left(\xi + \frac{\varepsilon\sigma}{h}\sigma_0\right)\frac{h}{k}L\frac{1-\frac{x}{L}}{1+\frac{h}{k}L}$$

$$+ \sum D_m . \sin\omega_m\frac{L-x}{L} . e^{-\frac{\omega_m^2}{L^2}Kt}$$

$$+ \frac{\varepsilon\sigma}{h} . \sum_1^\infty a_n \frac{Y_n . \cos n\frac{t}{T}\pi + Z_n . \sin n\frac{t}{T}\pi}{N_n}.$$

Hier bedeuten die Grössen ω_m die Wurzeln der transcendenten Gleichung

$$tg\,\omega = -\frac{\omega}{\frac{h}{k}L};$$

ferner ist

$$D_m = \frac{\int_0^L dx\,[(T)_0 - (T_1)_0 - (T_3)_0] . \sin\omega_m\frac{L-x}{L}}{\int_0^L dx . \sin^2\omega_m\frac{L-x}{L}},$$

und endlich sind, wenn

$$Cx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad Sx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad L\sqrt{\frac{n\pi}{2KT}} = L', \quad x\sqrt{\frac{n\pi}{2KT}} = x',$$

die Grössen Y_n, Z_n, N_n:

$$Y_n = C(2L'-x').\cos x' - \cos(2L'-x').Cx'$$
$$+\frac{k}{h}\sqrt{\frac{n\pi}{2KT}}\left\{\begin{matrix} S(2L'-x').\cos x' - \cos(2L'-x').Sx' \\ -C(2L'-x').\sin x' + \sin(2L'-x').Cx' \end{matrix}\right\},$$
$$Z_n = S(2L'-x').\sin x' - \sin(2L'-x').Sx'$$
$$+\frac{k}{h}\sqrt{\frac{n\pi}{2KT}}\left\{\begin{matrix} S(2L'-x').\cos x' - \cos(2L'-x').Sx' \\ +C(2L'-x').\sin x' - \sin(2L'-x').Cx' \end{matrix}\right\},$$
$$N_n = C(2L') - \cos 2L' + 2\frac{k}{h}\sqrt{\frac{n\pi}{2KT}}\,[S(2L') + \sin 2L']$$
$$+2\frac{k^2}{h^2}\frac{n\pi}{2KT}\,[C(2L') - \cos 2L'].$$

Die Weitläufigkeit des periodischen Theiles macht diese Lösung zur Darstellung von Beobachtungen völlig unbrauchbar; es muss daher eine andere Form gesucht werden. Dieselbe Aufgabe lässt sich nun nach einer ganz anderen allgemeinen Methode, derjenigen der Integration nach der Zeit, behandeln; dieselbe geht von der Lösung für eine constante äussere Temperatur aus und leitet durch Einführung von kleinen, stossweise erfolgenden Aenderungen derselben die Lösung für variable äussere Temperatur ab; Herr Professor Neumann in Königsberg pflegt dieselbe vorzutragen, sonst findet sie sich, soviel uns bekannt, nirgends. Nach dieser Methode erhält man folgendes Resultat für die Temperatur am Tage:

$$\mathrm{T} = A\frac{1+\frac{h}{k}x}{1+\frac{h}{k}L} + \left(\xi + \frac{\varepsilon\sigma}{h}a_0\right)\frac{h}{k}L\frac{1-\frac{x}{L}}{1+\frac{h}{k}L}$$
$$+\sum D_m.\sin\omega_m\frac{L-x}{L}e^{-\frac{\omega_m^2}{L^2}Kt}$$
$$+\frac{\varepsilon\sigma}{h}\sum_1^\infty a_n\sum^m G_{m,n}\cos\left(n\frac{t}{T}\pi - \delta_{m,n}\right).\sin\omega_m\frac{L-x}{L}.$$

Hieraus ergiebt sich für die Temperatur in der Nacht:

$$\mathrm{N} = A\frac{1+\frac{h}{k}x}{1+\frac{h}{k}L} + \xi.\frac{h}{k}L\frac{1-\frac{x}{L}}{1+\frac{h}{k}L} + \sum N_m.\sin\omega_m\frac{L-x}{L}.e^{-\frac{\omega_m^2}{L^2}Kt}.$$

Hier ist

$$tg\,\delta_{m,n} = \frac{\frac{n\pi}{T}}{\frac{\omega_m^2}{L^2}K},\qquad G_{m,n} = 4\,\frac{\cos\omega_m.\cos\delta_{m,n}}{\sin 2\omega_m - 2\omega_m}$$

und die Constanten N_m sind die analogen Grössen für die Temperatur in der Nacht, wie die D_m für die Temperatur am Tage. *

L unendlich.

Setzt man in der für ein endliches L erhaltenen Lösung L unendlich, so erhält man:

$$T = \xi + \frac{\varepsilon\sigma}{h} \cdot a_0 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\lambda \frac{\lambda \cos \lambda x + \frac{h}{k} \sin \lambda x}{\left(\frac{h}{k}\right)^2 + \lambda^2} \times$$

$$\times e^{-\lambda^2 Kt} \cdot \int_0^\infty \left\{ (T)_0 - (T_1)_0 - (T_2)_0 \right\} \left\{ \lambda \cos \lambda x' + \frac{h}{k} \sin \lambda x' \right\} \cdot dx'$$

$$+ \frac{\varepsilon\sigma}{h} \sum_1^\infty \frac{a_n}{D_n} e^{-x\sqrt{\frac{n\pi}{2KT}}} \cdot \cos\left(n \frac{t}{T} \pi - x\sqrt{\frac{n\pi}{2KT}} - \delta_n\right),$$

$$N = \xi + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\lambda \frac{\lambda \cos \lambda x + \frac{h}{k} \sin \lambda x}{\left(\frac{h}{k}\right)^2 + \lambda^2} \times$$

$$\times e^{-\lambda^2 Kt} \cdot \int_0^\infty \left\{ (N)_0 - (N_1)_0 - (N_2)_0 \right\} \left\{ \lambda \cos \lambda x' + \frac{h}{k} \sin \lambda x' \right\} \cdot dx'.$$

Wenn wir nun die beiden Lösungen für endliches und unendliches L vergleichen, so ist klar, dass die erstere ein zur Darstellung von Beobachtungen durchaus brauchbares T_2 und ein wenigstens nicht unbrauchbares T_1 besitzt, dass dagegen in der letzteren zwar T_1 eine sehr zweckmässige, T_2 dagegen eine völlig unbrauchbare Form annimmt. Wir legen daher im Folgenden die Lösung für ein endliches L zu Grunde und es wird sich zeigen, dass dieselbe den Ansprüchen genügt.

Die Constanten D_1 und N_1.

Sowohl in der Lösung für die Temperatur am Tage, als in derjenigen für die Temperatur in der Nacht ist von den Exponentialgrössen nur die

---

* Die Identität beider Lösungen, die sich nur im periodischen Theile unterscheiden, lässt sich nachweisen, wenn man die Functionen Y_n und Z_n nach $\sin \omega_m \frac{L-x}{L}$ entwickelt und mit der eben erhaltenen Reihe vergleicht. (Die Coefficienten der Entwickelung bilde man aus den Differentialgleichungen für Y_n und Z_n.)

erste mit der kleinsten Wurzel ω_1 in Betracht zu ziehen, indem die übrigen nach einiger Zeit unmerklich klein werden. Wenn eine durch mehrere Tage fortlaufende Reihe von Beobachtungen vorliegt, so bestimmen sich die Constanten D_1 und N_1 dieser Exponentialgrössen für die einzelnen Tage und Nächte, indem zu Sonnenaufgang, resp. Sonnenuntergang die Temperaturen des Tages und der Nacht einander gleich gesetzt werden. Wenn τ ein solcher Zeitpunkt ist, so ist eine solche Gleichung:

$$A\frac{1+\frac{h}{k}x}{1+\frac{h}{k}L}+\left(\xi+\frac{\varepsilon\sigma}{h}a_0\right)\frac{h}{k}L\frac{1-\frac{x}{L}}{1+\frac{h}{k}L}+\sum D_m\,.\,\sin\omega_m\frac{L-x}{L}\,.\,e^{-\frac{\omega^2_m}{L^2}K\tau}$$

$$+\frac{\varepsilon\sigma}{h}\sum_1^{\infty}a_n\sum G_{m,n}\,.\cos\left(n\frac{\tau}{T}\pi-\delta_{m,n}\right).\sin\omega_m\frac{L-x}{L}$$

$$=A\frac{1+\frac{h}{k}x}{1+\frac{h}{k}L}+\xi\,.\,\frac{h}{k}L\frac{1-\frac{x}{L}}{1+\frac{h}{k}L}$$

$$+\sum N_m\,.\sin\omega_m\frac{L-x}{L}\,.\,e^{-\frac{\omega^2_m}{L^2}K\tau}.$$

Da nun

$$\frac{\varepsilon\sigma}{h}a_0\,.\,\frac{h}{k}L\frac{1-\frac{x}{L}}{1+\frac{h}{k}L}=\frac{\varepsilon\sigma}{h}a_0\,.\sum\frac{4\cos\omega_m}{\sin 2\omega_m-2\omega_m}\,.\,\sin\omega_m\frac{L-x}{L},$$

so hat man zu beiden Seiten blos Reihen nach $\sin\omega_m\frac{L-x}{L}$; es muss also der Coefficient von $\sin\omega_1\frac{L-x}{L}$ beiderseits derselbe sein. Die Gleichung wird daher, wenn

$$s(t)=\frac{\varepsilon\sigma}{h}\frac{4\cos\omega_1}{\sin 2\omega_1-2\omega_1}\left\{a_0+\sum_1^{\infty}a_n\,.\cos\delta_{1,n}\,.\cos\left(n\frac{t}{T}\pi-\delta_{1,n}\right)\right\},$$

$$D_1+s(\tau)\,.\,e^{\frac{\omega_1^2}{L^2}K\tau}=N_1.$$

Der Anfangspunkt der Zeit liege nun in einem beliebigen Mittag und es werde von da an fortlaufend gezählt. τ_i sei die halbe Tageslänge des i^{ten} Tages; $s(t)$ ist periodisch um $2T$; $D_1{}^i$ und $N_1{}^i$ sind die Constanten D_1 und N_1 am i^{ten} Tage. Dann hat man die Gleichungen:

zu Sonnenuntergang: zu Sonnenaufgang:

$$1. \text{ Tag: } s(\tau_1) \cdot e^{\frac{\omega_1^2}{L^2} K \tau_1} + D_1^1 = N_1^1; \quad 2. \text{ Tag: } s(-\tau_2) \cdot e^{\frac{\omega_1^2}{L^2} K (2T - \tau_2)} + D_1^2 = N_1^1;$$

$$2. \text{ Tag: } s(\tau_2) \cdot e^{\frac{\omega_1^2}{L^2} K (2T + \tau_2)} + D_1^2 = N_1^2; \quad 3. \text{ Tag: } s(-\tau_3) \cdot e^{\frac{\omega_1^2}{L^2} K (4T - \tau_3)} + D_1^3 = N_1^2$$

u. s. w.,

oder, wenn

$$\varrho_i = s(\tau_i) \cdot e^{\frac{\omega_1^2}{L^2} K \tau_i}, \qquad \bar{\varrho}_i = s(-\tau_i) \cdot e^{-\frac{\omega_1^2}{L^2} K \tau_i},$$

$$r = e^{2 \frac{\omega_1^2}{L^2} K T}:$$

$$\varrho_1 \cdot r^0 + D_1^1 = N_1^1, \qquad \bar{\varrho}_2 \cdot r^1 + D_1^2 = N_1^1,$$
$$\varrho_2 \cdot r^1 + D_1^2 = N_1^2, \qquad \bar{\varrho}_3 \cdot r^2 + D_1^3 = N_1^2,$$
$$\varrho_3 \cdot r^2 + D_1^3 = N_1^3, \qquad \bar{\varrho}_4 \cdot r^3 + D_1^4 = N_1^3$$

etc. etc.

Hieraus ergiebt sich allgemein:

$$D_1^i = D_1^1 + r^{-1} \cdot \sum_1^{i-1} \varrho_m \cdot r^m - r^{-1} \sum_2^{i} \bar{\varrho}_m \cdot r^m.$$

Da in diesen Summen die letzten Glieder die wichtigsten sind, so ist die umgekehrte Reihenfolge die natürliche und daher besser

$$D_1^i = r^{i-1} \cdot \sum_1^{i-1}{}^q \varrho_{i-q} \cdot r^{-q} - r^{i-1} \cdot \sum_0^{i-2}{}^q \bar{\varrho}_{i-q} \cdot r^{-q} + D_1^1,$$

ferner

$$N_1^i = r^{i-1} \cdot \sum_0^{i-2}{}^q \varrho_{i-q} \cdot r^{-q} - r^{i-1} \cdot \sum_0^{i-2}{}^q \bar{\varrho}_{i-q} \cdot r^{-q} + N_1^1$$

und

$$N_1^i = \varrho_i \cdot r^{i-1} + D_1^i.$$

Macht man nun die Annahme, dass die Temperatur um ein Jahr $= j$ Tage periodisch sei, so muss

$$D_1^{j+1} \cdot e^{-\frac{\omega_1^2}{L^2} K . 2 j T} = D_1^1 \quad \text{oder} \quad D_1^{j+1} = r^j \cdot D_1^1$$

sein, also

$$D_1^1 . r^j = r^j \cdot \sum_1^{j}{}^q \varrho_{j+1-q} \cdot r^{-q} - r^j \cdot \sum_0^{j-1}{}^q \bar{\varrho}_{j+1-q} \cdot r^{-q} + D_1^1,$$

woraus, da $\varrho_{j+i} = \varrho_i$, $\bar{\varrho}_{j+i} = \bar{\varrho}_i$,

$$D_1^{j+1} \cdot r^{-j} = D_1 = \frac{1}{1 - r^{-j}} \left\{ \sum_1^{j}{}^q \varrho_{1-q} \cdot r^{-q} - \sum_0^{j-1}{}^q \bar{\varrho}_{1-q} \cdot r^{-q} \right\}.$$

Da der Anfangspunkt der Zeit ganz willkürlich gewählt ist, so muss für irgend einen Tag $nj + i$ im $n + 1^{\text{ten}}$ Jahre nach dem Zeitanfange D_1^i dieselbe Form haben, wie D_1^1. Man erhält auch

$$D_1^{nj+i} = \frac{r^{nj+i-1}}{1-r^{-j}} \left\{ \sum_1^j{}^q \varrho_{i-q} \cdot r^{-q} - \sum_0^{j-1}{}^q \bar{\varrho}_{i-q} \cdot r^{-q} \right\}$$

und ähnlich:

$$N_1^{nj+i} = \frac{r^{nj+i-1}}{1-r^{-j}} \left\{ \sum_0^{j-1}{}^q \varrho_{i-q} \cdot r^{-q} - \sum_0^{j-1}{}^q \bar{\varrho}_{i-q} \cdot r^{-q} \right\}.$$

Die Summen erstrecken sich also immer auf 364 Tage, von dem betreffenden i^{ten} Tage selbst oder vom vorhergehenden Tage an rückwärts gezählt. Ausführlich geschrieben ist

$$D_1^{nj+i} = \frac{e^{2\frac{\omega_1^2}{L^2}K(nj+i-1)T}}{1-e^{-2\frac{\omega_1^2}{L^2}KjT}} \frac{\varepsilon\sigma}{h} \frac{4\cos\omega_1}{\sin 2\omega_1 - 2\omega_1} \{S^{nj+i} - \bar{S}^{nj+i}\},$$

wo

$$S^{nj+i} = \sum_1^j{}^q \left\{ a_0^{i-q} + \sum_1^\infty{}^n a_n^{i-q} \cdot \cos\delta_{1,n} \right.$$
$$\left. \times \cos\left(n\frac{\tau_{i-q}}{T}\pi - \delta_{1,n}\right)\right\} e^{\frac{\omega_1^2}{L^2}K(-2qT+\tau_{i-q})},$$

$$\bar{S}^{nj+i} = \sum_0^{j-1}{}^q \left\{ a_0^{i-q} + \sum_1^\infty{}^n a_n^{i-q} \cdot \cos\delta_{1,n} \right.$$
$$\left. \times \cos\left(n\frac{\tau_{i-q}}{T}\pi + \delta_{1,n}\right)\right\} \cdot e^{\frac{\omega_1^2}{L^2}K(-2qT-\tau_{i-q})};$$

hier ist z. B. a_0^i der für den i^{ten} Tag geltende Coefficient a_0, d. h. für das an diesem Tage stattfindende Absorptionsvermögen der Atmosphäre.

Die hier vorkommenden Summen würden sich auf verschiedene Weise behandeln und als explicite Functionen der wahren Sonnenlänge darstellen lassen; da dies jedoch kaum auf ein einfaches Resultat führen wird und, wie unten gezeigt werden wird, die Constanten D_1 und N_1 nicht zur Berechnung irgendwelcher Grössen nöthig sind, führen wir ihre Behandlung hier nicht weiter.

Wenn der Anfangspunkt nicht in einen einzigen, sondern in jeden Mittag verlegt wird, so bleibt der periodische Theil der Temperatur derselbe; nur statt D_1^i ist $D_1^i \cdot r^{i-1}$ und statt N_1^i ist $N_1^i \cdot r^{i-1}$ zu setzen.

Berechnung der Beobachtungen.

Bei der Lösung nach der Poisson'schen Methode giebt es nur einen einzigen Weg, um alle Elemente zu bestimmen; bei derjenigen nach der Tralles'schen Methode ist zwar der Weg im Allgemeinen auch klar vorgezeichnet, im Einzelnen bleibt jedoch ein gewisser Spielraum. Wir wollen im Folgenden zeigen, dass sich bei der vorliegenden Lösung sämmtliche Elemente aus den Beobachtungen Eines Tages und

Einer Nacht bestimmen lassen, und im Allgemeinen **beliebig** lange Zeiträume auf die Werthe der Elemente berechnet werden können; wir geben jedoch nur einen Weg der Bestimmung an.

Man geht von der nächtlichen Temperatur aus, da ihr Gesetz **das** einfachere ist. Es ist, wenn N_1 der constante Theil derselben,

$$N = N_1 + N_1 . \sin \omega_1 \frac{L-x}{L} . e^{-\frac{\omega_1^2}{L^2} K . t} .$$

Bildet man nun in jeder Tiefe Differenzen von Beobachtungen, **die um** die gleiche Zeit t_1 auseinander liegen, nämlich

$$\Delta_{t,x} = \tfrac{1}{2}(N_{t-t_1} - N_t) = \tfrac{1}{2} N_1 . \sin \omega_1 \frac{L-x}{L} \left(e^{\frac{\omega_1^2}{L^2} K t_1} - 1\right) . e^{-\frac{\omega_1^2}{L^2} K t},$$

so ist

$$\frac{\Delta_{t,x}}{\Delta_{t',x}} = e^{-\frac{\omega_1^2}{L^2} K (t-t')},$$

ferner

$$\frac{\Delta_{t,x}}{\Delta_{t,x'}} = \frac{\sin \omega_1 \frac{L-x}{L}}{\sin \omega_1 \frac{L-x'}{L}};$$

aus diesen beiden Relationen können daher $\frac{\omega_1^2}{L^2} K$ und ω_1, oder $\frac{h}{k}$ und K bestimmt werden. Nun ist

$$N_1 = N_{t,x} - \frac{2 \Delta_{t,x}}{e^{\frac{\omega_1^2}{L^2} K t_1} - 1};$$

also lässt sich hieraus N_1 bestimmen für jede Tiefe.

Nachdem so N_1, $\frac{h}{k}$ und K gefunden sind, müssen die Beobachtungen des Tages dazu dienen, um T_1, den constanten Theil der Tagestemperatur, und $\frac{\varepsilon \sigma}{h} a_1$, $\frac{\varepsilon \sigma}{h} a_2$ etc. zu bestimmen; sind auch diese Grössen gefunden, so lassen sich alle übrigen, noch nicht bestimmten Elemente aus ihnen berechnen.

Am besten wird wohl zu diesem Zweck das Maximum der Temperatur verwendet. Die Temperatur am Tage ist

$$T = T_1 + D_1 . \sin \omega_1 \frac{L-x}{L} . e^{-\frac{\omega_1^2}{L^2} K t}$$
$$+ \frac{\varepsilon \sigma}{h} \sum\nolimits_1^n a_n . \sum\nolimits^m G_{m,n} . \cos\left(n \frac{t}{T} \pi - \delta_{m,n}\right) . \sin \omega_m \frac{L-x}{L};$$

für das Maximum ist $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, also, wenn t_a die Zeit seines Eintrittes,

$$D_1 . \sin \omega_1 \frac{L-x}{L} . e^{-\frac{\omega_1^2}{L^2} K t_a} = -\frac{L^2}{\omega_1^2 K} \frac{\varepsilon \sigma}{h} \sum_1^\infty a_n \frac{n \pi}{T}$$
$$\times \sum^m G_{m,n} . \sin \left(n \frac{t_a}{T} \pi - \delta_{m,n} \right) . \sin \omega_m \frac{L-x}{L},$$

also die Maximaltemperatur:

$$T_a = T_1 + \frac{\varepsilon \sigma}{h} . \sum_1^\infty \frac{a_n}{\cos \delta_{1,n}} \sum G_{m,n}$$
$$\times \cos \left(n \frac{t_a}{T} \pi - \delta_{m,n} + \delta_{1,n} \right) . \sin \omega_m \frac{L-x}{L},$$

da

$$tg\, \delta_{1,n} = \frac{\frac{n \pi}{T}}{\frac{\omega_1^2 K}{L^2}}.$$

Hier sind nun die Coefficienten von $\frac{\varepsilon \sigma}{h} a_1$, $\frac{\varepsilon \sigma}{h} a_2$ etc. alle bekannt, weil die Grössen $\delta_{m,n}$ und $G_{m,n}$ nur ω_m enthalten und diese Wurzeln einer transscendenten Gleichung sind, deren kleinste Wurzel, ω_1, oben bestimmt wurde. Man hat daher für verschiedene Tiefen, wenn $T_1 = p + q . x$ gesetzt wird, Gleichungen von der Form

$$(T_x)_a = p + q . x + \frac{\varepsilon \sigma}{h} a_1 . \alpha_1 + \frac{\varepsilon \sigma}{h} a_2 . \alpha_2 + \ldots,$$
$$(T_{x'})_a = p + q . x' + \frac{\varepsilon \sigma}{h} a_1 . \alpha'_1 + \frac{\varepsilon \sigma}{h} a_2 . \alpha_2^1 + \ldots$$
etc.,

wo $\alpha_1 \alpha_2 \ldots, \alpha'_1 \alpha'_2 \ldots$ bekannt und die Grössen p, q, $\frac{\varepsilon \sigma}{h} a_1$, $\frac{\varepsilon \sigma}{h} a_2$ etc. daher bestimmbar sind. Die Berechnung der Coefficienten α ist zwar mühsam, indem jeder eine Reihe vorstellt, die nicht sehr rasch convergirt; sie braucht jedoch nur ein- für allemal ausgeführt zu werden, da $\frac{h}{k}$ und K Elemente des Apparates sind. Die Anzahl der a_n wird so gewählt, wie sie den Beobachtungen am besten genügt. Stellt man nun noch N_1 dar als lineare Function von x:

$$N_1 = c + d . x,$$

so hat man für $\frac{\varepsilon \sigma}{h} a_0$:

$$\frac{\varepsilon \sigma}{h} a_0 = \frac{p-c}{\frac{h}{k} L} \left(1 + \frac{h}{k} L \right),$$

ferner für ξ und A:

$$\xi = c - \frac{k}{k} d, \quad A = c + d . L.$$

Die Eigenwärme der Erde ist in unserer Formel nicht berücksichtigt; es ist daher eigentlich überall noch das Glied $f(1+\frac{h}{k}x)$ zu addiren. Da sein Werth gering ist, denken wir uns denselben durch die Zunahme der mittleren Temperatur mit der Tiefe bestimmt und in N_1 als Correction immer in Abzug gebracht.

Wenn nun endlich $\frac{\varepsilon\sigma}{h}a_0$, $\frac{\varepsilon\sigma}{h}a_1$, $\frac{\varepsilon\sigma}{h}a_2\ldots$ bekannt sind, so lassen sich mit Hilfe der oben gegebenen Entwickelungen nach α und q_1 für A_0, A_1, A_2 etc., welche in den a_0, a_1, a_2 etc. enthalten sind, aus den Grössen $\frac{\varepsilon\sigma}{h}a_0$ und $\frac{\varepsilon\sigma}{h}a_1$ die Grössen α und $\frac{\varepsilon\sigma}{h}$, resp. das Absorptionsvermögen der Atmosphäre und die in den Boden eindringende Sonnenwärme $\varepsilon\sigma$ bestimmen; ja sogar, wenn $\frac{\varepsilon\sigma}{h}a_2$ eine durch die Beobachtungen genügend scharf gegebene Grösse ist, auch noch q_1, und aus q_1 die Höhe H der Atmosphäre. Diese Bestimmung von $\frac{\varepsilon\sigma}{h}$ und α hat den grossen Vortheil vor derjenigen derselben Grössen nach der Poisson'schen Methode, dass ein Glied aus dem constanten Theile der Temperatur und das erste, sicherste des periodischen Theiles dazu benutzt wird, während in der Formel nach der Poisson-schen Methode das erste und das zweite, ziemlich unsichere Glied des periodischen Theiles genommen werden müssen.

Hat man nun Beobachtungsreihen von längeren Zeiträumen zu berechnen, so ist vorerst klar, dass man aus mehreren aufeinander folgenden Tagen, in denen die Sonnenlänge sich nicht wesentlich ändert, Mittelwerthe ziehen und dieselben wie Beobachtungen eines einzigen Tages berechnen kann. Will man jedoch Mittelwerthe der Elemente für Zeiträume ermitteln, in denen die Variation der Sonnenlänge berücksichtigt werden muss, so wird man zuerst aus einer Anzahl von guten nächtlichen Beobachtungen die Werthe von $\frac{h}{k}$ und K ziehen und dann für jede Tiefe und für jeden Tag oder für jeden als einzelnen Tag behandelten Zeitraum die Gleichung für $(T_x)_a$, das Maximum, aufstellen und aus allen diesen Gleichungen die Grössen p, q, $\frac{\varepsilon\sigma}{h}a_1$, $\frac{\varepsilon\sigma}{h}a_2$ etc. bestimmen.

Vergleichung der beiden Methoden.

Der Hauptunterschied in der Berechnung der Beobachtungen nach den Lösungen der Poisson'schen und der Tralles'schen Methode besteht offenbar darin, dass im ersteren Falle Beobachtungsreihen von wenigstens

einem Jahre, im letzteren nur von wenigstens einem ganzen Tage vorliegen müssen. Wenn dieses letztere Minimum in der Praxis auch nicht genügen wird wegen der Grösse der Beobachtungsfehler, so erhellt doch daraus, dass nach der letzteren Methode beliebige Gruppen von Tagen, z. B. von je 5 Tagen, oder von einer Reihe wolkenloser, ganz bedeckter, feuchter, trockener u. s. w. auf die Elemente berechnet werden können; die Tralles'sche Methode ist namentlich geeignet, die Variationen der Elemente in den verschiedenen Witterungsperioden zu liefern. Sie macht es ferner möglich, ausser der eindringenden Sonnenwärme, dem Absorptionsvermögen der Atmosphäre auf Sonnenwärme, der Hüllentemperatur ξ noch die Höhe der Atmosphäre zu bestimmen, für welche bei der andern Methode eine Annahme eintreten muss, und endlich ist die Bestimmung der letztgenannten Elemente in derselben überhaupt weit sicherer. Die Bedingung, dass in der Tiefe L die Temperatur constant sei, ist nur eine Supposition in der Rechnung, welche nicht das Ausdehnen der Beobachtungen bis in jene Tiefe verlangt. Es darf jedoch nicht ausser Acht gelassen werden, dass die Anwendung der Tralles'schen Methode genau und zahlreich, namentlich des Nachts angestellter Beobachtungen bedarf.

Schliesslich sei uns noch die Bemerkung gestattet, dass diejenigen Nebenumstände, welche hier nicht berücksichtigt sind, namentlich das Eindringen des Tagwassers von Oben, sich bei zweckmässiger Einrichtung der Beobachtungen wohl vermeiden lassen, so dass nunmehr die Theorie der Erdtemperatur so weit gefördert ist, dass sich die Beobachtungen in aller Schärfe nach derselben berechnen lassen.

IV.

Ueber die möglichst genaue mechanische Rectification eines verzeichneten Curvenbogens, bestimmt auf der Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von

CHR. WIENER in Karlsruhe.

(Hierzu Tafel I.)

1. Unter der Länge eines Curvenbogens versteht man bekanntlich den Grenzwerth des Umfanges eines in denselben eingeschriebenen Vielecks-zuges, dessen Endpunkte mit denen des Bogens zusammenfallen, welcher Grenzwerth erreicht wird, wenn die einzelnen Seiten desselben unendlich klein werden. Man setzt dabei als selbstverständlich voraus, dass der Zug auf dem Bogen stets vorwärts schreitet.

Um hiernach einen verzeichneten Curvenbogen durch Zeichnung oder mechanisch zu rectificiren, trage man auf dem Bogen von seinem einen Endpunkte aus Sehnen, die am zweckmässigsten unter einander gleich sind, weiter, übertrage dieselben in gleicher Länge und Anzahl auf eine Gerade und füge die etwaige Restsehne zu, wiederhole dieses Verfahren mit kleineren Sehnen und dann wieder mit kleineren, so wird man grössere und grössere Längen für den Umfang des eingeschriebenen Vielecks erhalten; man setze die Wiederholungen so lange fort, bis die Vergrösserungen unmerklich werden, so ist der erhaltene Grenzwerth der Länge als die des Bogens anzusehen.

2. Dies Verfahren ist nur unter der Voraussetzung richtig, dass durch das Weitertragen einer Länge mittels des Zirkels keine Fehler entstehen, dass also die Länge auf der Geraden wirklich gleich dem Umfange des eingeschriebenen Vieleckszuges ist. Diese Voraussetzung trifft aber nicht zu; es tritt vielmehr ein Unterschied beider Grössen ein, der mit der Anzahl der weiter getragenen Sehnen zunimmt. Dadurch wirken sich bei der Wahl der Sehnenlänge zwei Rücksichten entgegen, indem sowohl die Vergrösserung, als die Verkleinerung der Sehnen wachsende Fehler erzeugen; es

wächst nämlich der aus der Abweichung der Sehne von dem zugehörigen Bogen entspringende Fehler mit der Grösse der Sehnen; dagegen wächst der durch das wiederholte Weitertragen der Sehnen erzeugte Fehler mit der Anzahl oder mit der Verkleinerung der Sehnen. Wir wollen nun zunächst diese Fehler einzeln ermitteln und dann die kleine Sehnen- oder Bogenlänge so wählen, dass ein möglichst kleiner Fehler zu erwarten ist. Dabei wollen wir von einem zu rectificirenden Kreisbogen ausgehen und die gewonnenen Ergebnisse in zweckmässiger Weise auf andere Curven übertragen. Jener Kreisbogen sei k-mal im Umfange enthalten, der Durchmesser werde mit d bezeichnet, so ist die Länge des Bogens

$$\frac{\pi d}{k}.$$

3. Sei s die gewählte Sehnenlänge, b der zugehörige Bogen, so ist

$$s = d \sin \frac{b}{d}.$$

Wegen der Kleinheit des Winkels $\frac{b}{d}$ kann man in der Reihe für den Sinus sich mit den beiden ersten Gliedern begnügen, so dass

$$\sin \frac{b}{d} = \frac{b}{d} - \tfrac{1}{6}\left(\frac{b}{d}\right)^3 \quad \text{und} \quad s = b - \tfrac{1}{6}\frac{b^3}{d^2}.$$

Da die Sehne im ganzen Bogen $\frac{\pi d}{k b}$-mal vorwärts getragen wird, so ist die vermittelst der Sehnen erhaltene Bogenlänge

$$s\frac{\pi d}{k b} = \frac{\pi d}{k} - \frac{\pi}{6 k}\frac{b^2}{d}.$$

Daraus ergiebt sich der Fehler

$$f_1 = \frac{\pi d}{k} - \left(\frac{\pi d}{k} - \frac{\pi}{6 k}\frac{b^2}{d}\right) = \frac{\pi}{6 k}\frac{b^2}{d}.$$

4. Trägt man mittels eines Zirkels mit zwei Spitzen eine gewisse Länge auf einer verzeichneten Linie mehrmals weiter, so besitzt jeder Zirkelstrich einen Fehler, welcher von dem Einstechen unter wechselnder Neigung, von der Rauhigkeit des Papieres, von dem Einstechen zur Seite der Linie, von einem seitlichen Drucke beim Drehen der Spitze in dem Stiche und vielleicht noch von anderen Ursachen herrührt. Diese Fehler bewirken, dass jede zwischen zwei aufeinander folgenden Stichen befindliche, auf die Linie projicirte Länge einen Fehler besitzt, welcher wechselt und dessen wahrscheinliche Grösse f sein mag. Der wahrscheinliche Fehler r von n solchen auf einander folgenden Längen ist dann nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung bekanntlich $r = \sqrt{n}\, f$.

5. Um f für eine kleine Zirkelöffnung, welche ein fast senkrechtes Einstechen erlaubt, durch Versuche zu bestimmen, trug ich eine Länge b

von wenigen Millimetern mittels eines Handzirkels auf einer auf festes Zeichenpapier gezogenen geraden Linie n-mal weiter und wiederholte auf verschiedenen Geraden m-mal diese Operation. Ich mass dann mittels eines angelegten Massstabes auf $\frac{1}{10}$ Millimeter genau die erhaltenen Längen ab und fand dafür m verschiedene Werthe, deren arithmetisches Mittel der wahrscheinlichste Werth von nb ist. Daraus ergaben sich die Fehler $v_1, v_2, v_3 \ldots v_m$ der einzelnen Ergebnisse, indem man jedes Mittel um jedes einzelne Ergebniss verminderte, und aus ihnen folgt der wahrscheinliche Fehler des Werthes nb bei einer einmaligen Operation*

$$r = \varrho\sqrt{2}\sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_m^2}{m-1}} = 0{,}674489\sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_m^2}{m-1}}.$$

Hieraus folgt der gesuchte wahrscheinliche Fehler bei einmaligem Auftragen

$$f = \frac{r}{\sqrt{n}}.$$

Indem ich dann mit derselben oder einer etwas veränderten Länge b dieselbe Operation ausführte, erhielt ich einen andern Werth von f. Zwischen diesen Werthen nahm ich das Mittel als wahrscheinlichsten Werth von f an; die Beachtung der Gewichte der einzelnen Ergebnisse hätte erst Untersuchungen zu deren Feststellung erfordert, und gewisse wahrscheinliche Annahmen über die Gewichte lieferten etwas vom Mittel fast nicht Abweichendes, so dass ein wirklicher Vortheil daraus nicht entstanden wäre. So ergab sich z. B. bei $b = 1^{mm}$, $n = 100$, $m = 10$, $nb =$

102,2, 102,3, 102,25, 102,4, 102,15,
102,4, 102,3, 102,2, 102,3, $102{,}8^{mm}$.

Hieraus folgt das Mittel 102,33, und daraus $v =$

+0,13, +0,03, +0,08, −0,07, +0,18,
−0,07, +0,03, +0,13, +0,03, $-0{,}47^{mm}$.

Daraus bestimmt man

$$r = 0{,}6745\sqrt{\frac{0{,}13^2 + 0{,}03^2 + \ldots}{10-1}} = 0{,}1244^{mm},$$

und hieraus

$$f = \frac{0{,}1244}{\sqrt{100}} = 0{,}01244^{mm}.$$

Die verschiedenen Versuche zur Bestimmung von f mögen in der folgenden Tabelle zusammengestellt sein:

* Encke, Ueber die Methode der kleinsten Quadrate, Berl. astron. Jahrb. f. 1834, S. 282 u. 284.

b	n	m	Mittlere Länge nb	f
1^{mm}	100	10	$102,33^{mm}$	$0,0124^{mm}$
1,5	100	5	146,40	0,0151
1,5	169	5	247,32	0,0102
2	121	10	246,84	0,0043
3,9	64	10	249,14	0,0139
5	49	10	245,56	0,0170
5	49	10	241,72	0,0118
6,9	36	10	244,89	0,0147

Aus diesen Werthen ergiebt sich als Mittel $f = 0,0124$, welchen Werth wir abgerundet

$$f = 0,012^{mm}$$

setzen wollen. Es sagt dies aus, dass beim Weitertragen einer kleinen (unbekannten) Länge mittels des Handzirkels in einer solchen Länge ein wahrscheinlicher Fehler von

$$0,012^{mm} = \tfrac{1}{83}{}^{mm}$$

begangen wird.

Ich bemerke dabei, dass ein guter, nicht mehr neuer Handzirkel mit dreieckigen Spitzen angewendet wurde und dass bei rauhem Papier (Cançon) mit b nicht unter $1,5^{mm}$, bei glätterem nicht viel unter 1^{mm} gegangen werden durfte. Es stieg nämlich f für rauhes Papier und $b = 1^{mm}$ auf 0,02, für glattes Papier und $b = 0,5^{mm}$ auf $0,027^{mm}$. Mit einem Mikrometerzirkel mit runden Spitzen erhielt ich $f = 0,010^{mm}$; auch konnte mit ihm selbst auf rauhem Papier sehr gut bis auf $b = 1^{mm}$ herunter gegangen werden. Endlich füge ich zu, dass ich den Zirkel in wechselndem Sinne umschlug, indem ich aus einigen Versuchen bemerkt hatte, dass das Umschlagen in unverändertem Sinne etwas grössere Fehler herbeiführte, und endlich, dass ich die Zirkelspitze leise einsetzte, wobei die Stiche gerade noch erkannt werden konnten. Es wird f auch mit der Person wechseln.

6. Trägt man eine Zirkelöffnung n-mal auf einer Linie weiter und dann noch n-mal, und nennt die Summe der n-ersten Stücke I, die der n-zweiten II, so ist bekanntlich — wenn der wahrscheinliche Fehler des Auftragens einer Zirkelweite f ist — der wahrscheinliche Fehler sowohl der Summe I + II, als der Differenz I — II durch $\sqrt{2n}\,f$ bestimmt.

Wenn man nun eine kleine Zirkelweite n mal auf einer krummen Linie und dann n-mal auf einer geraden weiter trägt, so ist — abgesehen von dem Unterschiede der kleinen Sehnen und ihrer Bogen — der Unterschied beider Längen gleich dem Fehler f_2 der Rectification, und er ist nach dem eben Gesagten

$$f_2 = \sqrt{2n}\,f.$$

Es ist aber bei der Rectification des Kreisbogens von der Länge $\frac{\pi d}{k}$

$$n = \frac{\pi d}{kb},$$

daher

$$f_2 = \sqrt{\frac{2\pi d}{kb}}\, f.$$

7. Es werden bei der Rectification des Bogens zwei Fehler begangen, wovon der eine, f_1, bekannt, der andere aber zufällig und wechselnd ist und die wahrscheinliche Grösse f_2 besitzt.

Nach Nr. 3 und 6 gilt

$$f_1 = \frac{\pi b^2}{6kd}, \qquad f_2 = \sqrt{\frac{2\pi d}{kb}}\, f.$$

Beide hängen bei gegebenem Kreisbogen (d, k) und gegebener Genauigkeit (f) nur noch von dem zu wählenden b ab. Wir wollen nun b so wählen, dass das Gesammtergebniss möglichst genau, oder der eintretende Gesammtfehler möglichst klein oder ein Minimum wird. Da aber der Gesammtfehler wechselnd und unbekannt ist, müssen wir etwas für die Genauigkeit des Ergebnisses möglichst Günstiges an seine Stelle zu setzen suchen. Dabei bieten sich zwei Möglichkeiten. Wir können entweder den wahrscheinlichen oder den mittleren zu fürchtenden Gesammtfehler zu einem Minimum machen. Wir wollen beide Anschauungen durchführen, worauf es uns dann leicht fallen wird, uns über den Vorzug des einen oder des andern Ergebnisses zu entscheiden.

Machen wir zuerst den wahrscheinlichen Gesammtfehler zu einem Minimum. Wären f_1 und f_2 beides für sich wahrscheinliche Fehler, so wäre bekanntlich der wahrscheinliche Gesammtfehler

$$= \sqrt{f_1^2 + f_2^2}.$$

Da aber f_1 ein bestimmter und bekannter Fehler und nur f_2 der wahrscheinliche Werth eines wechselnden Fehlers ist, so gilt jene Formel nicht und es ist ein näheres Eingehen auf die Wahrscheinlichkeitsfunction nothwendig. Diese* giebt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufälliger und von vornherein durchaus unbekannter Fehler zwischen den Grenzen x und $x + dx$ liegt, durch den Ausdruck $\varphi(x)\, dx$, worin

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}.$$

Darin bedeutet h eine Grösse, die für verschiedene, gleich zuverlässige Operationen eine Constante ist, welche aber bei wechselnder Genauigkeit mit dieser zunimmt; Gauss nennt h das Mass der Präcision. In der Figur

---

* Gauss, *Theoria motus corporum coelestium etc. Liber II, sectio III. Gottingae* 1809. *S.* 212. — Encke a. o. O. S. 269.

sei P der Ursprung des rechtwinkligen Coordinatensystems, PQ die positive Abscissenaxe, so ist die krumme Linie $P_1 Q_1$ eine Wahrscheinlichkeitscurve, welche der obigen Function folgt; die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Fehler zwischen den Grenzen $x = PR$ und $x + dx$ begangen werde, wird durch $\varphi(x)\,dx$ oder $RR_1 . dx$ gemessen. Daher wird die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen den Grenzen a und b liege, durch

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-h^2 x^2}\, dx,$$

oder durch die zwischen jener Curve, der Abscissenaxe und den zu $x = a$ und $x = b$ gehörigen Ordinaten liegende Fläche ausgedrückt. Jenes Integral kann im Allgemeinen nur durch eine Reihe ausgedrückt werden.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der begangene Fehler zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ liege, muss natürlich gleich Eins oder Gewissheit sein, und es ist der Factor vor dem Integrale derart bestimmt, dass

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 x^2}\, dx = \frac{h}{\sqrt{\pi}} . \frac{\sqrt{\pi}}{h} = 1.$$

Nun ist nach Gauss* der wahrscheinliche Fehler r derjenige, für welchen die Wahrscheinlichkeit, dass der begangene Fehler, absolut genommen, kleiner als er sei, ebenso gross ist, als die, dass er grösser sei; jede nämlich gleich $\frac{1}{2}$. Um r zu bestimmen, suche man zwei gleiche Fehler mit entgegengesetzten Zeichen, nämlich $x = -r = PQ'$ und $x = +r = PQ$ so, dass

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-r}^{+r} e^{-h^2 x^2}\, dx = \tfrac{1}{2},$$

so ist nach der obigen Definition r der wahrscheinliche Fehler. Es ist dann die Fläche $Q' Q Q_1 P_1 Q'_1$ die Hälfte der zwischen der unbegrenzten Wahrscheinlichkeitscurve und der Abscissenaxe eingeschlossenen Fläche.

Setzt man $hx = t$, worin t eine neue Veränderliche, so ist

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{x=-r}^{x=+r} e^{-h^2 x^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t=-\varrho}^{t=+\varrho} e^{-t^2}\, dt = \tfrac{1}{2}.$$

---

* Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen, Zeitschr. f. Astron. u. s. w. von v. Lindenau und Bohnenberger. Tübingen 1816. I. Bd. S. 187. — Encke a. o. O. S. 271.

Es folgt aus der letzteren Gleichung

$$\varrho = 0{,}476936,$$

und es ist $\varrho = hr$ oder $h = \frac{\varrho}{r}$.

Die Ordinate im Ursprung ergiebt sich für $x = 0$

$$PP_1 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} = \frac{\varrho}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{r} = 0{,}2691\,\frac{1}{r}.$$

8. Anders stellt sich die Wahrscheinlichkeitscurve, wenn zugleich ein bekannter und ein zufälliger Fehler begangen wird. Sei in der Figur jetzt O der Ursprung der Coordinaten, $OP = f_1$ der bekannte Fehler, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass er allein begangen wird, so gross als die Wahrscheinlichkeit, dass der zufällige Fehler Null sei, nämlich $= PP_1$; die Wahrscheinlichkeit aber, dass ein Fehler, der um $PQ = PQ'$ grösser oder kleiner als OP, d. h. gleich OQ oder OQ' ist, begangen wird, kommt der Wahrscheinlichkeit $QQ_1 = Q'Q'_1$ dafür gleich, dass der zufällige Fehler PQ beträgt. Es zeigt sich, dass die Wahrscheinlichkeitscurve die frühere Gestalt besitzt, dass nur ihre Symmetrielinie PP_1 um die Grösse OP des bekannten Fehlers von der Ordinatenaxe oder dem Ursprung O verschoben ist.

Um nun nach dem Begriffe von Nr. 7 den wahrscheinlichen Fehler OR in diesem Falle zu bestimmen, muss man $OR - OR'$ so feststellen, dass das Flächenstück $R'RR_1R'_1 = \frac{1}{2}$ ist; dann ist es gleich wahrscheinlich, dass, absolut genommen, ein Fehler kleiner als OR oder grösser als OR begangen wird. Es kann dies vermittelst der Tafel für die Flächenstücke geschehen, welche von Encke mitgetheilt wurde.*

9. Wir haben uns nun vorgesetzt, b so zu bestimmen, dass der wahrscheinliche Gesammtfehler ($= OR$) ein Minimum werde. Weil derselbe aber nicht durch einen geschlossenen Ausdruck angegeben werden kann, so ist auch die Herleitung einer allgemeinen und strengen Formel für das seinem Minimalwerthe zukommende b nicht möglich. Wenn wir jedoch für einige bestimmte Fälle die Grösse der vortheilhaftesten Bogenlängen feststellen, können wir doch eine sehr angenäherte empirische Formel für das vortheilhafteste b herleiten.

Als erster Fall ist gewählt

$$k = 1, \quad d = 100^{\text{mm}}, \quad f = 0{,}012^{\text{mm}},$$

also die Aufgabe gestellt, einen ganzen Kreis von 100^{mm} Durchmesser zu rectificiren. Jene Werthe in die zu Beginn der Nr. 7 zusammengestellten Ausdrücke von f_1 und f_2 eingeführt, ergeben

$$f_1 = 0{,}00523\,b^2, \quad f_2 = 0{,}3008\,\frac{1}{\sqrt{b}}.$$

* Encke a. o. O. S 309 flgg.

Giebt man nun b der Reihe nach die Werthe $0, 1, 2 \ldots 10^{mm}$, so erhält man folgende Werthe von f_1 und f_2:

b:	f_1:	f_2:
0	0	∞
1	0,0052	0,3008
2	0,0209	0,2127
3	0,0471	0,1737
4	0,0837	0,1504
5	0,1307	0,1345
6	0,1883	0,1228
7	0,2563	0,1135
8	0,3347	0,1063
9	0,4236	0,1003
10^{mm}	$0,5230^{mm}$	$0,0951^{mm}$.

Nimmt man in der Figur AX und AY als Coordinatenaxen, trägt auf AY als Ordinaten die b auf, z. B. $AO = 4^{mm}$ nach irgend einem Massstabe, und sodann als Abscisse $OP = f_1 = 0{,}0837^{mm}$ nach vielleicht einem andern Massstabe, verzeichnet dann wie in Nr. 7 mit PQ als neuer Abscissenaxe die Wahrscheinlichkeitscurve, indem man $PQ = PQ' = r = f_2 = 0{,}1504^{mm}$ und

$$PP_1 = \frac{\varrho}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{r} = \frac{0{,}2691}{0{,}1504} = 1{,}789^{mm}$$

macht, und bestimmt ferner $OR = OR'$ nach Nr. 8 als wahrscheinlichern Fehler, so dass die schraffirte Fläche $R'RR_1R'_1$ gleich der Hälfte der zwischen der Wahrscheinlichkeitscurve und ihrer Abscissenaxe liegenden Fläche ist, und verfährt ebenso mit den Ordinaten $b = 0$, $b = 1$ u. s. w, so erhält man durch Verbindung aller R eine Curve r, deren Ordinaten die gewählten b und deren Abscissen die zugehörigen wahrscheinlichen Fehler der Kreisrectification sind. r schliesst sich stellenweise zweien Curven f_1 und f_2 sehr nahe an. Die f_1, welche durch die Gleichung $f_1 = 0{,}00523\,b^2$ bestimmt ist, stellt in ihren Abscissen die durch die Abweichung von Sehne und Bogen entstehenden Fehler bei den in den Ordinaten dargestellten Bogenlängen dar; sie ist eine Parabel. Die f_2 mit der Gleichung $f_2 = 0{,}3008 \frac{1}{\sqrt{b}}$ drückt entsprechend die wahrscheinlichen, durch das wiederholte Weitertragen der Bogenstückchen entstehenden Fehler dar; sie ist eine Hyperbel dritter Ordnung. r schliesst sich der f_2 für kleine Werthe von b, der f_1 für grosse Werthe an.

Sucht man nun auf graphischem Wege vermittelst der Curve r das Minimum der wahrscheinlichen Gesammtfehler, so findet man, dass es für $b = 4{,}41^{mm}$ eintritt, wofür $r = 0{,}160^{mm}$ wird, und hat dann in diesem Werthe von b die nach dieser Anschauung bei der Rectification eines Vollkreises von 100^{mm} Durchmesser zu wählende Bogenlänge gefunden.

Bestimmt man die entsprechenden Werthe auch für $d = 10$ und $d = 500'$ so erhält man

$$\begin{array}{llll} \text{für } d = & 10: & 100: & 500^{mm}: \\ \text{,, } b = & 1{,}10, & 4{,}41, & 11{,}40^{mm}, \\ \text{,, } r = & 0{,}100, & 0{,}160, & 0{,}221^{mm}. \end{array}$$

Es wird sich alsbald folgende passende empirische Formel zwischen d und b ergeben:

$$b = 0{,}277 \frac{d^{2/3}}{k^{1/3}}.$$

10. Gehen wir jetzt zur zweiten Anschauung über, nach welcher der mittlere Fehler möglichst klein werden soll. Gauss* setzt den Schaden durch einen Fehler dem Quadrate seiner Grösse proportional und drückt, wenn x ein Fehler, $\varphi(x)$ seine Wahrscheinlichkeit, den mittleren zu befürchtenden oder den mittleren Fehler m durch die Gleichung aus:

$$m^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi(x)\, dx.$$

Man bemerkt, dass m auch den Trägheitshalbmesser der zwischen der Wahrscheinlichkeitscurve und der Abscissenaxe liegenden Fläche, welche selbst der Einheit gleichkommt, ausdrückt, wenn die Drehung um die Ordinatenaxe stattfindet.

In unserem Falle ist nun der Fehler (Nr. 7):

$$x = f_1 + x',$$

worin f_1 ein constanter (Nr. 3) und x' ein veränderlicher Fehler, dessen wahrscheinliche Grösse f_2 beträgt (Nr. 6). Es ist ferner die Wahrscheinlichkeit $\varphi(x)$, dass der Gesammtfehler die Grösse x annehme, ebenso gross, als die Wahrscheinlichkeit $\varphi'(x')$, dass der veränderliche Fehler den Werth x' besitze (Nr. 8), oder es ist

$$\varphi(x) = \varphi(f_1 + x') = \varphi'(x').$$

Endlich ist

$$dx = dx'.$$

Daher erhält man

$$m^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (f_1 + x')^2 \varphi'(x')\, dx',$$

wozu noch bemerkt wird, dass die Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ von x mit denselben Grenzen von x' zusammenfallen.

Entwickelt man das Quadrat, so erhält man

---

* *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae* (*Commentationes soc. reg. scient. Gottingensis*, *vol. V*, 1823). S. 37 flgg.

$$m^2 = f_1^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x')\,dx' + 2f_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x'\varphi'(x')\,dx' + \int_{-\infty}^{+\infty} x'^2 \varphi'(x')\,dx'.$$

Nun gilt aber für jede Wahrscheinlichkeitsfunction φ':

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x')\,dx' = 1,$$

da dies Integral die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, dass der begangene Fehler zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ liegt, und diese Gewissheit oder $=1$ ist (s. Nr. 7). Ferner gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x'\varphi'(x')\,dx' = 0,$$

da für den veränderlichen Fehler x', der einen constanten Bestandtheil nicht besitzt, die Wahrscheinlichkeit eines positiven und negativen Fehlers von gleicher absoluter Grösse dieselbe ist, oder da einem positiven $x'\varphi'(x')\,dx'$ ein gleiches negatives gegenübersteht, welcheses aufhebt. Der dritte Bestandtheil des obigen Ausdrucks, den wir mit m'^2 bezeichnen wollen, ändert sich mit der Wahrscheinlichkeitsfunction. Für die wahrscheinlichste, auch in Nr. 7 benutzte

$$\varphi'(x') = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x'^2}$$

ist nach Gauss*

$$m'^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x'^2 \varphi'(x')\,dx' = \int_{-\infty}^{+\infty} x'^2 \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x'^2}\,dx' = \frac{1}{2h^2}.$$

Es ist dies das Quadrat des mittleren Werthes, welcher dem veränderlichen Fehler x' zukommt, und wenn man den Werth von h aus Nr. 7 einführt, so erhält man

$$m'^2 = \frac{1}{2h^2} = \frac{r^2}{2\varrho^2} = \frac{f_2^2}{2\varrho^2} = 2{,}198\, f_2^2,$$

woraus $m' = 1{,}4826\, f_2$, was aussagt, dass bei jener Wahrscheinlichkeitsfunction der mittlere Fehler 1,4826 mal so gross als der wahrscheinliche Fehler ist.

Führt man die Werthe der drei Glieder in den obigen Ausdruck für m^2 ein, so erhält man

$$m^2 = f_1^2 + \frac{1}{2\varrho^2} f_2^2.$$

In Bezug auf die obige Bemerkung entspricht diese Gleichung dem Satze der Mechanik, dass das Quadrat des Trägheitshalbmessers m einer

* *Theoria combinationis etc.* a. o. O. S. 41.

Masse in Bezug auf irgend eine Umdrehungsaxe (hier die Ordinatenaxe) gleich ist der Summe der Quadrate des Trägheitshalbmessers m' in Bezug auf eine zu jener parallelen Axe durch den Schwerpunkt der Masse und des Abstandes f_1 beider Axen.

In der letzten Formel die Ausdrücke für f_1 und f_2 aus Nr. 3 und 6 eingesetzt, giebt

$$m^2 = \left(\frac{\pi}{6k}\right)^2 \frac{1}{d^2} b^4 + \frac{1}{2\varrho^2} \frac{2\pi d f^2}{k} \frac{1}{b}.$$

In der Figur stellt die Curve m die Abhängigkeit des m von b dar für $k = 1$, $d = 100$, $f = 0{,}012$.

11. Um nun b so zu bestimmen, dass m oder m^2 ein Minimum wird, müssen wir

$$\frac{d\,m^2}{d\,b} = 0$$

setzen. Dann ist

$$\frac{\pi^2}{36\,k^2} \frac{1}{d^2} 4\,b^3 - \frac{1}{2\varrho^2} \frac{2\pi d f^2}{k} \frac{1}{b^2} = 0,$$

woraus

$$b = \left(\frac{9\,f^2}{\pi\,\varrho^2}\right)^{1/5} k^{1/5} d^{3/5} = 1{,}6597\, f^{2/5} k^{1/5} d^{3/5},$$

und für $f = 0{,}012$

$$b = 0{,}28295\, k^{1/5} d^{3/5}.$$

Für den Vollkreis oder $k = 1$ wird

$$b = 0{,}28295\, d^{3/5},$$

oder es wächst die vortheilhafteste Bogenlänge b proportional mit der fünften Wurzel aus der dritten Potenz des Durchmessers.

Folgende Tabelle enthält die Werthe der Bogentheilchen b, welche man bei der mechanischen Rectification eines vollen Kreises vom Durchmesser d am vortheilhaftesten wählt, derart nämlich, dass der entstehende mittlere Fehler ein Minimum wird.

d	5	10	20	40	60	80	100	150
b	0,7	1,1	1,7	2,6	3,3	3,9	4,5	5,7
d	200	250	300	350	400	450	500	1000^{mm}
b	6,8	7,8	8,7	9,5	10,3	11,1	11,8	17,9^{mm}

Ist der zu rectificirende Kreisbogen der k^{te} Theil des vollen Kreises, so erhält man das vortheilhafteste b, indem man den Werth der obigen Tabelle mit $\sqrt[5]{k}$ multiplicirt. Es

leuchtet ein, dass k nur annähernd bekannt zu sein braucht. Jene Wurzeln sind in folgender Tabelle enthalten:

k	1	2	4	6	8	10	15	20	25	30
$\sqrt[5]{k}$	1,0	1,1	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0

Hat man z. B. einen Kreis von 130^{mm} Durchmesser zu rectificiren, so wählt man nach der ersten Tabelle $b = 5{,}2^{mm}$; ist der Bogen $\frac{1}{8}$ des Umfangs, so nimmt man $b = 1{,}5 \,.\, 5{,}2^{mm} = 7{,}8^{mm}$.

12. Vergleicht man die in Nr. 9 erhaltenen Werthe (α) mit denen (β) der obigen Tabelle, so zeigt sich, wenn man eine weitere Decimale zufügt,

für $\alpha = 100$ $\qquad d = 10, \quad 100, \quad 500^{mm}$,

nach (α) $\qquad b = \;\; 1{,}10, \quad 4{,}41, \quad 11{,}40^{mm}$,

nach (β) $\qquad b = \;\; 1{,}13, \quad 4{,}48, \quad 11{,}78^{mm}$.

Die Unterschiede sind demnach sehr gering oder man erhält fast denselben Werth von b, ob man den wahrscheinlichen (α) oder den mittleren Fehler (β) zu einem Minimum macht. Wegen der fast vollständigen Proportionalität kann man für den Fall (α), für welchen man einen geschlossenen Ausdruck des vortheilhaftesten b nicht erhält, wenigstens innerhalb der Grenzen $d=10$ und $d=500$ die Form von (β) wählen, wobei sich als am nächsten anschliessend $b = 0{,}277\, d^{2/5} : k^{1/5}$ ergiebt, wie in Nr. 9 schon angeführt wurde.

Wegen der nahen Uebereinstimmung beider Ergebnisse ist es für die Ausführung gleichgiltig, welches man anwendet. Theoretisch geben wir dem zweiten den Vorzug, weil es, indem es den mittleren Fehler zu einem Minimum macht, zugleich auf die mit der Grösse der Fehler zunehmende Schädlichkeit derselben Rücksicht nimmt. Zudem liefert diese Anschauung allein eine allgemeine Formel.

13. Um die Grösse des mittleren Fehlers in seinem kleinsten Werthe zu bestimmen, setzen wir den in Nr. 11 erhaltenen Ausdruck für das vortheilhafteste b in den in derselben Nummer stehenden Ausdruck von m^2 ein und erhalten dann nach einiger Vereinfachung

$$m = \frac{5^{1/2}}{2 \,.\, 9^{1/10}} \frac{\pi^{3/5} f^{4/5}}{\varrho^{4/5} k^{3/5}} d^{1/5}$$

oder

$$m = 3{,}225 \frac{f^{4/5}}{k^{3/5}} d^{1/5}.$$

Für $f = 0{,}012$ wird

$$m = 0{,}09373 \frac{d^{1/5}}{k^{3/5}},$$

und dieser Ausdruck geht für den Vollkreis oder $k = 1$ in

$$m = 0{,}09373\, d^{1/5}$$

über. Beispielsweise erhält man für

$$d = 10, \qquad 100, \qquad 500^{\mathrm{mm}},$$
$$m = 0{,}1486, \qquad 0{,}2354, \qquad 0{,}3248^{\mathrm{mm}}.$$

Der wahrscheinliche Fehler r, der gewöhnlich als Massstab für die Genauigkeit angewendet wird, kann nicht durch einen endlichen Ausdruck dargestellt werden. Nach Nr. 9 gelten aber folgende Werthe:

$$\text{für } d = 10, \qquad 100, \qquad 500^{\mathrm{mm}}$$
$$\text{ist } r = 0{,}100, \qquad 0{,}160, \qquad 0{,}221^{\mathrm{mm}}.$$

Die Proportionalität der r mit den m führt zu der empirischen Formel

$$r = 0{,}064\,\frac{d^{1/5}}{k^{3/5}}.$$

Die Kleinheit dieser Fehler lässt die Genauigkeit der mechanischen Rectification erkennen, indem für $d = 100^{\mathrm{mm}}$, $r = 0{,}16^{\mathrm{mm}} = \frac{1}{6}^{\mathrm{mm}}$, wobei zu beachten ist, dass weniger als $\frac{1}{10}^{\mathrm{mm}}$ durch Zeichnung kaum aufgetragen werden kann.

14. Um den Bogen einer beliebigen Curve zu rectificiren, wähle man, da eine besondere Untersuchung jeder Curvenart nicht lohnt, als kleinen Bogentheil denjenigen, welcher dem nächst anschliessenden Kreisbogen entspricht. Als Durchmesser nehme man den kleinsten Krümmungsdurchmesser, damit nicht durch einen zu grossen Bogentheil der gewisse Fehler f_1 merklich oder gar bedeutend werde, und k bestimme man als das Verhältniss des Winkels der beiden Endtangenten des Bogens zu 360°. Sollten Wende- oder Schnabelpunkte in der Curve vorkommen, so zerlege man sie in diesen in Stücke und nehme zur Bestimmung von k die Absolutsumme der zu den einzelnen Stücken gehörigen Winkel. Wechselt der Krümmungshalbmesser in hohem Grade, so theile man den Bogen in solche Theile, in deren jedem der Wechsel gering ist, und wende auf jeden Theil ein besonderes Bogenstück an.

Soll die Länge eines Curvenbogens auf eine andere Curve übertragen werden, so geschieht dies durch Bogentheile, welche durch die stärker gekrümmte Curve bestimmt werden.

V.

Eine Lösung des allgemeinen elektrostatischen Problems.

Von

Dr. Th. Kötteritzsch,

Oberlehrer an der Fürstenschule zu Grimma.

In meinen beiden Abhandlungen „Ueber die Auflösung eines Systems von unendlich vielen linearen Gleichungen“ deutete ich bereits an, in welcher Weise die dort mitgetheilten Resultate zur Lösung physikalischer Probleme benutzt werden können. Ein solches Problem ist das folgende:

„Gegeben ist eine beliebige Anzahl von Leitern und Nichtleitern für Elektricität in beliebiger Lage gegen einander; es ist bekannt, in welcher Art die Elektricität in den Nichtleitern vertheilt ist, und es soll bestimmt werden, in welcher Weise die den Leitern direct mitgetheilten bekannten Elektricitätsmengen sich zugleich mit den auf ihnen hervorgerufenen Influenzelektricitäten über die Leiter vertheilen, wenn Gleichgewicht zwischen den gegenseitigen elektrischen Wirkungen eingetreten ist.“

Diesem Problem kann auch folgende Form gegeben werden:

Es soll eine Function V der rechtwinklig räumlichen Coordinaten x, y, z gesucht werden, die folgende Eigenschaften hat:

1. Es soll V für alle Punkte innerhalb und ausserhalb gegebener allseitig geschlossener Flächen der partiellen Differentialgleichung
$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$
genügen,
2. für alle Punkte des Raumes zugleich mit ihren ersten Derivirten endlich und stetig sein,
3. für Punkte, die auf den gegebenen Flächen liegen, gegebene Werthe besitzen und

4. für unendlich entfernte Punkte verschwinden wie $\frac{k}{r}$, wenn r den Radius vector eines unendlich entfernten Punktes und k eine gegebene Constante bezeichnet.

Dass in der That die Lösung dieses letzteren Problems die des ersteren mit enthält, erkennt man leicht, wenn man bedenkt, dass die Bedingung des elektrostatischen Gleichgewichts verlangt, dass die Gesammtpotentialfunction * aller vorhandenen wirksamen Elektricität für Punkte, welche auf der Oberfläche (oder im Innern) eines Leiters liegen, einen und denselben Werth haben muss, der aber von einem Leiter zum andern ein verschiedener sein kann.

Nun genügt den Bedingungen 1, 2 und 4 des Problems in der letzteren Fassung die Potentialfunction einer Masse, deren Gesammtmenge k ist, und nimmt man für die gegebenen geschlossenen Flächen die Leiteroberflächen und fordert, dass die gesuchte Potentialfunction für alle Punkte einer Oberfläche einen gegebenen constanten Werth aufweise, so hat man sofort den Zusammenhang des Problems in der letzten Fassung mit dem, welches sich auf die Bedingung des elektrostatischen Gleichgewichts gründet, wenn man noch weiss, dass der Zusammenhang zwischen der Potentialfunction V und der an irgend einer Stelle des s^{ten} Leiters vorhandenen elektrischen Dichtheit ϱ_s einfach ausgedrückt wird durch

$$\varrho_s = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n},$$

wenn $\frac{\partial V}{\partial n}$ bedeutet die Differentiation von V nach der nach aussen errichteten Flächennormale in dem Punkte, dem die elektrische Dichtheit ϱ_s zukommt.

Man weiss ferner, dass es nur eine einzige Function V giebt, die allen Bedingungen des Problems in der letzteren Form genügt, also auch nach der vorigen Gleichung nur einen einzigen Werth für ϱ_s oder nur ein einziges elektrostatisches Gleichgewicht, das den Bedingungen des Problems in der ersteren Form genügt.

Man weiss auch, dass kein Oberflächenelement irgend eines Leiters frei von Elektricität bleibt und dass infolge dessen die Potentialfunction V für alle Punkte auf und innerhalb eines Leiters einen und denselben Werth hat, wenn sie diesen Werth nur für alle Punkte eines beliebig kleinen, aber nicht unendlich kleinen Raumes im Innern des Leiters besitzt.

---

* Wir trennen mit Clausius Potentialfunction und Potential, indem wir unter letzterem die negative Arbeit verstehen, die geleistet wird, wenn der Punkt, auf den sich die Potentialfunction bezieht, aus unendlicher Entfernung in seine wirkliche Lage rückt.

Wir benützen diese letzteren beiden Thatsachen zur Lösung des in der ersten Form vorgelegten Problems.

Wir nehmen an, dass keine der gegebenen Leiteroberflächen scharfe Spitzen oder Kanten besitzt; sollte dies aber in der That der Fall sein, so ersetzen wir zunächst ein solches Flächenstück der Leiteroberfläche mit unendlich kleinem Krümmungsradius durch ein anderes mit endlicher Krümmung und sehen erst am Ende der Rechnung zu, wie sich die gefundene Vertheilung der Elektricität ändert, wenn wir von einer endlichen Krümmung zu der verlangten unendlich grossen übergehen.

Wir nehmen ferner an, dass sich in jedem einzelnen Leiter ein Punkt als Pol eines räumlichen Polarcoordinatensystems finden lasse, derart, dass irgend ein Radius vector die Oberfläche desjenigen Leiters, in welchem der Pol des dem Radius vector zugehörigen Coordinatensystems liegt, in nicht mehr, als einem Punkte treffe und dass dieser Pol allenthalben um ein nicht verschwindendes Stück von der Leiteroberfläche entfernt sei. Sollte dieses nicht möglich sein, so zerlegen wir den betreffenden Leiter, für welchen die eben gemachte Annahme nicht zutrifft, durch zweckmässige Schnittflächen in mehrere Leiter und behandeln jeden der dadurch entstandenen Partialleiter als Leiter für sich, indem wir bedenken, dass in allen Partialleitern, die aus demselben ursprünglichen Leiter entstanden sind, die Potentialfunction der nach den Anforderungen des Gleichgewichts vertheilten Elektricität einen und denselben Werth aufweisen muss.

Die Anzahl der Leiter, welche den beiden eben gemachten Annahmen genügen, sei q, dann können wir die Dichtheit oder Menge der Elektricität, die sich an irgend einer Stelle der Oberfläche irgend eines, etwa des s^{ten} Leiters befindet, darstellen durch

$$1)\qquad \varrho_s = \sum_0^{\infty}{}_n \sum_{-n}^{+n}{}_\lambda \; {}^n k_s^\lambda \, P_\lambda^n (\cos {}_s\theta_s)\, e^{i\lambda\, {}_s\varphi_s}.$$

Hierin bedeutet ${}_s\varphi_s$ die Länge, ${}_s\theta_s$ die Breite des Oberflächenelements mit der elektrischen Dichtheit ϱ_s, bezogen auf das im s^{ten} Leiter angenommene Polarcoordinatensystem, und die durch die Gleichung 1) dargestellte Entwickelung von ϱ_s ist die nach Kugelfunctionen, so dass also die Coefficienten ${}^n k_s^\lambda$ allein die unbekannten und durch die nachfolgende Rechnung zu bestimmenden Grössen sind. Es versteht sich von selbst, dass für uns auf der rechten Seite der Entwickelung 1) nur die reellen Theile beizubehalten sind.

In Bezug auf die an θ und φ angehängten doppelten Indices möge Folgendes festgehalten werden: Der rechts angehängte Index beziehe sich

auf die Nummer des Leiters, der links angehängte auf die Nummer des angewandten Coordinatensystems, die dieselbe ist, wie die Nummer des Leiters, in welchem der Pol des Coordinatensystems liegt.

Bezogen auf das p^{te} Coordinatensystem, lautet daher die Gleichung 1):

$$\varrho_s = \sum_0^\infty {}_n \sum_{-n}^{+n} {}_\lambda \, {}^n k_s^\lambda \, P_\lambda^n (\cos {}_p\theta_s) \, e^{i\lambda_p \varphi_s}.$$

Die gewählten bestimmten Coordinatensysteme in jedem einzelnen Leiter geben durch ihre bekannte gegenseitige Lage das Mittel an die Hand, die Coordinaten mit verschiedenen linken Indices in einander umzurechnen und durch einander darzustellen.

Sind ${}_p r_s$, ${}_p\theta_s$ und ${}_p\varphi_s$ die Coordinaten eines Oberflächenpunktes des s^{ten} Leiters in Bezug auf das p^{te} Coordinatensystem, so besitzt eine Kugelfläche mit dem Radius ${}_p r_s$ in jenem Punkte das Oberflächenelement

$$ds = {}_p r_s^2 \sin {}_p\theta_s \, d_p\theta_s \, d_p\varphi_s.$$

Ist ∂w das in jenem Punkte auf dem daselbst gelegenen Oberflächenelement db des s^{ten} Leiters errichtete Normalenelement, das mit $\partial_p r_s$ einen spitzen Winkel bildet, so ist

$$db \, . \, \frac{\partial_p r_s}{\partial w} = ds,$$

folglich

$$db = \frac{{}_p r_s^2}{\frac{\partial_p r_s}{\partial w}} \sin {}_p\theta_s \, d_p\theta_s \, d_p\varphi_s. \tag{2}$$

Irgend ein Punkt im Innern des p^{ten} Leiters sei vom Pol des p^{ten} Coordinatensystems um a_p entfernt und sein Fahrstrahl bilde mit dem des Oberflächenelements db den Winkel ${}_p\gamma_s$, dann ist die Entfernung dieses Punktes vom Oberflächenelement db

$$r = \sqrt{{}_p r_s^2 + a_p^2 - 2 \, {}_p r_s \, a_p \cos {}_p\gamma_s}. \tag{3}$$

Die Potentialfunction der auf dem s^{ten} Leiter haftenden Elektricität auf den im p^{ten} Leiter angenommenen Punkt ist somit

$$\sum_0^\infty {}_n \sum_{-n}^{+n} {}_\lambda \, {}^n k_s^\lambda \int_{{}_p\vartheta'_s}^{{}_p\vartheta''_s} \sin {}_p\theta_s \, d_p\theta_s \int_{{}_p\varphi'_s}^{{}_p\varphi''_s} \frac{{}_p r_s^2}{\frac{\partial_p r_s}{\partial w}} \frac{P_\lambda^n (\cos {}_p\theta_s) \, e^{i\lambda_p\varphi_s} \, d_p\varphi_s}{\sqrt{{}_p r_s^2 + a_p^2 - 2 \, {}_p r_s \, a_p \cos {}_p\gamma_s}},$$

wenn die Integrationsgrenzen ${}_p\vartheta'_s$, ${}_p\vartheta''_s$, ${}_p\varphi'_s$, ${}_p\varphi''_s$ so gewählt sind, dass sich die Integration erstreckt über die ganze Oberfläche des s^{ten} Leiters; im Falle $p = s$ ist also

$$ {}_s\varphi'_s = {}_p\varphi'_p = 0, \quad {}_s\varphi''_s = {}_p\varphi''_p = 2\pi, $$
$$ {}_s\vartheta'_s = {}_p\vartheta'_p = 0, \quad {}_s\vartheta''_s = {}_p\vartheta''_p = \pi. $$

Ist ferner U die bekannte Potentialfunction der auf den Nichtleitern haftenden Elektricität auf den im p^{ten} Leiter angenommenen Punkt, so soll nun im Falle des elektrischen Gleichgewichts die Gesammtpotentialfunction aller vorhandenen Elektricität auf den im p^{ten} Leiter angenommenen Punkt einen constanten Werth α_p haben, wo auch innerhalb eines endlich grossen Raumes im p^{ten} Leiter dieser Punkt liege. Sind daher a_p, ϑ_p und ψ_p die Coordinaten jenes Punktes, und ist a_p so klein, dass die mit dem Radius a_p um den Pol des p^{ten} Coordinatensystems beschriebene Kugel nirgends ausserhalb des p^{ten} Leiters liegt, so soll sein:

$$ \text{I)} \quad U + \sum_1^q {}_s \sum_0^\infty {}_n \sum_{-n}^{+n} {}_\lambda \, {}^n k_s^\lambda \int_{{}_p\vartheta'_s}^{{}_p\vartheta''_s} \sin {}_p\theta_s \, d_p\theta_s \int_{{}_p\varphi'_s}^{{}_p\varphi''_s} \frac{{}_pr_s^2}{\frac{\partial {}_pr_s}{\partial w}} \frac{P_\lambda^n(\cos {}_p\theta_s)\, e^{i\lambda {}_p\varphi_s}}{\sqrt{{}_pr_s^2 + a_p^2 - 2\,{}_pr_s\, a_p \cos {}_p\gamma_s}} \, d\,{}_p\varphi_s = \alpha_p. $$

In dieser Gleichung ist offenbar U sowohl, wie auch die mehrfache Summe der linken Seite eine Function von a_p, ϑ_p und ψ_p.

Entwickeln wir nun beide Seiten der Gleichung I) nach Kugelfunctionen in Bezug auf ϑ_p und ψ_p, so folgt, weil eine solche Entwickelung wie in unserem Falle immer und nur auf eine einzige Weise ausführbar ist, dass die Entwickelungscoefficienten selbst einander gleich sein müssen.

Setzen wir nun für diese Entwickelung von U:

$$ \text{4)} \quad U = \sum_0^\infty {}_u \sum_{-u}^{+u} {}_v \, {}^u U_p^v \, a_p^u \, P_v^u(\cos \vartheta_p)\, e^{iv\psi_p}, $$

und beachten, dass, weil α_p constant ist, bei der Entwickelung der rechten Seite allein erscheint

$$ \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin \vartheta_p \, d\vartheta_p \int_0^{2\pi} \alpha_p \, d\psi_p = \frac{\alpha_p}{2} \int_0^\pi \sin \vartheta_p \, d\vartheta_p = \alpha_p, $$

während sämmtliche übrige Coefficienten der Entwickelung verschwinden, so erhalten wir durch Vergleichung der Entwickelungscoefficienten das System unendlich vieler linearer Gleichungen mit den Unbekannten ${}^n k_s^\lambda$

$$\left.\begin{matrix}0\\ v,u\\ \infty\end{matrix}\right| {}^{u}U_p^v\, a_p^u + \sum_1^q{}_s \sum_0^\infty{}_n \sum_{-n}^{+n}{}_\lambda\, {}^n k_s^\lambda\, \frac{2u+1}{4\pi} \int_0^\pi P_v^u(\cos\vartheta_p) \sin\vartheta_p\, d\vartheta_p \int_0^{2\pi} e^{iv\psi_p}\, d\psi_p$$

I a) $$\times \int_{{}_p\vartheta'_s}^{{}_p\vartheta''_s} \sin{}_p\theta_s\, d_p\theta_s \int_{{}_p\varphi'_s}^{{}_p\varphi''_s} \frac{P_\lambda^n(\cos{}_p\theta_s)\, e^{i\lambda\, {}_p\varphi_s}\, {}_pr_s^2}{\frac{\partial\, {}_pr_s}{\partial w} \sqrt{{}_pr_s^2 + a_p^2 - 2\,{}_pr_s\, a_p \cos{}_p\gamma_s}}\, d_p\varphi_s$$

$$= \left\{\begin{matrix} a_p, & \text{wenn } u = 0 \\ 0, & ,, \quad u > 0 \end{matrix}\right| .$$

Ist dieses System Gleichungen erfüllt, so ist es auch die Bedingung I) für das elektrische Gleichgewicht insoweit, als der Punkt a_p, ϑ_p, ψ_p irgendwo auf der mit dem Radius a_p um den Pol des p^{ten} Coordinatensystems beschriebenen Kugelfläche liegen kann.

Entwickeln wir endlich noch die unter dem Integralzeichen stehende Function von ϑ_p und ψ_p nach Kugelfunctionen, so ist

$$\frac{1}{\sqrt{{}_pr_s^2 + a_p^2 - 2\,{}_pr_s\, a_p \cos{}_p\gamma_s}} = \sum_0^\infty{}_m \frac{a_p^m}{{}_pr_s^{m+1}} P^m(\cos{}_p\gamma_s),$$

weil in unserem Falle immer $a_p < {}_pr_s$, gleichgiltig, welchen Werth p und s haben; nun ist auch

$$P^m(\cos{}_p\gamma_s) = \sum_{-m}^{+m}{}_\mu (-1)^\mu \frac{(1.3\ldots\overline{2m-1})^2}{\Pi(m+\mu)\,\Pi(m-\mu)} P_\mu^m(\cos\vartheta_p)\, P_\mu^m(\cos{}_p\theta_s)\, e^{i\mu({}_p\varphi_s - \psi_p)},$$

$$\Pi(n) = 1.2.3\ldots n,$$

n eine ganze Zahl.

Für die in I a) nach ϑ_p und ψ_p auszuführenden Integrationen entsteht demnach

$$\int_0^\pi P_v^u(\cos\vartheta_p) \sin\vartheta_p\, d\vartheta_p \int_0^{2\pi} \sum_0^\infty{}_m \frac{a_p^m}{{}_pr_s^{m+1}} \sum_{-m}^{+m}{}_\mu (-1)^\mu \frac{(1.3\ldots\overline{2m-1})^2}{\Pi(m+\mu)\,\Pi(m-\mu)}$$

$$\times P_\mu^m(\cos\vartheta_p)\, e^{i(v-\mu)\psi_p}\, d\psi_p.$$

Nun ist aber

$$\int_0^{2\pi} e^{i(v-\mu)\psi_p}\, d\psi_p = \left\{\begin{matrix} 2\pi, & \text{wenn } v = \mu, \\ 0, & ,, \quad v \gtrless \mu. \end{matrix}\right.$$

Das vorstehende Integral vereinfacht sich also zu

$$2\pi \sum_0^\infty {}_m \frac{a_p^m}{{}_p r_s^{m+1}} (-1)^v \frac{(1.3\ldots \overline{2m-1})^2}{\Pi(m+v)\,\Pi(m-v)} \int_0^\pi P_v^u(\cos\vartheta_p)\, P_v^m(\cos\vartheta_p) \sin\vartheta_p\, d\vartheta_p$$

und es kann v nur Werthe annehmen, die zwischen $-m$ und $+m$ liegen, beide ganzen Zahlen mit eingeschlossen.

Es ist aber auch weiter

$$\int_0^\pi P_v^u(\cos\vartheta_p)\, P_v^m(\cos\vartheta_p) \sin\vartheta_p\, d\vartheta_p$$

$$= \begin{cases} (-1)^v \dfrac{2}{2u+1} \dfrac{\Pi(u+v)\,\Pi(u-v)}{(1.3\ldots \overline{2u-1})^2}, & \text{wenn } u=m, \\ 0, & \quad ,, \quad u \gtrless m. \end{cases}$$

Dadurch vereinfacht sich aber die vorige Summe zu

$$2\pi . \frac{2}{2u+1} \frac{a_p^u}{{}_p r_s^{u+1}}$$

und das Gleichungensystem Ia) geht über in das bei weitem einfachere:

$$\text{Ib)} \quad \begin{array}{c}0\\ v,u\\ \infty\end{array}\Bigg|\; {}^uU_p^v\, a_p^u + \sum_1^q {}_s \sum_0^\infty {}_n \sum_{-n}^{+n} {}_\lambda\, {}^nk_s^\lambda\, a_p^u \int_{{}_p\vartheta'_s}^{{}_p\vartheta''_s} \sin {}_p\theta_s\, d_p\theta_s$$

$$\times \int_{{}_p\varphi'_s}^{{}_p\varphi''_s} \frac{P_\lambda^n(\cos{}_p\theta_s)\, P_v^u(\cos{}_p\theta_s)\, e^{i(\lambda+v)\,{}_p\varphi_s}}{{}_p r_s^{u-1} \dfrac{\partial\, {}_p r_s}{\partial w}}\, d_p\varphi_s$$

$$= \begin{cases} \alpha_p, & \text{wenn } u=0 \\ 0, & \quad ,, \quad u>0 \end{cases}\Bigg|.$$

Die Entwickelung 4) für U enthält, wie auch geschrieben worden ist, in der That den Factor a_p^u, wie man sich leicht überzeugen kann, wenn man die Potentialfunction U auf den Punkt a_p, ϑ_p, ψ_p bezieht auf das im p^{ten} Leiter gelegene Coordinatensystem; es ist demnach die ganze linke Seite der v,u^{ten} Gleichung des Systems Ib) mit dem Factor a_p^u behaftet; aber wegen der Form der rechten Seiten der Gleichungen dieses Systems kann man diesen Factor einfach durch Division entfernen. Wir erhalten also aus dem System Ib) das noch einfachere:

$$\left.\begin{matrix}0\\v,u\\\infty\end{matrix}\right| {}^uU_p^v + \sum_1^q{}_s \sum_0^\infty{}_n \sum_{-n}^{+n}{}_\lambda\, {}^nk_s^\lambda \int_{{}_p\vartheta'_s}^{{}_p\vartheta''_s} \sin_p\theta_s\, d_p\theta_s$$

II)
$$\int_{{}_p\varphi'_s}^{{}_p\varphi''_s} \frac{P_\lambda^n(\cos_p\theta_s)\, P_v^u(\cos_p\theta_s)\, e^{i(\lambda+v)_p\varphi_s}}{{}_pr_s^{u-1}\frac{\partial_p r_s}{\partial w}}\, d_p\varphi_s$$

$$= \left\{\begin{matrix}\alpha_p, & \text{wenn } u=0\\ 0, & \text{,, } u>0\end{matrix}\right| .$$

Da in diesem System von Bedingungsgleichungen der Radius der Kugel a_p nicht mehr vorkommt, so folgt, dass, wenn die Unbekannten ${}^nk_s^\lambda$ diesem System entsprechend bestimmt sind, dann auch die Bedingung des elektrischen Gleichgewichts erfüllt ist, gleichgiltig, wo der Punkt a_p, ϑ_p, ψ_p in einer um den Pol des p^{ten} Coordinatensystems beschriebenen und ganz innerhalb des p^{ten} Leiters gelegenen Kugel befindlich ist. Die Bedingung des elektrischen Gleichgewichts ist also dann erfüllt für den ganzen Raum der genannten Kugel, folglich nach dem oben genannten Satze auch für den ganzen vom p^{ten} Leiter umschlossenen Raum.

Das System Gleichungen II) repräsentirt also alle Bedingungen für das elektrische Gleichgewicht, wi können also auch in der Folge die Auflösung dieses Systems als einzig noch zu lösende Aufgabe betrachten.

Es bedarf nur einer kurzen Erwähnung, dass das System Bedingungsgleichungen II) q solcher Systeme repräsentirt, indem p alle Werthe von 1 bis p anzunehmen hat, und dass die in dem System II) vorkommenden imaginären Werthe nur formelle Geltung haben, in Wirklichkeit aber ganz vernachlässigt werden können.

Was das System II) noch sehr wenig handlich für eine auszuführende Rechnung macht, das sind die im Allgemeinen von einander abhängigen Integrationsgrenzen ${}_p\vartheta'_s$, ${}_p\vartheta''_s$, ${}_p\varphi'_s$ und ${}_p\varphi''_s$; wir suchen daher zunächst diese Integrationsgrenzen in constante (von einander unabhängige) zu verwandeln auf einem Wege, der auch sonst die Auflösung des Systems II) bei weitem einfacher macht, als dies die obige Form zulässt.

Es sei allgemein

5)
$${}^nx_s^\lambda = {}^n{}_0x_s^\lambda + {}^n{}_1x_s^\lambda + {}^n{}_2x_s^\lambda + \ldots$$

und ${}^n{}_0x_s^\lambda$ möge Das bedeuten, was aus ${}^nk_s^\lambda$ wird, wenn alle Elektricität, die sich auf den Nichtleitern und auf den Leitern mit Ausnahme des s^{ten} befindet, plötzlich in unendliche Entfernung fortrückte, ohne dass sich der Werth von α_s änderte, oder, mit anderen Worten, es soll

$$\sum_0^\infty{}_n \sum_{-n}^{+n}{}_\lambda \, {}^n{}_0k_s^\lambda \, P_\lambda^n(\cos{}_s\theta_s) \, e^{i\lambda \, {}_s\varphi_s}$$

die Function darstellen, nach welcher Elektricität auf dem s^{ten} Leiter so vertheilt ist, dass sie in dessen innerem Raume allenthalben die constante Potentialfunction α_s bewirkt.

Benützen wir das System II) zur Berechnung von ${}^n{}_0\varkappa_p^\lambda$, so sind linker Hand alle die Glieder zu vernachlässigen, welche sich auf andere elektrische Massen als die auf dem p^{ten} Leiter haftenden beziehen; es ist also

$$\text{III)}\quad {}_{v,u}\Bigg|_{\infty}^{0} \sum_0^\infty{}_n \sum_{-n}^{+n}{}_\lambda \, {}^n{}_1\varkappa_p^\lambda \int_0^\pi \sin{}_p\theta_p \, d_p\theta_p \int_0^{2\pi} \frac{P_\lambda^n(\cos{}_p\theta_p)\, P_v^u(\cos{}_p\theta_p)\, e^{i(\lambda+v)\,{}_p\varphi_p}}{{}_pr_p^{u-1}\,\dfrac{\partial\,{}_pr_p}{\partial w}}\, d_p\varphi_p$$

$$= \left\{\begin{matrix} \alpha_p, & \text{wenn } u = 0 \\ 0, & \text{,, } \; u > 0 \end{matrix}\right|.$$

Indem wir dem p alle ganzzahligen Werthe von 1 bis q beilegen, stellen wir für jeden Leiter ein solches System Gleichungen auf, wie III) für den p^{ten} Leiter. Wir denken uns nun aus diesen q Systemen die ${}^n{}_0\varkappa_p^\lambda$ berechnet für jedes p, λ und n und bilden alsdann das neue System Gleichungen:

$$\text{IV)}\quad {}_{v,u}\Bigg|_{\infty}^{0} \sum_0^\infty{}_n \sum_{-n}^{+n}{}_\lambda \, {}^n{}_1\varkappa_p^\lambda \int_0^\pi \sin{}_p\theta_p \, d_p\theta_p \int_0^{2\pi} \frac{P_\lambda^n(\cos{}_p\theta_p)\, P_v^u(\cos{}_p\theta_p)\, e^{i(\lambda+v)\,{}_p\varphi_p}}{{}_pr_p^{u-1}\,\dfrac{\partial\,{}_pr_p}{\partial w}}\, d_p\varphi_p$$

$$= -\,{}^uU_p^v - \sum_{1\;p+1}^{p-1\;q}{}_s \sum_0^\infty{}_n \sum_{-n}^{+n}{}_\lambda \, {}^n{}_0\varkappa_s^\lambda \int_{{}_p\theta'_s}^{{}_p\theta''_s} \sin{}_p\theta_s \, d_p\theta_s \int_{{}_p\varphi'_s}^{{}_p\varphi''_s} \frac{P_\lambda^n(\cos{}_p\theta_s)\, P_v^u(\cos{}_p\theta_s)\, e^{i(\lambda+v)\,{}_p\varphi_s}}{{}_pr_s^{u-1}\,\dfrac{\partial\,{}_pr_s}{\partial w}}\, d_p\varphi_s \Bigg|.$$

Ein solches System Gleichungen, wie das IV), in welchem die rechten Seiten vollständig bekannt sind, stellen wir für jeden Leiter auf und berechnen daraus ${}^{n}{}_{1}\varkappa_{p}^{\lambda}$ für jedes p, λ und n. Wir stellen nun das neue System auf:

$$\text{V)}\quad {}^{0}_{v,u}{}_{\infty}\Bigg| \sum_{0}^{\infty}{}_{n} \sum_{-n}^{+n}{}_{\lambda}\, {}^{n}{}_{2}\varkappa_{p}^{\lambda} \int_{0}^{\pi} \sin {}_{p}\theta_{p}\, d_{p}\theta_{p} \int_{0}^{2\pi} \frac{P_{\lambda}^{n}(\cos {}_{p}\theta_{p})\, P_{v}^{u}(\cos {}_{p}\theta_{p})\, e^{i(\lambda+v)\,{}_{p}\varphi_{p}}}{{}_{p}r_{p}^{u-1}\,\frac{\partial\, {}_{p}r_{s}}{\partial w}}\, d_{p}\varphi_{p}$$

$$= -\sum_{1\,p+1}^{p-1\,q}{}_{s} \sum_{0}^{\infty}{}_{n} \sum_{-n}^{+n}{}_{\lambda}\, {}^{n}{}_{1}k_{s}^{\lambda} \int_{{}_{p}\vartheta'_{s}}^{{}_{p}\vartheta''_{s}} \sin {}_{p}\theta_{s}\, d_{p}\theta_{s} \int_{{}_{p}\varphi'_{s}}^{{}_{p}\varphi''_{s}} \frac{P_{\lambda}^{n}(\cos {}_{p}\theta_{s})\, P_{v}^{u}(\cos {}_{p}\theta_{s})\, e^{i(\lambda+v)\,{}_{p}\varphi_{s}}}{{}_{p}r_{s}^{u-1}\,\frac{\partial\, {}_{p}r_{s}}{\partial w}}\, d_{p}\varphi_{s}\Bigg|$$

und berechnen aus ihm die ${}^{n}{}_{2}\varkappa_{p}^{\lambda}$ für jedes p, λ und n. Das nächste Gleichungensystem, welches die Werthe von ${}^{n}{}_{3}\varkappa_{p}^{\lambda}$ für jedes p, λ und n liefern würde, geht aus dem V) einfach dadurch hervor, dass man linker Hand statt ${}^{n}{}_{2}\varkappa_{p}^{\lambda}$ ${}^{n}{}_{3}\varkappa_{p}^{\lambda}$ setzt und rechter Hand ${}^{n}{}_{2}\varkappa_{s}^{\lambda}$ statt ${}^{n}{}_{1}\varkappa_{s}^{\lambda}$. Fährt man in dieser Weise fort, so erhält man den Werth von ${}^{n}{}_{r}\varkappa_{p}^{\lambda}$ für jedes p, λ, n und r.

Bringt man in den Systemen von Gleichungen IV), V) u. s. w. die rechten Seiten auf die linken und addirt die sämmtlichen Gleichungen mit demselben v, u zu der entsprechenden des Systems III), so findet man bei Beachtung der Gleichung 5), dass das System II) erscheint, also, da man die $\varkappa$ gefunden hat und daraus nach 5) die k berechnen kann, das ganze vorgelegte Problem gelöst ist.

Durch die letztere Betrachtung ist daher die Lösung des ganzen vorgelegten Problems auf die Berechnung der $\varkappa$ reducirt worden. Bevor wir aber weiter zur Berechnung der $\varkappa$ übergehen, müssen wir erst untersuchen, ob auch die Gleichung 5) gerechtfertigt ist und was sie bedeutet.

Nach dem angegebenen einzuschlagenden Gange der Rechnung finden wir unendlich viele Werthe für die ${}^{n}_{r}\varkappa_{p}^{\lambda}$ mit demselben p, λ und n; soll also

die Substitution 5) brauchbar sein, so muss die rechter Hand stehende unendliche Reihe der $\varkappa$ convergiren.

Nach der oben gegebenen Bedeutung von ${}^{n}{}_{0}\varkappa_{s}^{\lambda}$ für ein beliebiges s, λ und n müssen diese Coefficienten immer endlich sein. Bringt man in dem Systeme IV) die rechten Seiten mit auf die linke, so erkennt man leicht, dass es diejenigen ${}^{n}{}_{1}\varkappa_{p}^{\lambda}$ (mit beliebigem p, λ und n) kennen lehrt, die eingesetzt in die Entwickelung

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{n} \sum_{-n}^{+n}{}_{\lambda}\, {}^{n}{}_{1}\varkappa_{p}^{\lambda}\, P_{\lambda}^{n}(\cos{}_{p}\theta_{p})\, e^{i\lambda\, p\varphi_{p}}$$

diejenige Vertheilung von Elektricität geben, welche zugleich mit der bereits berechneten, auf den übrigen Leitern haftenden und mit der auf den Nichtleitern vorhandenen für alle Punkte des p^{ten} Leiters eine Potentialfunction gleich Null erzeugt. Es ist also mit kurzen Worten die Influenzelektricität, die auf dem p^{ten} Leiter erzeugt werden würde, wenn dieser abgeleitet wäre und die übrigen Leiter, ohne ihren bereits berechneten elektrischen Zustand zu ändern, in Nichtleiter übergingen.

Aehnliches drückt das Gleichungensystem V) aus, wenn man die aus ihm zu findenden Werthe von ${}^{n}{}_{2}\varkappa_{p}^{\lambda}$ (für jedes p, λ und n) statt ${}^{n}{}_{1}\varkappa_{p}^{\lambda}$ in die vorige Entwickelung einsetzt, die Influenzelektricität, die auf dem abgeleiteten p^{ten} Leiter von der nach der vorigen Entwickelung über die Leiter verbreiteten Elektricität erzeugt wird u. s. w.

Nun weiss man, dass die Influenzelektricität eines elektrischen Massenpunktes ausserhalb eines Leiters auf einen (zur Erde) abgeleiteten Leiter ihrem Vorzeichen nach entgegengesetzt, ihrer absoluten Menge nach kleiner ist als die influenzirende Masse, und zwar um so kleiner, je weiter der influenzirende elektrische Massenpunkt vom Leiter entfernt ist, während sie der influenzirenden Masse gleich wird, wenn der influenzirende Punkt selbst auf der Oberfläche des Leiters liegt oder innerhalb einer Höhlung des Leiters, in welchem letzteren Falle zugleich alle auf dem abgeleiteten Leiter erregte Influenzelektricität sich nur auf der innern, die Höhlung begrenzenden Oberfläche befindet und diese in allen ihren Theilen überdeckt.

Aus der Stetigkeit, mit welcher die ebengenannten Influenzelektricitäten die Leiteroberflächen überdecken, folgt, dass bei ihrer Entwickelung nach Kugelfunctionen die Entwickelungscoefficienten durchaus endliche Werthe erlangen müssen. Denken wir uns nun in dem Falle, wenn die Leiter durchgängig durch nicht unendlich kleine Zwischenräume von einander getrennt sind und ausserhalb einander liegen, allemal die influenzirenden Massen desselben Vorzeichens in dem dem influenzirten Leiter nächsten Punkte der Oberfläche des influenzirenden Leiters vereinigt, so würden die Entwickelungscoefficienten der successiven Influenzelektricitä-

ten nach Art einer geometrischen Reihe abnehmen; in Wirklichkeit muss also die Reihe

$$ {}^{n}{}_{0}\varkappa_{s}^{\lambda} + {}^{n}{}_{1}\varkappa_{s}^{\lambda} + {}^{n}{}_{2}\varkappa_{s}^{\lambda} + {}^{n}{}_{3}\varkappa_{s}^{\lambda} + \dots $$

noch stärker convergiren als eine geometrische Reihe. Liegt aber ein Leiter, etwa der r^{te}, isolirt innerhalb eines andern, etwa innerhalb des s^{ten}, so ist wenigstens für den r^{ten} Leiter der s^{te} ausserhalb gelegen, folglich muss die Reihe

$$ {}^{n}{}_{0}\varkappa_{r}^{\lambda} + {}^{n}{}_{1}\varkappa_{r}^{\lambda} + {}^{n}{}_{2}\varkappa_{r}^{\lambda} + \dots $$

convergiren, und zwar noch stärker als eine geometrische Reihe, und infolge dessen, weil nämlich die influenzirenden Elektricitäten mehr als eine geometrische Reihe convergiren, muss nun auch die auf den umschliessenden s^{ten} Leiter hervorgerufene Influenzelektricität in derselben Weise convergiren.

Es bleibt nun nur noch der Fall zu betrachten übrig, wo Leiter einander in Flächen, Linien oder Punkten berühren. Findet die Berührung aber in einem ausgedehnten Flächenstück statt, so befindet sich auf diesem gar keine Elektricität, weil es mit zum innern Leiterraum gerechnet werden kann. Dasselbe gilt auch für die Berührung längs einer Linie oder in einem Punkte; zugleich muss aber auch der Werth der Gesammtpotentialfunction aller vorhandenen Elektricität für alle Punkte innerhalb oder auf den sich berührenden Leitern denselben Werth haben. Man kann hiernach, im Falle sich Leiter berühren, in den Gleichungen III), IV), V) u. s. f. die Berührungsstücke ganz ausser Acht lassen und erhält das Resultat, die rechte Seite der Gleichung 5) convergirt immer und zwar noch stärker als eine geometrische Reihe.*

Wir gehen nun über zu der einzig noch vorliegenden Arbeit, nämlich zur Berechnung der $\varkappa$.

Die Berechnung der $\varkappa$ hat zu erfolgen aus den Systemen unendlich vieler linearer Gleichungen III), IV), V) u. s. w.; aber alle diese Systeme, deren unendlich viele aufzulösen sind, haben die wichtige Eigenschaft, dass die Coefficienten der Unbekannten dieselben sind in allen aufzulösenden Systemen, in welchen p denselben Werth besitzt. In Wirklichkeit ist also die inverse Coefficientenfunction nur von so vielen Systemen von Gleichungen zu bestimmen, als Leiteroberflächen vorhanden sind. Auch die rechten Seiten jener Systeme von Gleichungen III), IV), V) u. s. w. erfordern,

* Es ist bemerkenswerth, dass die Rechnung so sehr vereinfacht wird durch die Zerlegung des Systems II) in die Systeme III), IV), V) u. s. w., indem diese Rechnung mit den successiven Influenzen ganz dem natürlichen Laufe beim Eintritt des elektrischen Gleichgewichts zu folgen scheint, wie wenigstens die schwingungsartig erfolgenden Entladungen einander hinreichend genäherter elektrischer Leiter anzudeuten scheinen.

da wir allgemein α_p und ${}^{u}U_p^{v}$ als bekannt voraussetzen, für je eine Leiteroberfläche nur eine einmalige Berechnung.

Im Ganzen reducirt sich daher die jetzt noch zu lösende Aufgabe auf die Auflösung von q Systemen unendlich vieler linearer Gleichungen von der Form

$$\text{VI)} \qquad \overset{0}{\underset{\infty}{m}}\left| x_p f_0(m, p) = \varphi_m \right|,$$

wenn

$$x_p = {}^{n}k^{\lambda}$$

$$f_0(m, p) = \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \frac{P_\lambda^{n}(\cos\theta)\, P_v^{u}(\cos\theta)\, e^{i(\lambda+v)\varphi}}{r^{u-1}\dfrac{\partial r}{\partial w}} d\varphi,$$

$\varphi_m =$ ein bekannter Coefficient einer Entwickelung nach Kugelfunctionen.

Die unnöthigen Indexe sind bei diesen Definitionsgleichungen weggelassen worden und der Zusammenhang zwischen den Grössen p mit λ und n und m mit v und u wird genauer dadurch bestimmt, dass man in der Reihenfolge der Unbekannten ${}^{0}x^{0}$, ${}^{1}x^{0}$, ${}^{1}x^{-1}$, ${}^{1}x^{1}$, ${}^{2}k^{0}$, ${}^{2}x^{-1}$, ${}^{2}x^{+1}$, ${}^{2}x^{-2}$; ${}^{2}x^{+2}$... unter ${}^{n}x^{\lambda}$ die p^{te} und in der ähnlich nach v, u angeordneten Reihenfolge der Gleichungen unter der v, u^{ten} Gleichung die m^{te} versteht.

Nun habe ich früher in dieser Zeitschrift in meinen beiden Artikeln „Ueber die Auflösung eines Systems von unendlich vielen linearen Gleichungen" einen Weg zur Lösung des obigen Systems von Gleichungen angegeben, derart, dass man den Werth irgend einer der Unbekannten x_p mit beliebiger Genauigkeit berechnen kann. Es erscheint in jenen Abhandlungen der Werth der Unbekannten x_p nach einem bestimmten Gesetze gebildet und er kann in allgemeinen algebraischen Zeichen dargestellt werden, so dass wir hiermit das anfänglich ausgesprochene Problem als gelöst betrachten können.

Eine Lösung des Problems in der zweiten Form würde zwar wissenschaftlich von bei Weitem höherem Werthe sein, als die vorliegende Lösung des ersten Problems; allein die anerkannte Schwierigkeit jener Lösung dürfte auf Formeln führen, die in den praktischen Anwendungen auf die Physik doch der vorgelegten Lösung den Vorrang zugestehen würden.

Einige neue Sätze zur Lösung des Problems in der zweiten Form und Beispiele für die vorgelegte Lösung des Problems in der ersten Form gedenke ich nächstens mitzutheilen.

Es mögen hier noch einige Betrachtungen Platz finden, die zur Vereinfachung oder Erläuterung des Systems VI) dienen können.

Es war

$$f_0(m,p) = \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} \frac{P_\lambda^n(\cos\theta)\, P_v^u(\cos\theta)\, e^{i(\lambda+v)\varphi}}{r^{u-1}\dfrac{\partial r}{\partial w}}\, d\varphi;$$

ist nun bei einer Entwickelung nach Kugelfunctionen

$$\frac{P_v^u(\cos\theta)\, e^{iv\varphi}}{r^{u-1}\dfrac{\partial r}{\partial w}} = \sum_0^{\infty}{}_m \sum_{-m}^{+m}{}_\mu\, {}_v^u A_\mu^m\, P_\mu^m(\cos\theta)\, e^{-i\mu\varphi},$$

so erhält man, wenn man diesen Werth in das vorige Doppelintegral für $f_0(m,p)$ substituirt und ähnlich verfährt, wie oben zur Herleitung der Gleichung Ib) aus der Gleichung Ia) geschah,

$$f_0(m,p) = (-1)^\lambda \frac{2}{2n+1} \frac{\Pi(n+\lambda)\,\Pi(n-\lambda)}{(1.3\ldots 2n-1)^2}\, {}_v^u A_\lambda^n,$$

wodurch die Coefficienten $f_0(m,p)$ als gewisse Coefficienten einer Entwickelung nach Kugelfunctionen definirt sind.

Setzt man ferner

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{i(\lambda+v)\varphi}\, d\varphi}{r^{u-1}\dfrac{\partial r}{\partial w}} = \psi(v,u,\lambda),$$

so wird

$$f_0(m,p) = \int_0^{\pi} \psi(v,u,\lambda)\, P_\lambda^n(\cos\theta)\, P_v^u(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta.$$

Setzt man diese Coefficientenfunction ein in das System VI) und beachtet, dass

$$\begin{aligned} P_m^n(\cos x) &= i^m \sin^m x \Big\{ \cos^{n-m} x - \frac{n-m\,.\,n-m-1}{2\,.\,2n-1} \cos^{n-m-2} x \ldots \\ &+ \frac{n-m\,.\,n-m-1\,.\,n-m-2\,.\,n-m-3}{2\,.\,4\,.\,2n-1\,.\,2n-3} \cos^{n-m-4} x \mp \ldots \Big\} \\ &= P_{-m}^n(\cos x), \end{aligned}$$

so kann man linker Hand alle die Glieder vereinigen, die unter dem Integralzeichen dieselben Functionen enthalten.

So sind z. B. in den Factor

$$\int_0^{\pi} \psi(v,u,0)\, P_v^u(\cos\theta)\, i^0 \sin^0\theta \sin\theta\, d\theta$$

multiplicirt alle die Werthe

$$ {}^{0}\varkappa^{0} - \frac{2.1}{2.3}\,{}^{2}\varkappa^{0} + \frac{4.3.2.1}{2.4.7.5}\,{}^{4}\varkappa^{0} - \frac{6.5.4.3.2.1}{2.4.6.11.9.7}\,{}^{6}\varkappa^{0} \pm \ldots = {}^{0}a^{0}. $$

Allgemeiner ist in den Factor

$$ \int_0^\pi \psi\,(v, u, m)\; P_v^u(\cos\theta)\; i^m \sin^m\theta \sin\theta\, d\theta $$

multiplicirt

$$ {}^{m}\varkappa^{m} - \frac{2.1}{2.2m+3}\,.\,{}^{m+2}\varkappa^{m} + \frac{4.3.2.1}{2.4.2m+7.2m+5}\,.\,{}^{m+4}\varkappa^{m} - + \ldots = {}^{0}a^{m}, $$

in

$$ \int_0^\pi \psi\,(v, u, m)\; P_v^u(\cos\theta)\; i^m \sin^m\theta \cos\theta \sin\theta\, d\theta $$

$$ {}^{m+1}\varkappa^{m} - \frac{3.2}{2.2m+5}\,{}^{m+3}\varkappa^{m} + \frac{5.4.3.2}{2.4.2m+9.2m+7}\,{}^{m+5}\varkappa^{m} - + \ldots = {}^{1}a^{m}, $$

in

$$ \int_0^\pi \psi\,(v, u, m)\; P_v^u(\cos\theta)\; i^m \sin^m\theta \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta $$

$$ {}^{m+2}\varkappa^{m} - \frac{4.3}{2.2m+7}\,{}^{m+4}\varkappa^{m} + \frac{6.5.4.3}{2.4.2m+11.2m+9}\,{}^{m+6}\varkappa^{m} - + \ldots = {}^{2}a^{m}; $$

alsdann folgt

$$ {}^{m+3}\varkappa^{m} - \frac{5.4}{2.2m+9}\,{}^{m+5}\varkappa^{m} + \frac{7.6.5.4}{2.4.2m+13.2m+11}\,{}^{m+7}\varkappa^{m} \mp \ldots = {}^{3}a^{m} $$

. . . .

Führt man die eben definirten a als neue Unbekannte in das System VI) ein, so vereinfacht sich die Coefficientenfunction wesentlich, indem jetzt für diese auftritt

$$ \int_0^\pi \psi\,(v, u, \lambda)\; P_v^u(\cos\theta)\; i^\lambda \sin^\lambda\theta \cos^n\theta \sin\theta\, d\theta. $$

Die Berechnung der $\varkappa$ aus den a verlangt zwar wiederum die Auflösung eines Systems unendlich vieler linearer Gleichungen; allein jene Systeme besitzen bereits die Form

$$ \overset{0}{\underset{\infty}{m}}\left|\, \sum_0^\infty{}_p\, f_m(p)\; x_p = (\varphi_m) \,\right| f_m(p) = 0, \text{ so lange } p < m, $$

und ihre Auflösung kann daher ohne grosse Mühe nach früher angegebenen Formeln geschehen.

Ist die Leiteroberfläche, auf welche sich das System VI) bezieht, eine Rotationsfläche, dessen geometrische Axe wir zur Polaraxe wählen kön-

nen, so ist r und $\frac{\partial r}{\partial w}$ von φ unabhängig und die Function

$$\psi(v, u, \lambda) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \lambda + v \gtrless 0 \\ 2\pi, & \;\;\text{„}\;\; \lambda + v = 0 \end{cases}$$

Die linken Seiten des Systems sind daher einfach, da $P^n_{-v} = P^n_{+v}$:

$$\overset{0}{\underset{\infty}{v,u}}\Big|\sum_0^\infty{}_n\, {}^n\varkappa^{-v}\, 2\pi \int_0^\pi \frac{P^n_v(\cos\theta)\, P^u_v(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta}{r^{u-1}\frac{\partial r}{\partial w}}.$$

Wären nun die rechten Seiten so, wie sie das System III) enthält, so könnte man diesem Gleichungensystem genügen, indem man sämmtliche ${}^n\varkappa^{-v}$, deren v von Null verschieden ist, der Null gleichsetzte, und weil es für die Unbekannten $\varkappa$ nur je einen einzigen Werth geben kann, welcher dem Systeme von Gleichungen genügt, so müssen auch die genannten $\varkappa$ die genannten Werthe erhalten.

Besitzen nun auch noch alle übrigen etwa vorkommenden Leiter Rotationsoberflächen mit derselben geometrischen Rotationsaxe, so ergeben sich aus den Systemen III), IV), V) u. s. w. nur solche ${}^n_r\varkappa^\lambda_p$, für welche $\lambda = 0$ ist, während alle anderen dieser Unbekannten selbst der Null gleich sind, vorausgesetzt freilich noch, dass auch die auf den Nichtleitern haftenden Elektricitäten symmetrisch zur gemeinschaftlichen Rotationsaxe vertheilt sind. Unter diesen Annahmen nimmt irgend eines der früheren allgemeineren Systeme die Form an:

$$\overset{0}{\underset{\infty}{u}}\Big|\sum_0^\infty{}_n\, {}^n_r\varkappa^0_p \int_0^\pi \frac{P_0^n(\cos{}_p\theta_p)\, P_0^u(\cos{}_p\theta_p)\sin{}_p\theta_p\, d_p\theta_p}{{}_pr_p^{u-1}\frac{\partial\, {}_pr_p}{\partial w}}$$

$$= \sum_{1\; p+1}^{p-1\; q}{}_s \sum_0^\infty{}_n\, {}_{r-1}^{\;n}k^0_s \int_{{}_p\vartheta'_s}^{{}_p\vartheta''_s} \frac{P_0^n(\cos{}_p\theta_s)\, P_0^u(\cos{}_p\theta_s)\sin{}_p\theta_s\, d_p\theta_s}{{}_pr_s^{u-1}\frac{\partial\, {}_pr_s}{\partial w}}\Bigg|.$$

Die Auflösung der Gleichungensysteme, deren linke Seiten nur die vorhin angegebene Form haben, kann sofort geschehen, wenn ${}_pr_p$ und $\frac{\partial\, {}_pr_p}{\partial w}$ unabhängig von ${}_p\theta_p$ sind, d. h. wenn sämmtliche Leiteroberflächen Kugelflächen sind. In diesem Falle lautet nämlich die Coefficientenfunction, wenn ${}_pr_p = R_p$ und $\frac{\partial\, {}_pr_p}{\partial w} = 1$ gesetzt wird:

$$2\pi\int_0^\pi P_v^u(\cos\theta)\,P_v^n(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$=2\pi.\begin{cases}(-1)^v\dfrac{2}{2u+1}\,\dfrac{\Pi(u+v)\,\Pi(u-v)}{(1.3\ldots\overline{2u-1})^2}, & \text{wenn } u=n,\\ 0, & \text{,, } u\gtrless n.\end{cases}$$

Hiernach bleibt auf den linken Seiten der einzelnen Gleichungen eines jeden Systems nur je eine einzige Unbekannte stehen, die sich nun leicht selbst ermitteln lässt. Die weitere Verfolgung dieser Aufgabe führt auf die strenge Lösung des Problems, die Vertheilung der Elektricität auf einer beliebig angeordneten Kugelschaar zu bestimmen. Für zwei Kugeln stellt sich die Lösung leicht conform mit der Thomson'schen heraus.

Setzt man in dem Falle, wo die vorigen vereinfachten Bedingungsgleichungen (nur Rotationsoberflächen zu derselben geometrischen Axe kommen vor) gelten:

$$P_0^n(\cos{}_p\theta_p)=\frac{n!}{1.3\ldots\overline{2n-1}}\,.\,P^n(\cos{}_p\theta_p),$$

$$ {}_r^n x^0{}_p=\frac{n!}{1.3\ldots\overline{2n-1}}={}_r^n x_p,$$

$$P^n(\cos\theta)=\frac{1.3.5\ldots\overline{2n-1}}{n!}\Big(\cos^n\theta-\frac{n.\overline{n-1}}{2.\overline{2n-1}}\cos^{n-2}\theta$$

$$+\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{2.4.\overline{2n-1}.\overline{2n-3}}\,.\cos^{n-4}\theta-+\ldots\Big),$$

$${}_r^0x_p-\frac{1^2}{1.3}\,{}_r^2x_p+\frac{1^2.3^2}{1.3\,5.7}\,{}_r^4x_p-\frac{1^2.3^2.5^2}{1.3.5.7.9.11}\,{}_r^6x_p+-\ldots={}_r^0a_p,$$

$${}_r^1x_p-\frac{2^2}{3.5}\,{}_r^3x_p+\frac{2^2.4^2}{3.5.7.9}\,{}_r^5x_p-\frac{2^2.4^2.6^2}{3.5.7.9.11.13}\,.\,{}_r^7x_p+-\ldots={}_r^1a_p,$$

$${}_r^2x_p-\frac{3^2}{5.7}\,{}_r^4x_p+\frac{3^5.5^2}{5.7.9.11}\,{}_r^6x_p-+\ldots={}_r^2a_p,$$

$${}_r^3x_p-\frac{4^2}{7.9}\,{}_r^5x_p+\frac{4^2.6^2}{7.9.11.13}\,{}_r^7x_p-+\ldots={}_r^3a_p$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

so nehmen die linken Seiten, wenn die hier eben definirten a als neue Unbekannte eingeführt werden, die Form an:

$$\left.\begin{matrix}0\\u\\\infty\end{matrix}\right|\sum_0^\infty{}_n\,{}_r^n a_p\int_0^\pi\frac{\cos^n\theta\,P_0^u(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta}{r^{u-1}\dfrac{\partial r}{\partial w}},$$

während aus den berechneten ${}_r^n a_p$ die x leicht folgen in der Form

$$ {}^{2n}_{r}x_p = {}^{2n}_{r}a_p + \frac{(2n+1)^2}{(4n+1)(4n+3)} \, {}^{2n+2}_{r}a_p, $$

$$ {}^{2n+1}_{r}x_p = {}^{2n+1}_{r}a_p + \frac{(2n+2)^2}{(4n+3)(4n+5)} \, {}^{2n+3}_{r}a_p. $$

Zur Vereinfachung der rechten Seiten der Bedingungsgleichungen können noch folgende Betrachtungen dienen:

Ist die elektrische Dichtheit irgend einer der successive in Rechnung zu ziehenden Ladungen des s^{ten} Leiters dargestellt durch

$$ \sum_0^\infty{}_n \sum_{-n}^{+n}{}_\lambda \; {}^n_r x^\lambda_s \, P^n_\lambda (\cos {}_s\theta_s) \, e^{i\lambda \, {}_s\varphi_s}, $$

so ist die Potentialfunction dieser Ladung auf einen Punkt A_s, ${}_s\vartheta_s$, ${}_s\varphi_s$, wo A_s genügend gross gewählt ist,

$$ \sum_0^\infty{}_m \frac{4\pi}{2m+1} \cdot \frac{1}{A_s^{m+1}} \sum_{-m}^{+m}{}_\mu P^m_\mu (\cos {}_s\vartheta_s) \, e^{i\mu \, {}_s\varphi_s} \left\{ \sum_0^\infty{}_n \sum_{-n}^{+n}{}_\lambda \; {}^n_r x^\lambda_s \int_0^\pi \sin {}_s\theta_s \, d\,{}_s\theta_s \right. $$

$$ \left. \times \int_0^{2\pi} \frac{1}{\frac{\partial\, {}_s r_s}{\partial w}} P^n_\lambda (\cos {}_s\theta_s) \, P^m_\mu (\cos {}_s\theta_s) \, e^{i(\lambda-\mu)\, {}_s\varphi_s} \, {}_s r_s^{m+2} \, d\,{}_s\varphi_s \right\}. $$

Legen wir weiter um den Pol des s^{ten} Leiters als Mittelpunkt eine Kugelfläche mit dem Radius b_s, auf der sich Elektricität vertheilt befindet gemäss dem Werthe der Function

$$ \sum_0^\infty{}_m \sum_{-m}^{+m}{}_\mu \; {}^m_r G^\mu_s \, P^m_\mu (\cos {}_s\theta_s) \, e^{i\mu \, {}_s\varphi_s}, $$

so ist die Potentialfunction dieser auf der Kugelfläche befindlichen Elektricität auf denselben Punkt A_s, ${}_s\vartheta_s$, ${}_s\varphi_s$, wenn $A_s > b_s$:

$$ \sum_0^\infty{}_m \frac{4\pi}{2m+1} \frac{b_s^m}{A_s^{m+1}} \cdot \sum_{-m}^{+m}{}_\mu \; {}^m_r G^\mu_s \, P^m_\mu (\cos {}_s\vartheta_s) \, e^{i\mu \, {}_s\varphi_s}. $$

Beide Potentialfunctionen sind also einander gleich, gleichgiltig, wo der Punkt A_s, ${}_s\vartheta_s$, ${}_s\varphi_s$ liegt, wenn die Bedingung erfüllt ist:

$$ {}^m_r G^\mu_s = \sum_0^\infty{}_n \sum_{-n}^{+n}{}_\lambda \int_0^\pi \sin {}_s\theta_s \, d\,{}_s\theta_s $$

$$ \cdot \int_0^{2\pi} \left(\frac{{}_s r_s}{b_s}\right)^m \frac{1}{\frac{\partial\, {}_s r_s}{\partial w}} P^n_\lambda (\cos {}_s\theta_s) \, P^m_\mu (\cos {}_s\theta_s) \, e^{i(\lambda-\mu)\, {}_s\varphi_s} \, {}_s r_s^2 \, d\,{}_s\varphi_s, $$

wenn nur noch A_s so gross gewählt ist, dass der Punkt, auf welchen sich beide obigen Potentialfunctionen bezogen, sowohl ausserhalb der kleinsten Kugelfläche liegt, die noch dem s^{ten} Leiter umschrieben werden kann, als auch ausserhalb der Kugel mit dem Radius b_s.

Der Radius b_s muss nun so gross gewählt werden, dass die rechte Seite der vorigen Bedingungsgleichung immer eine convergente Reihe bildet. Erfüllt aber b_s diese Bedingung, so können wir auch die Potentialfunction der auf der Oberfläche des s^{ten} Leiters befindlichen Elektricität ersetzen durch die Elektricität auf einer Kugelfläche vom Radius b_s, deren Dichtheit an irgend einer Stelle der Kugelfläche bestimmt ist durch die vorige Bedingungsgleichung. Wir denken uns dies vollbracht unter der Bedingung, dass die mit dem Radius gleich 1 um den Pol des p^{ten} Leiters beschriebene Kugelfläche die kleinste der um die Oberfläche des s^{ten} Leiters möglichen Kugelflächen nirgends schneidet, höchstens berührt.

Die auf den rechten Seiten der obigen Bedingungsgleichungen IV), V u. s. w. befindlichen unendlichen Reihen stellen nun, soweit sie herkommen von elektrischen Ladungen der Leiteroberflächen, nichts weiter dar, als die Coefficienten, die sich ergeben, wenn man die Potentialfunction jener elektrischen Ladungen auf irgend einen Punkt einer mit dem Radius gleich 1 um den Pol des p^{ten} Leiters beschriebenen Kugel nach Kugelfunctionen entwickelt. Für diese elektrischen Ladungen der Leiteroberflächen selbst können wir aber nun nach dem vorhin Besprochenen die auf Kugelflächen befindlichen Ladungen setzen, vorausgesetzt, dass der Pol des p^{ten} Leiters weit genug entfernt sei, um den dabei gestellten Bedingungen entsprechen zu können. Wir nehmen an, dass dies der Fall sei.

Ein elektrischer Massenpunkt besitze nun die Masse m und er sei um c von dem Mittelpunkt einer Kugel mit dem Radius a_p entfernt, so dass $c > a_p$, so ist die Potentialfunction dieses Massenpunktes auf einen Punkt der Kugelfläche

$$\frac{m}{\sqrt{c^2 + a^2_p - 2\, a_p\, c\, \cos {}_p\theta_p}},$$

wenn ${}_p\theta_p$ die Breite des Punktes bezeichnet, auf den sich die Potentialfunction bezieht, genommen für ein räumliches Polarcoordinatensystem, dessen Pol der Kugelmittelpunkt und dessen Polaraxe nach dem Massenpunkt m hin gerichtet ist. Diese Potentialfunction kann aber auch auf die Form gebracht werden:

$$\frac{\frac{a_p}{c}\, m}{\sqrt{\left(\frac{a^2_p}{c}\right)^2 + a^2_p - 2\frac{a^2_p}{c}\, a_p \cos {}_p\theta_p}}.$$

Aus den angegebenen beiden Formen der Potentialfunction erkennt man: Die Potentialfunction eines Punktes ausserhalb einer Kugelfläche

vom Radius a_p in der Entfernung c vom Mittelpunkte auf irgend einen Punkt der Kugelfläche ist ebenso gross, wie die Potentialfunction eines Punktes innerhalb der Kugelfläche, dessen Masse aber das $\frac{a_p}{c}$-fache der Masse des ersteren Punktes ist und der auf dem nach diesem Punkte gerichteten Leitstrahl in der Entfernung $\frac{a^2_p}{c}$ vom Kugelmittelpunkte entfernt ist.

Sind nun unendlich viele solcher Massenpunkte m gegeben, die aber alle eine Kugelfläche vom Radius R erfüllen, deren Mittelpunkt um e vom Mittelpunkt der Kugel mit dem Radius a_p, wo $e \geqq a_p + R$, entfernt ist, so ist die Gleichung der Kugelfläche mit dem Radius R bezogen auf ein Polarcoordinatensystem, dessen Pol im Mittelpunkte der Kugel mit dem Radius a_p liegt und dessen Polaraxe nach dem Mittelpunkte der Kugel vom Radius R gerichtet ist

$$r^2 - 2\, r\, e \cos\vartheta = R^2 - e^2.$$

Setzt man in dieser Gleichung $\frac{a^2_p}{r} = \varrho$, also $r = \frac{a^2_p}{\varrho}$, so erhält man die Gleichung der Fläche, auf der alle diejenigen Punkte liegen, die nach dem vorigen Satze den Punkten der Kugel vom Radius R entsprechen. Es kommt

$$\frac{a^4_p}{\varrho^2} - 2\,\frac{a^2_p}{\varrho}\, e \cos\vartheta = R^2 - e^2$$

oder

$$\varrho^2 - 2\,\varrho\,\frac{a^2_p\, e}{e^2 - R^2} \cos\vartheta = \frac{a^4_p}{R^2 - e^2}.$$

Die Fläche ist also wiederum eine Kugelfläche, deren Radius $\frac{a^2_p\, R}{e^2 - R^2}$ ist und die, ganz innerhalb der Kugel vom Radius a_p gelegen, mit dieser einen Mittelpunktsabstand $\frac{a^2_p\, e}{e^2 - R^2}$ nach der Seite des Mittelpunktes der Kugel vom Radius R hat.

Für unsern speciellen Fall, wo wir vorhin die auf dem s^{ten} Leiter befindliche Elektricität ersetzt hatten durch die auf der Kugel mit dem Radius b_s befindliche, ist

$$a_p = 1, \quad R = b_s;$$

e der Abstand des Poles vom p^{ten} Leiter von dem im s^{ten} Leiter.

Dieses letztere Resultat lehrt also noch, wie wir die elektrische Kugel vom Radius b_s ersetzen können durch eine andere, die ganz im p^{ten} Leiter gelegen ist.

Der Nutzen dieses letzteren Resultats besteht wesentlich darin, dass er vielfache Umrechnung der auf verschiedene Coordinatensysteme bezogenen Längen φ und Breiten θ in einander wesentlich erleichtert, also die Berechnung der rechten Seiten der Gleichungensysteme IV), V) u. s. w. bequemer macht.

Endlich möge auch noch kurz angedeutet werden, dass, wie oben bei der Discussion der Brauchbarkeit der Gleichung 5) angegeben wurde, die ${}^{n}_{r}x^{\lambda}_{p}$ nahezu nach Art einer geometrischen Reihe abnehmen; hat man also die ersten x für ein kleineres r berechnet, so kann man ohne grossen Fehler die Summe der folgenden x berechnen aus der geometrischen Reihe, deren Glieder nahezu die Grösse der fernerhin erscheinenden x haben.

Die in der besprochenen Rechnung als bekannt vorausgesetzten α sind zwar nicht unmittelbar gegeben, sie ergeben sich aber aus der Bedingung, dass die Menge der auf einem jeden Leiter vorhandenen Elektricität eine gegebene ist.

VI.

Integration der Differenzengleichung

$$(n+\varkappa+1)(n+\lambda+1)\Delta^2\varphi(n)+(a+bn)\Delta\varphi(n)+c\varphi(n)=0.$$

Von

Dr. J. Thomae,
Docent in Halle.

Bei der Integration von Differenzengleichungen pflegt man sich damit zu begnügen, schlechthin Integrale derselben aufzufinden. So stellt Herr G. Boole * drei Integrale der in der Ueberschrift enthaltenen Differenzengleichung auf, ohne weder zu zeigen, dass wirklich zwei von ihnen von einander unabhängig sind, noch anzugeben, welche Beziehung zwischen den dreien stattfindet, da doch nothwendig eine besteht, weil eine Differenzengleichung zweiter Ordnung nur zwei unabhängige Integrale haben kann, und ohne endlich zu untersuchen, für welche Werthe der complexen Variabeln n die Integrale brauchbar sind und wie sie in dem Gebiete, wo sie nicht anwendbar sind, fortgesetzt werden. Ohne eine solche Kenntniss der Integrale ist aber die Differenzengleichung als noch nicht völlig integrirt anzusehen. Eine solche vollständige Integration der obigen Differenzengleichung soll nun mit Hilfe einer Formel meiner Abhandlung über die höheren hypergeometrischen Reihen in den von den Herren Clebsch und Neumann herausgegebenen Mathematischen Annalen, Bd. II S. 427 flgg., hier ausgeführt werden. Es sollen dabei nicht alle möglichen Lösungen mittels hypergeometrischer Reihen dritter Ordnung aufgestellt werden, was ihrer sehr grossen Anzahl wegen der Uebersichtlichkeit nachtheilig sein würde, sondern wir begnügen uns hier, im Art. 1 zwölf Integrale aufzustellen, welche für (im Wesentlichen) negative n brauchbar sind, im Art. 2 zwölf Integrale aufzustellen, welche für (im Wesentlichen) positive n brauchbar sind, im Art. 3 aber zwölf Integrale aufzustellen, welche für alle n brauchbar sind und welche mit den Integralen der beiden ersten Artikel im engsten Zusammenhange stehen. Will man alle möglichen Integrale

---

* G. Boole, Grundlehren der Differenzen- und Summenrechnung, deutsch bearbeitet von Schnuse, S. 190.

aufstellen und übersichtlich ordnen, so scheint dazu eine ähnliche Behandlung der Differenzengleichung geeignet, wie sie Riemann auf die nahe verwandte Differentialgleichung für die hypergeometrische Reihe angewendet hat. Um den Zusammenhang der Integrale des Art. 1 oder der Integrale des Art. 2 unter sich zu finden, scheint die Kenntniss der Grenzwerthe für über alle Grenzen wachsende Werthe des letzten Elementes einer hypergeometrischen Reihe dritter Ordnung mit einem unendlich grossen Exponenten erforderlich, welche im Art. 4 mit Hilfe der Darstellung dieser Reihe durch Doppelintegrale gewonnen wird. Mit Hilfe dieser Grenzwerthe wird nun der Zusammenhang der Integrale des Art. 1 unter sich und der Integrale des Art. 2 unter sich im Art. 5 gefunden. Im Art. 6 endlich wird der Zusammenhang zwischen einem der Integrale des Art. 1 und einem der Integrale des Art. 2 angegeben, und es werden die verschiedenen Formen aufgestellt, welche sich aus diesen Untersuchungen für eine und dieselbe hypergeometrische Reihe dritter Ordnung, deren letztes Element Eins ist, ergeben. In Anmerkungen wird darauf aufmerksam gemacht, wie man durch einen Grenzübergang aus den erhaltenen Resultaten zu bekannten Sätzen aus der Theorie der Gauss'schen Reihe gelangt, wodurch die grosse Menge der Integrale leichter übersehen wird.

Wir wollen zum Voraus noch bemerken, dass wir hier unter periodischen Functionen von n solche verstehen, welche ungeändert bleiben, wenn man n um eine beliebige ganze Zahl vermehrt oder vermindert, also periodische Functionen mit dem Periodicitätsmodul Eins. Ferner wollen wir unter dem „Princip der Continuität complexer Functionen" den Satz verstehen, nach welchem eine Gleichung zwischen zwei stetig fortsetzbaren Functionen einer oder mehrerer complexer Variabeln; die nur in einem beschränkten, aber für jede Variabele ein endliches Stück mindestens einer Dimension umfassenden Gebiete bewiesen ist, auch darüber hinaus giltig bleibt; ein Princip, von dem öfter Anwendung gemacht wird. In Bezug auf die Bezeichnung bemerke ich, dass für die hypergeometrischen Reihen dritter Ordnung die in meiner oben citirten Abhandlung in den Mathemat. Annalen, II, S. 427 flgg., eingeführte beibehalten ist.

Artikel 1.

In meiner Abhandlung über die Reihe

$$F_\varepsilon\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', & \\ \beta, & \beta', & \beta'', & x\end{pmatrix}$$

$$=\sum_{0\,(m)}^{\infty}\frac{(-1)^{m}\cdot x^{m+\varepsilon}\cdot\Pi(\varepsilon-\alpha)\,\Pi(\varepsilon-\alpha')\,\Pi(\varepsilon-\alpha'')\,\Pi(-\varepsilon-\beta)\,\Pi(-\varepsilon-\beta')\,\Pi(-\varepsilon-\beta'')}{\Pi(m+\varepsilon-\alpha)\,\Pi(m+\varepsilon-\alpha')\,\Pi(m+\varepsilon-\alpha'')\,\Pi(-m-\varepsilon-\beta)\,\Pi(-m-\varepsilon-\beta')\,\Pi(-m-\varepsilon-\beta'')}$$

$$=x^{\varepsilon}\Big\{1+\frac{\varepsilon+\beta}{\varepsilon-\alpha+1}\cdot\frac{\varepsilon+\beta'}{\varepsilon-\alpha'+1}\cdot\frac{\varepsilon+\beta''}{\varepsilon-\alpha''+1}\,x$$

$$+\frac{\varepsilon+\beta}{\varepsilon-\alpha+1}\cdot\frac{\varepsilon+\beta+1}{\varepsilon-\alpha+2}\cdot\frac{\varepsilon+\beta'}{\varepsilon-\alpha'+1}\cdot\frac{\varepsilon+\beta'+1}{\varepsilon-\alpha'+2}\cdot\frac{\varepsilon+\beta''}{\varepsilon-\alpha''+1}\cdot\frac{\varepsilon+\beta''+1}{\varepsilon-\alpha''+2}\,x^{2}+\ldots\Big\}$$

habe ich [Math. Ann. II, S. 442 (15)] die Formel entwickelt:

$$1)\qquad (x-1)\,.\,F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', & x\\ \beta+3, & \beta', & \beta'', & \end{pmatrix}(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)$$

$$+F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', & x\\ \beta+2, & \beta', & \beta'', & \end{pmatrix}.\left\{\begin{matrix}(\beta'+\beta''-2\beta-3)\,x+3\\ +\alpha+\alpha'+\alpha''+3\beta\end{matrix}\right\}.(\alpha+\beta+1)$$

$$-F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', & x\\ \beta+1, & \beta', & \beta'', & \end{pmatrix}.\left\{\begin{matrix}(\alpha+\beta)(\alpha'+\beta)+(\alpha'+\beta)(\alpha''+\beta)+(\alpha''+\beta)(\alpha+\beta)\\ +\alpha+\alpha'+\alpha''+3\beta+1-(\beta-\beta'+1)(\beta-\beta''+1)\,x\end{matrix}\right\}$$

$$+F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', & x\\ \beta, & \beta', & \beta'', & \end{pmatrix}.(\beta+\alpha')(\beta+\alpha'')=0.$$

In dieser Formel kann man, so lange $2-\alpha-\alpha'-\alpha''-\beta-\beta'-\beta''$ einen positiven reellen Theil hat, welcher grösser ist als 2, Eins für x setzen, weil in diesem Falle das erste Glied der Gleichung 1) verschwindet und die drei übrigen darin vorkommenden Reihen convergiren. Unter dieser Voraussetzung ist offenbar der Ausdruck

$$F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', & 1\\ n, & \beta', & \beta'', & \end{pmatrix}$$

$$=1+\frac{\alpha+n}{1}\cdot\frac{\alpha+\beta'}{\alpha-\alpha'+1}\cdot\frac{\alpha+\beta''}{\alpha-\alpha''+1}$$
$$+\frac{\alpha+n}{1}\cdot\frac{\alpha+n+1}{2}\cdot\frac{\alpha+\beta'}{\alpha-\alpha'+1}\cdot\frac{\alpha+\beta'+1}{\alpha-\alpha'+2}\cdot\frac{\alpha+\beta''}{\alpha-\alpha''+1}\cdot\frac{\alpha+\beta''+1}{\alpha-\alpha''+2}+\cdots$$

ein Integral (Lösung) der Recursionsformel

$$2)\qquad (n+\alpha')\,.\,(n+\alpha'')\,.\,\varphi(n)$$
$$-\left\{\begin{matrix}2n^2+n\,[2(\alpha+\alpha'+\alpha'')+\beta'+\beta''+1]+1\\ +\alpha(\alpha'+1)+\alpha'(\alpha''+1)+\alpha''(\alpha+1)-(\beta'-1)(\beta''-1)\end{matrix}\right\}\varphi(n+1)$$
$$+(n+\alpha+1)(n+\alpha+\alpha'+\alpha''+\beta'+\beta'')\,.\,\varphi(n+2)=0.$$

Diese Recursionsformel kann mit Hilfe der Gleichungen

$$\varphi(n+1)=\Delta\varphi(n)+\varphi(n),\qquad \varphi(n+2)=\Delta^2\varphi(n)+2\Delta\varphi(n)+\varphi(n)$$

auf die Form einer Differenzengleichung gebracht werden, nämlich der:

$$3)\qquad (n+\alpha+1)(n+\alpha+\alpha'+\alpha''+\beta'+\beta'')\,.\,\Delta^2\varphi(n)$$
$$+\left\{\begin{matrix}(n+\alpha+1)(2\alpha+\beta'+\beta''+1)\\ +(\beta'+\alpha)(\beta''+\alpha)-(\alpha-\alpha'+1)(\alpha-\alpha''+1)\end{matrix}\right\}.\,\Delta\varphi(n)$$
$$+(\beta'+\alpha)(\beta''+\alpha)\,.\,\varphi(n)=0.$$

Somit kann mittels einer hypergeometrischen Reihe dritter Ordnung, deren letztes Element Eins ist, jede Differenzengleichung von der Form

$$4)\qquad (n+\varkappa+1)(n+\lambda+1)\,\Delta^2\varphi(n)+(a+bn)\,\Delta\varphi(n)+c\varphi(n)=0,$$

welche an die Differentialgleichung der Gauss'schen Reihe[1]) erinnert, integrirt werden. Hierzu ist nur nöthig, dass wir setzen

---

1) Setzt man in 3) xh für n, $y(x)$ für $\varphi(xh)$, $y\left(x+\frac{1}{h}\right)-y(x)=\Delta y(x)$, so erhält man

$$5)\qquad c=(\alpha+\beta')(\alpha+\beta''),\quad b=2\alpha+\beta'+\beta''+1,$$
$$a=(\alpha+1)(2\alpha+\beta'+\beta''+1)+(\beta'+\alpha)(\beta''+\alpha)-(\alpha-\alpha'+1)(\alpha-\alpha''+1),$$
$$\varkappa=\alpha,\quad \lambda=\alpha+\alpha'+\alpha''+\beta'+\beta''-1,$$

also

$$5a)\qquad \alpha=\varkappa,$$
$$\beta'=-\varkappa+\frac{b-1+\sqrt{(b-1)^2-4c}}{2},\quad \beta''=-\varkappa+\frac{b-1-\sqrt{(b-1)^2-4c}}{2},$$
$$\alpha'=1+\frac{\varkappa+\lambda-b+\sqrt{(b+\varkappa-\lambda)^2-4(c+\varkappa b-a+b)}}{2},$$
$$\alpha''=1+\frac{\varkappa+\lambda-b-\sqrt{(b+\varkappa-\lambda)^2-4(c+\varkappa b-a+b)}}{2},$$

weil dadurch die Differenzengleichung 3) mit der 4) in Uebereinstimmung gebracht wird. Und diese Integration hat so lange Bestand, als der reelle Theil von $n+\lambda-1$ negativ ist, wenn, wie auch ferner geschehen soll, λ zur Abkürzung für $\alpha+\alpha'+\alpha''+\beta'+\beta''-1$ beibehalten wird. Wenn späterhin die Bezeichnung des Integrals als einer hypergeometrischen Reihe dritter Ordnung auch für solche n zuweilen angewendet wird, für welche diese Reihe keinen Sinn hat, weil sie nicht convergirt, so soll darunter die stetige Fortsetzung in Bezug auf die complexe Variabele n verstanden werden.

Setzt man in die Gleichung 1) für $F_\alpha(x)$ die Fortsetzung dieser Reihe, wie sie Math. Ann. II, S 431 gegeben ist, also

$$a_\beta\,.\,F_\beta\left(\frac{1}{x}\right)+a_{\beta'}\,.\,F_{\beta'}\left(\frac{1}{x}\right)+a_{\beta''}\,.\,F_{\beta''}\left(\frac{1}{x}\right),$$

ein, worin $F_\beta\left(\frac{1}{x}\right)$ kurz für

$$F_\beta\begin{pmatrix}\beta, & \beta', & \beta'', & \frac{1}{x}\\ \alpha, & \alpha', & \alpha'', & x\end{pmatrix}$$

$$\left(x+\frac{\alpha+1}{h}\right)\left(x+\frac{\alpha+\alpha'+\alpha''+\beta'+\beta''}{h}\right).\frac{\Delta^2 y(x)}{\frac{1}{h^2}}$$
$$+\left\{\left(x+\frac{\alpha+1}{h}\right)(2\alpha+\beta+\beta'+1)+\frac{(\beta'+\alpha)(\beta''+\alpha)-(\alpha-\alpha'+1)(\alpha-\alpha''+1)}{h}\right\}.\frac{\Delta y(x)}{\frac{1}{h}}+(\alpha+\beta')(\alpha+\beta'').y(x)=0.$$

Setzt man nun weiter $\alpha=\mathfrak{a}$, $\beta'=\mathfrak{b}'$, $\beta''=\mathfrak{b}$, $\alpha-\alpha'+1+\alpha-\alpha''+1=h$, $(\alpha-\alpha'+1)(\alpha-\alpha''+1)=(\mathfrak{a}-\mathfrak{a}'+1)h$, also $\lim\limits_{h=\infty}\alpha'=\mathfrak{a}'$, $\lim\limits_{h=\infty}\frac{\alpha''}{h}=-1$ und geht mit h zur Grenze ∞ über, so findet man die Differentialgleichung

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[1+\mathfrak{a}-\mathfrak{a}'-x(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{a}+\mathfrak{b}'+1)]\frac{dy}{dx}-(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}')y=0,$$

welche durch die Riemann'sche Function

$$x^{-\mathfrak{a}}\,.\,P\begin{pmatrix}\mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & 0, & \\ \mathfrak{a}', & \mathfrak{b}', & 1-\mathfrak{a}-\mathfrak{a}'-\mathfrak{b}-\mathfrak{b}', & x\end{pmatrix}$$

integrirt wird.

gesetzt ist, so wird sie dadurch ebenfalls befriedigt, und aus der Methode der unbestimmten Coefficienten ergiebt sich dann, dass

$$\alpha_\beta \,.\, F_\beta\left(\frac{1}{x}\right), \quad \alpha_{\beta'} \,.\, F_{\alpha'}\left(\frac{1}{x}\right), \quad \alpha_{\beta''} \,.\, F_{\beta''}\left(\frac{1}{x}\right)$$

für sich die Gleichung 1) befriedigen, und hieraus folgt wieder mit Anwendung derselben Schlussweise, dass auch

$$\beta_\alpha \,.\, \alpha_\beta \,.\, F_\alpha(x), \quad \beta_{\alpha'} \,.\, \alpha_\beta \,.\, F_{\alpha'}(x), \quad \beta_{\alpha''} \,.\, \alpha_\beta \,.\, F_{\alpha''}(x),$$

worin $F_\alpha(x)$ kurz für

$$F_\alpha\begin{pmatrix} \alpha, \; \alpha', \; \alpha'', \\ \beta, \; \beta', \; \beta'', \end{pmatrix} x$$

gesetzt ist, der Gleichung 1) genügen. Da $\beta_\alpha \,.\, \alpha_\beta$ ungeändert bleibt, wenn β um eine ganze Zahl abgeändert wird, so kann der Factor $\beta_\alpha \,.\, \alpha_\beta$ des ersten Ausdrucks unter den drei zuletzt aufgestellten Lösungen der Gleichung 1) fortgelassen werden, oder mit anderen Worten, $F_\alpha(x)$ und $\beta_\alpha . \alpha_\beta . F_\alpha(x)$ sind keine wesentlich verschiedenen Lösungen. Setzt man nun in den sechs die Gleichung 1) befriedigenden Ausdrücken $\beta = n$, $x = 1$, so liefern sie 6 Integrale (Lösungen) der Recursionsformel 2) oder der Differenzengleichung 3), oder wenn man für α, α', α'', β', β'' die Grössen a, b, c, $\varkappa$, λ mittels der Gleichung 5a) einführt, Lösungen der Gleichung 4), welche so lange einen Sinn haben, als der reelle Theil von $n + \lambda - 1$ negativ ist. Diese sechs Lösungen sind nach Abstreifung constanter oder periodischer Factoren[2]):

---

2) Macht man für die Exponenten α, α', α'', β', β'', n die Substitution und den Grenzübergang der Anmerkung 1), so liefern die ersten Ausdrücke unter 6) bez. die Functionen

$$F(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}, \; \mathfrak{a}+\mathfrak{b}', \; \mathfrak{a}-\mathfrak{a}'+1, \; x), \quad x^{\mathfrak{a}'-\mathfrak{a}} \,.\, F(\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}, \; \mathfrak{a}'+\mathfrak{b}', \; \mathfrak{a}'-\mathfrak{a}+1, \; x);$$

der dritte unter 6) und der erste unter 7) lassen einen solchen Grenzübergang nicht zu, die beiden letzten unter 7) aber liefern bez. die Functionen

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}'} . \, F\left(\mathfrak{b}'+\mathfrak{a}, \; \mathfrak{b}'+\mathfrak{a}', \; \mathfrak{b}'-\mathfrak{b}+1, \; \frac{1}{x}\right), \quad \left(\frac{1}{x}\right)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}} . \, F\left(\mathfrak{b}+\mathfrak{a}, \; \mathfrak{b}+\mathfrak{a}', \; \mathfrak{b}-\mathfrak{b}'+1, \; \frac{1}{x}\right).$$

Hierbei ist zu beachten, dass

$$\lim_{h=\infty} \frac{h^q}{h^p} \cdot \frac{\Pi(xh+p)}{\Pi(xh+q)} = \lim_{h=\infty} h^{q-p} \,.\, \int_0^1 \frac{s^{q-p-1} \,.\, (1-s)^{xh+p}}{\Pi(q-p-1)} \, ds$$

$$= \int_0^\infty \frac{s^{q-p-1} \,.\, e^{-xs}}{\Pi(q-p-1)} \,.\, ds = x^{p-q}$$

ist. Diese Schlussweise ist offenbar nur gestattet, wenn q einen grösseren reellen Theil hat als p; es ist jedoch im andern Falle

$$\lim \frac{h^q}{h^p} \cdot \frac{\Pi(xh+p)}{\Pi(xh+q)} = \lim \left\{ 1 : \frac{h^p}{h^q} \cdot \frac{\Pi(xh+q)}{\Pi(xh+p)} \right\} = \frac{1}{x^{q-p}} = x^{q-p}.$$

Das Resultat bleibt ähnlich auch bestehen, wenn x negativ ist, wenn dann h negativ zur Grenze ∞ übergeht, was für den Uebergang von der Differenzen- zur Differentialgleichung nicht von Belang ist.

$$6)\quad \begin{cases} F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', & 1\\ n, & \beta', & \beta'', \end{pmatrix}, \quad \dfrac{\Pi(-\alpha-n)}{\Pi(-\alpha'-n)}\cdot F_{\alpha'}\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', & 1\\ n, & \beta', & \beta'', \end{pmatrix}, \\ \dfrac{\Pi(-\alpha-n)}{\Pi(-\alpha''-n)}\cdot F_{\alpha''}\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', & 1\\ n, & \beta', & \beta'', \end{pmatrix}^*; \end{cases}$$

$$7)\quad \begin{cases} \dfrac{(-1)^n\,.\,\Pi(\beta'-n-1)\,.\,\Pi(\beta''-n-1)}{\Pi(-n-\alpha')\,.\,\Pi(-n-\alpha'')}.F_n\begin{pmatrix}n, & \beta', & \beta'', & 1\\ \alpha, & \alpha', & \alpha'', \end{pmatrix}, \\ \dfrac{\Pi(-n-\alpha)}{\Pi(\beta'-n)}.F_{\beta'}\begin{pmatrix}n, & \beta', & \beta'', & 1\\ \alpha, & \alpha', & \alpha'', \end{pmatrix}, \quad \dfrac{\Pi(-n-\alpha)}{\Pi(\beta''-n)}.F_{\beta''}\begin{pmatrix}n, & \beta', & \beta'', & 1\\ \alpha, & \alpha', & \alpha'', \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Sechs andere Lösungen der Differenzengleichung 3) erhalten wir, wenn wir die Recursionsformel 2) durch Einführung einer neuen Abhängigen

$$\psi(n)=\frac{\Pi(n+\lambda-1)}{\Pi(n+\alpha''-1)}.\varphi(n)$$

transformiren, wodurch sie die Form annimmt:

$$8)\quad (n+\alpha')(n+\lambda).\psi(n)-\begin{Bmatrix}2n^2+n(\lambda+\alpha+\alpha'+\alpha''+2)+1\\ \alpha(\alpha'+1)+\alpha'(\alpha''+1)+\alpha''(\alpha+1)-(\beta'-1)(\beta''-1)\end{Bmatrix}$$
$$\times\psi(n+1)+(n+\alpha+1)(n+\alpha''+1).\psi(n+2)=0,$$

oder wenn man

$$9)\quad \begin{matrix}\alpha=a, & \alpha'=a', & \alpha''=a+a'+a''+b'+b''-1=l,\\ \beta'=1-b'-a'-a, & \beta''=1-b''-a'-a, & \lambda=a'',\end{matrix}$$

also

$$9\text{a})\quad a=\alpha,\ a'=\alpha',\ a''=\lambda-1,\ b'=1-\beta'-\alpha'-\alpha,\ b''=1-\beta''-\alpha'-\alpha,\ l=\alpha'',$$

setzt, die Form der Recursionsformel:

$$8\text{a})\quad (n+a')(n+a'').\psi(n)-\begin{Bmatrix}2n^2+n(l+a+a'+a''+2)+1\\ +a(a'+1)+a'(a''+1)+a''(a+1)-(b'-1)(b''-1)\end{Bmatrix}$$
$$\times\psi(n+1)+(n+a+1)(n+l+1).\psi(n+2)=0.$$

Aus der Form der Gleichung 8a) geht sofort hervor, weil sie ganz dieselbe als die von 2) ist, dass man für $\psi(n)$ die unter 6) und 7) stehenden Ausdrücke als Lösungen in 8a) einsetzen kann, wenn man in jenen Ausdrücken $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta', \beta'', \lambda$ beziehentlich durch a, a', a'', b', b'', l ersetzt. Drückt man in den so erhaltenen Integralen der Gleichung 8a) die Grössen a, a', a'', b', b'', l durch die $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta', \beta'', \lambda$ mittels 9a) aus und multiplicirt mit $\dfrac{\Pi(n+\alpha''-1)}{\Pi(n+\lambda-1)}$, so erhält man für die Differenzengleichung 3) die

---

* Man kann aus den Integralen 7) neue mit demselben Convergenzgebiete herleiten mit Hilfe des leicht zu beweisenden Satzes: „Vertauscht man in einer Lösung der Gleichung 3) α mit α' oder α'' und multiplicirt mit

$$\frac{\Pi(-\alpha-n)}{\Pi(-\alpha'-n)},\ \text{bez. mit}\ \frac{\Pi(-\alpha-n)}{\Pi(-\alpha''-n)},$$

so erhält man wieder Lösungen der Gleichung 3).

folgenden sechs Lösungen, welche einen Sinn haben, so lange der reelle Theil von $n+\alpha''-1$ negativ ist[3]):

$$10)\left\{\begin{aligned}&\frac{\Pi(n+\alpha''-1)}{\Pi(n+\lambda-1)}\cdot F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \lambda, & \\ n, & 1-\beta'-\alpha'-\alpha, & 1-\beta''-\alpha'-\alpha, & 1\end{pmatrix},\\ &\frac{\Pi(-n-\alpha)\,\Pi(n+\alpha''-1)}{\Pi(-n-\alpha')\,\Pi(n+\lambda-1)}\cdot F_{\alpha'}\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \lambda, & \\ n, & 1-\beta'-\alpha'-\alpha, & 1-\beta''-\alpha'-\alpha, & 1\end{pmatrix},\\ &\frac{\Pi(-n-\alpha)}{\Pi(-n-\alpha'')}\cdot F_\lambda\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \lambda, & \\ n, & 1-\beta'-\alpha'-\alpha, & 1-\beta''-\alpha'-\alpha, & 1\end{pmatrix};\end{aligned}\right.$$

$$11)\left\{\begin{aligned}&(-1)^n\cdot\frac{\Pi(-\beta'-\alpha'-\alpha-n)\,\Pi(-\beta''-\alpha'-\alpha-n)}{\Pi(-\alpha'-n)\,\Pi(-\alpha''-n)}\\ &\qquad\times F_n\begin{pmatrix}n, & 1-\beta'-\alpha'-\alpha, & 1-\beta''-\alpha'-\alpha, & \\ \alpha, & \alpha', & \lambda, & 1\end{pmatrix},\\ &\frac{\Pi(-\alpha-n)\,\Pi(-n-\lambda)}{\Pi(-\beta'-\alpha'-\alpha-n+1)\,\Pi(-n-\alpha'')}\\ &\qquad\times F_{1-\beta'-\alpha'-\alpha}\begin{pmatrix}n, & 1-\beta'-\alpha'-\alpha, & 1-\beta''-\alpha'-\alpha, & \\ \alpha, & \alpha', & \lambda, & 1\end{pmatrix},\\ &\frac{\Pi(-\alpha-n)\,\Pi(-n-\lambda)}{\Pi(-\beta''-\alpha'-\alpha-n+1)\,\Pi(-n-\alpha'')}\\ &\qquad\times F_{1-\beta''-\alpha'-\alpha}\begin{pmatrix}n, & 1-\beta'-\alpha'-\alpha, & 1-\beta''-\alpha'-\alpha, & \\ \alpha, & \alpha', & \lambda, & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}\right.$$

Artikel 2.

Nun sollen zwölf Integrale von 3) aufgestellt werden, welche da einen Sinn haben, wo die Integrale 6) und 7) oder 10) und 11) in der Reihenform keinen haben. Zu solchen Lösungen gelangen wir, wenn wir die Recursionsformel 2) dadurch transformiren, dass wir $-n$ für n setzen, dann $\chi(n)$ für $\varphi(-n+2)$, also $\chi(n+1)$ für $\varphi(-n+1)$, $\chi(n+2)$ für $\varphi(-n)$ schreiben, wodurch sie in die Gleichung übergeht:

---

3) Macht man in den beiden ersten Integralen unter 10) die Substitution und den Grenzübergang der Anmerkung zu S. 148, so liefern sie als Lösungen der dort aufgestellten Differentialgleichung die Ausdrücke:

$$(1-x)^{1-\mathfrak{a}-\mathfrak{a}'-\mathfrak{b}-\mathfrak{b}'}\cdot F(1-\mathfrak{b}-\mathfrak{a}',\ 1-\mathfrak{b}'-\mathfrak{a}',\ \mathfrak{a}-\mathfrak{a}'+1,\ x),$$
$$x^{\mathfrak{a}'-\mathfrak{a}}\cdot(1-x)^{1-\mathfrak{a}-\mathfrak{a}'-\mathfrak{b}-\mathfrak{b}'}\cdot F(1-\mathfrak{b}-\mathfrak{a},\ 1-\mathfrak{b}'-\mathfrak{a},\ \mathfrak{a}'-\mathfrak{a}+1,\ x).$$

Das dritte unter 10) und das erste unter 11) lassen diesen Grenzübergang nicht zu; hingegen die beiden letzten unter 11) stehenden Integrale liefern als Integrale der Differentialgleichung die Ausdrücke:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{1-\mathfrak{a}'-\mathfrak{b}'}\cdot(1-x)^{1-\mathfrak{a}-\mathfrak{a}'-\mathfrak{b}-\mathfrak{b}'}\cdot F\left(1-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}',\ 1-\mathfrak{a}'-\mathfrak{b}',\ \mathfrak{b}-\mathfrak{b}'+1,\ \frac{1}{x}\right),$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)^{1-\mathfrak{a}'-\mathfrak{b}}\cdot(1-x)^{1-\mathfrak{a}-\mathfrak{a}'-\mathfrak{b}-\mathfrak{b}'}\cdot F\left(1-\mathfrak{a}-\mathfrak{b},\ 1-\mathfrak{a}'-\mathfrak{b},\ \mathfrak{b}'-\mathfrak{b}+1,\ \frac{1}{x}\right).$$

$$12)\quad (n-\alpha')(n-\alpha'').\chi(n+2) - \left\{ \begin{matrix} 2n^2 - n(\lambda+\alpha+\alpha'+\alpha''+2)+1 \\ \alpha(\alpha'+1)+\alpha'(\alpha''+1)+\alpha''(\alpha+1)-(\beta'-1)(\beta''-1) \end{matrix} \right\} .\chi(n+1) + (n-\alpha-1)(n-\lambda-1).\chi(n) = 0.$$

Setzt man darin

$$13)\quad \alpha = -a'-1, \quad \lambda = -a''-1, \quad \alpha' = -a-1,$$
$$\alpha'' = -a-a'-a''-b'-b'' = -l-1, \quad \beta' = a+a'+b'+1, \quad \beta'' = a+a'+b''+1,$$

also

$$13\,a)\quad a = -\alpha'-1, \quad a' = -\alpha-1, \quad a'' = -\lambda-1,$$
$$b' = \alpha+\alpha'+\beta'+1, \quad b'' = \alpha+\alpha'+\beta''+1, \quad l = -\alpha''-1,$$

so gewinnt sie die Form

$$12\,a)\quad (n+a')(n+a'').\chi(n) - \left\{ \begin{matrix} 2n^2 + n(l+a'+a''+a+2)+1 \\ a(a'+1)+a'(a''+1)+a''(a+1)-(b'-1)(b''-1) \end{matrix} \right\} \chi(n+1) + (n+a+1)(n+l+1).\chi(n+2) = 0,$$

welche Form mit der Form 2) übereinstimmt. Daraus folgt, dass man als Lösungen der Gleichung 12a) für $\chi(n)$ die Integrale 6), 7), 10), 11) einsetzen kann, wenn man $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta', \beta'', \lambda$ beziehentlich durch a, a', a'', b', b'', l ersetzt. Drückt man dann mittels der Gleichungen 13a) a, a', a'', b', b'', l durch $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta', \beta'', \lambda$ aus, so erhält man zwölf Lösungen der Gleichung 12), und setzt man dann noch $2-n$ für n, so erhält man folgende zwölf neue Lösungen der Differenzengleichung 3):

$$14)\quad \left\{ \begin{aligned} & F_{-\alpha'-1}\begin{pmatrix} -\alpha'-1, & -\alpha-1, & -\lambda-1, & \\ 2-n, & 1+\alpha+\alpha'+\beta', & 1+\alpha+\alpha'+\beta'', & 1 \end{pmatrix}, \\ & \frac{\Pi(n+\alpha'-1)}{\Pi(n+\alpha-1)} F_{-\alpha-1}\begin{pmatrix} -\alpha'-1, & -\alpha-1, & -\lambda-1, & \\ 2-n, & 1+\alpha+\alpha'+\beta', & 1+\alpha+\alpha'+\beta'', & 1 \end{pmatrix}, \\ & \frac{\Pi(n+\alpha'-1)}{\Pi(n+\lambda-1)} . F_{-\lambda-1}\begin{pmatrix} -\alpha'-1, & -\alpha-1, & -\lambda-1, & \\ 2-n, & 1+\alpha+\alpha'+\beta', & 1+\alpha+\alpha'+\beta'', & 1 \end{pmatrix}; \end{aligned} \right.$$

$$15)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{(-1)^n.\Pi(n+\alpha+\alpha'+\beta'-2)\,\Pi(n+\alpha+\alpha'+\beta''-2)}{\Pi(n+\alpha-2)\,\Pi(n+\lambda-1)} \\ & \quad \times F_{2-n}\begin{pmatrix} 2-n, & 1+\alpha+\alpha'+\beta', & 1+\alpha+\alpha'+\beta'', & \\ -\alpha'-1, & -\alpha-1, & -\lambda-1, & 1 \end{pmatrix}, \\ & \frac{\Pi(n+\alpha'-1)}{\Pi(n+\alpha+\alpha'+\beta'-1)} \\ & \quad \times F_{1+\alpha+\alpha'+\beta'}\begin{pmatrix} 2-n, & 1+\alpha+\alpha'+\beta', & 1+\alpha+\alpha'+\beta'', & \\ -\alpha'-1, & -\alpha-1, & -\lambda-1, & 1 \end{pmatrix}, \\ & \frac{\Pi(n+\alpha'-1)}{\Pi(n+\alpha+\alpha'+\beta''-1)} \\ & \quad \times F_{1+\alpha+\alpha'+\beta''}\begin{pmatrix} 2-n, & 1+\alpha+\alpha'+\beta', & 1+\alpha+\alpha'+\beta'', & \\ -\alpha'-1, & -\alpha-1, & -\lambda-1, & 1 \end{pmatrix}; \end{aligned} \right.$$

$$16)\left\{\begin{aligned}
&\frac{\Pi(n+\alpha''-1)}{\Pi(\lambda+n-1)}\,.\,F_{-\alpha'-1}\left(\begin{matrix}-\alpha'-1, & -\alpha-1, & -\alpha''-1,\\ 2-n, & 2-\beta', & 2-\beta'',\end{matrix}\;1\right),\\
&\frac{\Pi(n+\alpha''-1)\,\Pi(n+\alpha'-1)}{\Pi(\lambda+n-1)\,\Pi(n+\alpha-1)}\,.\,F_{-\alpha-1}\left(\begin{matrix}-\alpha'-1, & -\alpha-1, & -\alpha''-1,\\ 2-n, & 2-\beta', & 2-\beta'',\end{matrix}\;1\right),\\
&\frac{\Pi(n+\alpha'-1)}{\Pi(n+\lambda-1)}\,.\,F_{-\alpha''-1}\left(\begin{matrix}-\alpha'-1, & -\alpha-1, & -\alpha''-1,\\ 2-n, & 2-\beta', & 2-\beta'',\end{matrix}\;1\right);
\end{aligned}\right.$$

$$17)\left\{\begin{aligned}
&\frac{(-1)^n.\,\Pi(n-\beta'-1)\,\Pi(n-\beta''-1)}{\Pi(n+\alpha-1)\,\Pi(n+\lambda-1)}\,.\,F_{2-n}\left(\begin{matrix}2-n, & 2-\beta', & 2-\beta'',\\ -\alpha'-1, & -\alpha-1, & -\alpha''-1,\end{matrix}\;1\right),\\
&\frac{\Pi(n+\alpha''-1)\,\Pi(n+\alpha'-1)}{\Pi(n-\beta')\,\Pi(n+\lambda-1)}\,.\,F_{2-\beta'}\left(\begin{matrix}2-n, & 2-\beta', & 2-\beta'',\\ -\alpha'-1, & -\alpha-1, & -\alpha''-1,\end{matrix}\;1\right),\\
&\frac{\Pi(n+\alpha''-1)\,\Pi(n+\alpha'-1)}{\Pi(n-\beta'')\,\Pi(n+\lambda-1)}\,.\,F_{2-\beta''}\left(\begin{matrix}2-n, & 2-\beta', & 2-\beta'',\\ -\alpha'-1, & -\alpha-1, & -\alpha''-1,\end{matrix}\;1\right).
\end{aligned}\right.$$ [4])

Die Lösungen 14) und 15) haben einen Sinn, so lange $n+\alpha''$ einen positiven reellen Theil hat, die Lösungen 16) und 17 so lange $n+\lambda$ einen positiven reellen Theil hat. Diese Integrale haben also da einen Sinn, wo die Integrale 6), 7), 10), 11) keinen Sinn haben, und in einem Streifen von der Breite 1, der der imaginären Axe parallel ist, haben 6), 7), 16), 17), in einem andern von derselben Breite 10), 11), 14), 15) gleichzeitig einen Sinn .Demnach kann die Differenzengleichung 3) für alle n als völlig integrirt angesehen werden, wenn noch bewiesen wird, dass sich in jedem der beiden Giltigkeitsgebiete zwei von einander unabhängige Integrale unter den hier aufgestellten vorfinden.

Wir beweisen die Unabhängigkeit des zweiten und dritten der unter 6) aufgestellten Integrale von einander. Wären sie nicht unabhängig von einander, so müsste eine lineare homogene Gleichung mit periodischen Coefficienten zwischen ihnen bestehen. Diese hat etwa die Gestalt:

---

4) Macht man die Substitution und den Grenzübergang der Anmerkung zu S. 148, so finden wir als Lösungen der dortigen Differentialgleichungen aus den beiden ersten Ausdrücken unter 14) die Gauss'schen Reihen

$$F(\mathfrak{a}+\mathfrak{b},\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}',\ \mathfrak{a}-\mathfrak{a}'+1,\ x),\quad x^{\mathfrak{a}'-\mathfrak{a}}\,.\,F(\mathfrak{a}'+\mathfrak{b},\ \mathfrak{a}'+\mathfrak{b}',\ \mathfrak{a}'-\mathfrak{a}+1,\ x).$$

Das letzte Integral unter 14) und das erste unter 15) lassen diesen Grenzübergang nicht zu; die beiden folgenden liefern die Reihen

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}'}.\,F\left(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}',\ \mathfrak{a}'+\mathfrak{b}',\ \mathfrak{b}'-\mathfrak{b}+1,\ \frac{1}{x}\right),\quad \left(\frac{1}{x}\right)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}.\,F\left(\mathfrak{a}+\mathfrak{b},\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}',\ \mathfrak{b}-\mathfrak{b}'+1,\ \frac{1}{x}\right);$$

die beiden ersten unter 10) liefern die Ausdrücke

$$(1-x)^{1-\mathfrak{a}-\mathfrak{a}'-\mathfrak{b}-\mathfrak{b}'}.\,F\left(1-\mathfrak{a}'-\mathfrak{b},\ 1-\mathfrak{a}'-\mathfrak{b}',\ \mathfrak{a}-\mathfrak{a}'+1,\ \frac{1}{x}\right),$$

$$x^{\mathfrak{a}'-\mathfrak{a}}.\,(1-x)^{1-\mathfrak{a}-\mathfrak{a}'-\mathfrak{b}-\mathfrak{b}'}.\,F\left(1-\mathfrak{a}-\mathfrak{b},\ 1-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}',\ \mathfrak{a}'-\mathfrak{a}+1,\ \frac{1}{x}\right);$$

die beiden folgenden lassen den Grenzübergang nicht zu, die beiden letzten unter 17) aber liefern die Reihen

$$x^{\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}'-1}.\,(1-x)^{1-\mathfrak{a}-\mathfrak{a}'-\mathfrak{b}-\mathfrak{b}'}.\,F(1-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}',\ 1-\mathfrak{a}'-\mathfrak{b}',\ \mathfrak{b}-\mathfrak{b}'+1,\ x),$$
$$x^{\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}-1}.\,(1-x)^{1-\mathfrak{a}-\mathfrak{a}'-\mathfrak{b}-\mathfrak{b}'}.\,F(1-\mathfrak{a}'-\mathfrak{b},\ 1-\mathfrak{a}-\mathfrak{b},\ \mathfrak{b}'-\mathfrak{b}+1,\ x).$$

$$C'(n) \cdot \frac{\Pi(-n-\alpha)}{\Pi(-n-\alpha')} \cdot F_{\alpha'}\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', \\ n, & \beta', & \beta'', \end{pmatrix} 1 \Big)$$
$$+ C''(n) \cdot \frac{\Pi(-n-\alpha)}{\Pi(-n-\alpha'')} \cdot F_{\alpha''}\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', \\ n, & \beta', & \beta'', \end{pmatrix} 1 \Big) = 0,$$

worin $C'(n)$, $C''(n)$ periodische Functionen von n sind. Daraus würde folgen:

$$\frac{\Pi(-\alpha''-n)}{\Pi(-\alpha'-n)} \cdot \frac{F_{\alpha'}\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', & \\ n, & \beta', & \beta'', & 1\end{pmatrix}}{F_{\alpha''}\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', & \\ n, & \beta', & \beta'', & 1\end{pmatrix}}$$

sei eine periodische Function, bleibe aber ungeändert, wenn n in $n+1$ übergeht, so dass

$$\frac{\Pi(-\alpha''-n)}{\Pi(-\alpha'-n)} \frac{F_{\alpha'}\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', & \\ n, & \beta', & \beta'', & 1\end{pmatrix}}{F_{\alpha''}\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', & \\ n, & \beta', & \beta'', & 1\end{pmatrix}} = \frac{\Pi(-\alpha''-n-1)}{\Pi(-\alpha'-n-1)} \frac{F_{\alpha'}\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', & \\ n+1, & \beta', & \beta'', & 1\end{pmatrix}}{F_{\alpha''}\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', & \\ n+1, & \beta', & \beta'', & 1\end{pmatrix}}$$

oder

$$\frac{F_{\alpha'}\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', & \\ n, & \beta', & \beta'', & 1\end{pmatrix} \cdot F_{\alpha''}\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', & \\ n+1, & \beta', & \beta'', & 1\end{pmatrix}}{-\alpha'-n}$$
$$= \frac{F_{\alpha'}\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', & \\ n+1, & \beta', & \beta'', & 1\end{pmatrix} \cdot F_{\alpha''}\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', & \\ n, & \beta', & \beta'', & 1\end{pmatrix}}{-\alpha''-n}$$

wäre. Setzen wir nun $n=-\alpha'$ (wobei wir voraussetzen, dass für diesen Fall die Reihen convergiren, was wegen des Princips der Continuität complexer Functionen die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt), so nimmt der Zähler der linken Seite den Werth

$$F_{\alpha''}\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', & \\ -\alpha'+1, & \beta', & \beta'', & 1\end{pmatrix} = F(\alpha''+\beta', \alpha''+\beta'', \alpha''-\alpha+1, 1)$$
$$= \frac{\Pi(\alpha''-\alpha) \cdot \Pi(-\alpha-\alpha''-\beta'-\beta'')}{\Pi(-\alpha-\beta')\,\Pi(-\alpha-\beta'')}$$

an und ist offenbar im Allgemeinen von Null verschieden. Demnach wird die linke Seite der aus der angenommenen Abhängigkeit zuletzt hergeleiteten Gleichung für $n=-\alpha'$ unendlich gross, während die rechte Seite im Allgemeinen offenbar endlich bleibt, so dass im Allgemeinen die Gleichung nicht bestehen kann, also die Integrale von einander unabhängig sein müssen. Dies ist hinreichend, nachzuweisen, dass in jedem Giltigkeitsgebiete der von uns aufgestellten Integrale der Differenzengleichung zweiter Ordnung 3) zwei von einander unabhängige vorhanden sind; denn die Gleichungen, die wir später angeben, die zwischen je drei Integralen stattfinden, und die hier bewiesene Unabhängigkeit von $F_{\alpha'}(1)$, $F_{\alpha''}(1)$ berechtigen zu dem Schluss, dass je zwei Integrale derer unter 6) und 7) unter sich, oder

derer unter 10) und 11) unter sich, oder derer unter 14) und 15) unter sich, oder derer unter 16) und 17) unter sich von einander unabhängig sind.

Artikel 3.

Es können auch Integrale der Differenzengleichung 3) gefunden werden, welche für beliebige n einen Sinn haben, was nun geschehen soll. Hierzu benutzen wir die Eigenschaft der Differenzengleichung zweiter Ordnung, dass sie nur zwei unabhängige Integrale besitzen kann, und demnach zwischen drei beliebigen Integralen nothwendig eine lineare homogene Gleichung mit periodischen Coefficienten stattfinden muss. Wir suchen diese Relation zwischen den drei aus 7) und 11) genommenen Integralen

$$\frac{\Pi(-\alpha-n)}{\Pi(\beta'-n)} F_{\beta'}\begin{pmatrix} n, & \beta', & \beta'', & 1 \\ \alpha, & \alpha', & \alpha'', & \end{pmatrix}, \quad \frac{\Pi(-\alpha-n)}{\Pi(\beta''-n)} F_{\beta''}\begin{pmatrix} n, & \beta', & \beta'', & 1 \\ \alpha, & \alpha', & \alpha'', & \end{pmatrix},$$

$$\frac{\Pi(-\lambda-n)\,.\,\Pi(-\alpha-n)}{\Pi(-n-\alpha-\alpha'-\beta'+1)\,.\,\Pi(-n-\alpha'')}$$
$$\times F_{1-\beta'-\alpha'-\alpha}\begin{pmatrix} n, & 1-\beta'-\alpha'-\alpha, & 1-\beta''-\alpha'-\alpha, & 1 \\ \alpha, & \alpha', & \lambda, & \end{pmatrix}$$

und führen für die drei Reihen

$$1+\frac{\beta'+\alpha}{1}\cdot\frac{\beta'+\alpha'}{\beta'-\beta''+1}\cdot\frac{\beta'+\alpha''}{\beta'-n+1}$$
$$+\frac{\beta'+\alpha}{1}\cdot\frac{\beta'+\alpha+1}{2}\cdot\frac{\beta'+\alpha'}{\beta'-\beta''+1}\cdot\frac{\beta'+\alpha'+1}{\beta'-\beta''+2}\cdot\frac{\beta'+\alpha''}{\beta'-n+1}\cdot\frac{\beta'+\alpha''+1}{\beta'-n+2}+\ldots,$$

$$1+\frac{\beta''+\alpha}{1}\cdot\frac{\beta''+\alpha'}{\beta''-\beta'+1}\cdot\frac{\beta''+\alpha''}{\beta''-n+1}$$
$$+\frac{\beta''+\alpha}{1}\cdot\frac{\beta''+\alpha+1}{2}\cdot\frac{\beta''+\alpha'}{\beta''-\beta'+1}\cdot\frac{\beta''+\alpha'+1}{\beta''-\beta'+2}\cdot\frac{\beta''+\alpha''}{\beta''-n+1}\cdot\frac{\beta''+\alpha''+1}{\beta''-n+2}+\ldots,$$

$$1+\frac{1-\beta'-\alpha'}{1}\cdot\frac{1-\beta'-\alpha}{\beta''-\beta'+1}\cdot\frac{\beta''+\alpha''}{2-\beta'-\alpha'-\alpha-n}$$
$$+\frac{1-\beta'-\alpha'}{1}\cdot\frac{2-\beta'-\alpha'}{2}\cdot\frac{1-\beta'-\alpha}{\beta''-\beta'+1}\cdot\frac{2-\beta'-\alpha}{\beta''-\beta'+2}\cdot\frac{\beta''+\alpha''}{2-\beta'-\alpha'-\alpha-n}$$
$$\times\frac{\beta''+\alpha''+1}{3-\beta'-\alpha'-\alpha-n}+\ldots$$

beziehentlich die Bezeichnung

$$F_{\beta'}^{(n)}, \quad F_{\beta''}^{(n)}, \quad F_{1-\beta'-\alpha'-\alpha}^{(n)}$$

zur augenblicklichen Abkürzung ein. Wir bringen dann die Relation, die zwischen diesen drei Integralen bestehen muss, auf die Form

$$F_{1-\beta'-\alpha'-\alpha}^{(n)} = b'(n)\,\frac{\Pi(1-n-\alpha-\alpha'-\beta')\,.\,\Pi(-n-\alpha'')}{\Pi(-\lambda-n)\,\Pi(\beta'-n)}\,.\,F_{\beta'}^{(n)}$$
$$+\,b''(n)\,\frac{\Pi(1-n-\alpha-\alpha'-\beta')\,\Pi(-n-\alpha'')}{\Pi(-n-\lambda)\,\Pi(\beta''-n)}\,.\,F_{\beta''}^{(n)},$$

so müssen $b'(n)$, $b''(n)$ periodische Functionen sein. Setzen wir darin $n-m$ für m, und für n eine ganze positive, über alle Grenzen wachsende Zahl, so nähern sich

$$F^{(n-m)}_{1-\beta'-\alpha'-\alpha},\quad F^{(n-m)}_{\beta'},\quad F^{(n-m)}_{\beta''}$$

der Eins und ebenso (vergl. Anm. zu S. 150)

$$\frac{\Pi(-n-\alpha-\alpha'-\beta'+m+1)\,.\,\Pi(-n-\alpha''+m)}{\Pi(-n-\lambda+m)\,\Pi(\beta''-n+m)}$$

der Eins; hingegen ist für sehr grosse m

$$\frac{\Pi(-n-\alpha-\alpha'-\beta'+m+1)\,.\,\Pi(-n-\alpha''+m)}{\Pi(-n-\lambda+m)\,\Pi(\beta'-n+m)}$$

proportional $m^{\beta''-\beta'}$ und wird unendlich gross, wenn β'' einen grösseren reellen Theil als β' hat. Demnach ist (wenigstens unter Voraussetzung, dass der reelle Theil von β'' grösser als der von β' ist) die aufgestellte Gleichung nur möglich, wenn $b'(n)=0$ ist. Für $b''(n)$ aber ergiebt sich der Werth Eins. Also hat man, zunächst unter der gemachten Beschränkung für β'' und β', dann aber wegen des Princips der Continuität complexer Functionen auch allgemein

$$F_{\beta'}\begin{pmatrix} n, & \beta', & \beta'', & \\ \alpha, & \alpha', & \alpha'', & 1\end{pmatrix} = \frac{\Pi(\beta''-n)\,\Pi(-\lambda-n)}{\Pi(-n-\alpha-\alpha'-\beta'+1)\,\Pi(-n-\alpha'')}$$
$$\times F_{1-\beta'-\alpha'-\alpha}\begin{pmatrix} n, & 1-\beta'-\alpha'-\alpha, & 1-\beta''-\alpha'-\alpha, & \\ \alpha, & \alpha', & \lambda, & 1\end{pmatrix}.$$

Indem man eine Buchstabenvertauschung vornimmt, kann man dies Resultat auch so schreiben:

$$18)\quad F_{\alpha}\begin{pmatrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'', & \\ n, & \beta', & \beta'', & 1\end{pmatrix} = \frac{\Pi(\alpha-\alpha'')\,.\,\Pi(1-\alpha-\alpha'-\alpha''-\beta'-\beta''-n)}{\Pi(1-\alpha'-\alpha''-\beta'-n)\,.\,\Pi(-\alpha''-\beta'')}$$
$$\times F_{1-\alpha'-\beta'-n}\begin{pmatrix} \alpha'', & 1-\alpha-\beta'-n, & 1-\alpha'-\beta'-n, & \\ n, & \beta', & \alpha+\alpha'+\beta'+\beta''+n-1, & 1\end{pmatrix}\text{[5]}$$
$$= \frac{\Pi(\alpha-\alpha')\,.\,\Pi(1-\alpha-\alpha'-\alpha''-\beta'-\beta''-n)}{\Pi(1-\alpha'-\alpha''-\beta'-n)\,.\,\Pi(-\alpha'-\beta'')}$$
$$\times F_{1-\alpha''-\beta'-n}\begin{pmatrix} \alpha', & 1-\alpha-\beta'-n, & 1-\alpha''-\beta'-n, & \\ n, & \beta', & \alpha+\alpha'+\beta'+\beta''+n-1, & 1\end{pmatrix},$$

und es sind die beiden letzten Glieder zwei Lösungen der Differenzengleichung 3), welche so lange einen Sinn haben, als $1-\alpha''-\beta''$, beziehentlich $1-\alpha'-\beta''$ einen positiven reellen Theil hat, also unabhängig von n. Vertauscht man hierin β' mit β'' und sieht von constanten Factoren ab, so erhält man noch die beiden, so lange $1-\alpha''-\beta'$, beziehentlich $1-\alpha'-\beta'$ einen positiven reellen Theil hat, giltigen Lösungen der Differenzengleichung 3):

$$18a)\ \begin{cases} \dfrac{\Pi(-n-\lambda)}{\Pi(1-\alpha'-\alpha''-\beta''-n)}\,.\,F_{1-\alpha'-\beta''-n}\begin{pmatrix} \alpha'', & 1-\alpha-\beta''-n, & 1-\alpha'-\beta''-n, & \\ n, & \beta'', & \alpha+\alpha'+\beta'+\beta''+n-1, & 1\end{pmatrix}, \\[2ex] \dfrac{\Pi(-n-\lambda)}{\Pi(1-\alpha'-\alpha''-\beta''-n)}\,.\,F_{1-\alpha''-\beta''-n}\begin{pmatrix} \alpha', & 1-\alpha-\beta''-n, & 1-\alpha''-\beta''-n, & \\ n, & \beta'', & \alpha+\alpha''+\beta'+\beta''+n-1, & 1\end{pmatrix}. \end{cases}$$

---

5) Macht man die Substitution und den Grenzübergang der Anmerkung zu S. 148, so findet man hieraus die bekannte Relation

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b},\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}',\ \mathfrak{a}-\mathfrak{a}'+1,\ x) = (1-x)^{-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}\,.\,F\left(1-\mathfrak{a}'-\mathfrak{b}',\ \mathfrak{b}+\mathfrak{a},\ \mathfrak{a}-\mathfrak{a}'+1,\ \frac{x}{x-1}\right).$$

Vertauscht man in den vier Lösungen 18) und 18a) α mit α' und multiplicirt mit $\Pi(-n-\alpha)$ und dividirt durch $\Pi(-n-\alpha')$, oder vertauscht man α mit α'' und multiplicirt mit $\Pi(-n-\alpha)$ und dividirt durch $\Pi(-n-\alpha')$, so erhält man je vier neue Lösungen der Differenzengleichung 3), die unabhängig von n einen Sinn haben oder keinen Sinn haben.

Wendet man die Transformationsgleichung 18) auf das erste der unter 10) stehenden Integrale an, so findet man als neue Lösung von 3) die Function:

$$19) \quad \frac{(-1)^n \,.\, \Pi(-n-\alpha-\alpha''-\beta')}{\Pi(-n-\alpha'')} \times F_{\alpha+n+\beta-2}\begin{pmatrix} -\alpha''-1, & \alpha+\beta'+n-2, & \alpha'+\beta'+n-2, & \\ 2-n, & 2-\beta', & 3-\alpha-\alpha'-\beta'-\beta''-n, & 1 \end{pmatrix},$$

welche einen Sinn hat, wenn $\alpha''+\beta''$ einen positiven reellen Theil hat. Vertauscht man darin β' und β'', so erhält man eine neue Lösung, welche einen Sinn hat, wenn $\alpha''+\beta'$ einen positiven reellen Theil hat. Demnach haben von den Integralen 18) oder 19) immer entweder die einen oder die anderen einen Sinn; wenn aber der reelle Theil von $\alpha''+\beta''$, $\alpha''+\beta'$ positiv und kleiner als 1 ist, so haben sie gleichzeitig alle einen Sinn. Vertauscht man in diesen Lösungen α mit α' und multiplicirt mit $\Pi(-n-\alpha)$ und dividirt durch $\Pi(-n-\alpha')$, oder vertauscht man α mit α'' und multiplicirt mit $\Pi(-n-\alpha)$ und dividirt durch $\Pi(-n-\alpha'')$, so erhält man noch zweimal zwei Lösungen, welche unabhängig von n einen Sinn haben oder keinen. Man kann aber in jedem Falle aus den Integralen 18) und 19) und den daraus abgeleiteten mindestens sechs Lösungen auswählen, welche einen Sinn haben, und in speciellen Fällen haben sie alle einen Sinn. Wählt man aus diesen Lösungen zwei unabhängige aus, so kann durch diese die Gleichung 3) als vollständig integrirt angesehen werden, weil sie für alle n unbeschränkt gelten, was ein Vorzug dieser Lösungen ist. Allein die Lösungen des ersten und zweiten Artikels, welche den Nachtheil beschränkter Giltigkeit haben, haben für grössere Werthe von n meistens den Vortheil viel stärkerer Convergenz.

Kleinere Mittheilungen.

III. Theorie der räumlichen Strahlenbüschel.

(Hierzu Taf. I, Fig. 2 u. 3.)

In den Berichten der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, 1862, giebt Möbius eine elementare Darstellung der von Kummer auf analytischem Wege entwickelten Eigenschaften der Strahlenbüschel. Möbius beweist die Existenz der beiden Brennlinien sowohl auf synthetischem, als analytischem Wege; für die weitere Entwickelung bedient er sich der analytischen Geometrie. Es lässt sich die Bestimmung der Brennlinien auch auf die Construction der Doppelpunkte zweier homographischer Theilungen zurückführen und die übrigen Eigenschaften durch ganz einfache geometrische Betrachtungen geben.

Das Strahlenbüschel wird als der Inbegriff der Verbindungslinien der entsprechenden Punkte zweier in parallelen Ebenen — „Grundebenen" — liegender affiner Figuren definirt. Ein solches Strahlenbüschel besitzt folgende Eigenschaften:

1. Der Schnitt mit einer den Grundebenen parallelen Ebene ist eine (mit den beiden in den Grundebenen liegenden Figuren) affine Figur.

Zwei Figuren sind einander affin, wenn den Punkten einer Geraden in der einen Figur Punkte einer Geraden in der zweiten Figur derart entsprechen, dass die beiden einander entsprechenden Geraden durch einander entsprechende Punkte nach einerlei Verhältniss getheilt werden.

Für den Beweis in 1) möge folgende Betrachtung vorausgeschickt werden:

Es seien A, A' und B, B' zwei entsprechende Punktenpaare der Geraden AB und $A'B'$. Man erhält dadurch (Fig. 2) ein räumliches Viereck $ABB'A'$. Die Verbindungslinien der Mitten der Seiten C, C', A'', B'' bilden ein Parallelogramm, dessen Diagonalen CC' und $A''B''$ sich im Punkte C'' halbiren. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens auf die räumlichen Vierecke $ABB''A''$ und $A''B''B'A'$ u. s. w. erhält man den Satz: Theilt man die

Seiten AA' und BB' in $(n = 2^\nu)$ gleiche Theile und verbindet die entsprechenden Theilungspunkte mit einander, so wird die Verbindungslinie CC' der Mitten C und C' der Seiten AB und $A'B'$ in ebenso viele unter einander gleiche Theile getheilt. Durch fortgesetzte Anwendung dieses Satzes auf die Vierecke $ACC'A'$ und $CC'BB'$ folgt schliesslich: Theilt man das eine Paar gegenüberstehender Seiten AB und $A'B'$ eines räumlichen Vierecks in $(m = 2^\mu)$ gleiche Theile und das andere Paar ebenfalls in $(n = 2^\nu)$ gleiche Theile, so werden die Verbindungslinien der entsprechenden Theilungspunkte ebenfalls in gleiche Theile getheilt.

Aus diesem Satze folgt: Sind A, B, C drei willkürliche Punkte einer Geraden in der einen Figur, A', B', C' die entsprechenden Punkte der zweiten Figur, so ist

$$AB : BC = A'B' : B'C'.$$

Schneidet man die Geraden AA' und BB' durch eine den Geraden AB und $A'B'$ parallele Ebene in den Punkten A'', B'', so ist bekanntlich

$$AA'' : A''A' = BB'' : B''B';$$

daraus folgt, wenn C'' der Durchschnittspunkt der schneidenden Ebene mit der Geraden CC' ist, dass die drei Punkte A'', B'', C'' in einer Geraden liegen und dass

$$AB : BC = A''B'' : B''C'' = A'B' : B'C'$$

ist. Damit ist die in 1) ausgesprochene Eigenschaft bewiesen.

2. Eine Gerade, welche alle Strahlen des Strahlenbüschels schneidet, heisst B r e n n l i n i e. Es existiren zwei den Grundebenen parallele Brennlinien.

Es seien a, b, c drei Strahlen, welche die Grundebenen in den Punkten A, B, C und A', B', C' schneiden, wobei sowohl die Punkte A, B, C, als auch die Punkte A', B', C' nicht in einer Geraden liegen. Schneidet man die Strahlen a, b, c durch ein System den Grundebenen paralleler Ebenen, so existiren darunter zwei Ebenen ε_1 und ε_2 von der Beschaffenheit, dass für jede dieser beiden Ebenen die Durchschnittspunkte in einer Geraden liegen.

Um überhaupt drei einander zu zweien kreuzende Gerade a, b, c durch eine vierte Gerade x zu schneiden, lege man durch die eine der Geraden, etwa a, eine Ebene α; die Verbindungslinie der Durchschnittspunkte B und C der Ebene mit den Geraden b und c bestimmt eine Lage der Geraden x. Für die verschiedenen Ebenen α bilden die Durchschnittspunkte B und C zwei homographische Theilungen (collineare Punktreihen). Die Bestimmung einer den Grundebenen parallelen Geraden x ist daher auf die Lösung der Aufgabe zurückgeführt: „Auf zwei einander kreuzenden Geraden b und c sind zwei homographische Theilungen B und C gegeben; man bestimme zwei einander entsprechende Punkte B und C derart, dass die Verbindungslinie BC einer gegebenen Ebene (Grundebene) parallel ist.“ Legt man nun durch die Punkte C Ebenen parallel der gegebenen Ebene, so be-

stimmen diese Ebenen auf der Geraden b ein System von Punkten $\mathfrak{B}$, welches mit den Punkten C, also auch mit den Punkten B zwei homographische Theilungen bildet.

Die Doppelpunkte der beiden Theilungen B und $\mathfrak{B}$ bestimmen die gesuchten Geraden, durch welche die Ebenen ε_1 und ε_2 bestimmt sind.

Ist d ein beliebiger vierter Strahl, so folgt, wenn mit A'', B'', C'', D'' die Durchschnittspunkte der einen Ebene, etwa ε_1, mit den Strahlen a, b, c, d bezeichnet werden:

$$ABC : A''B''C'' = ABD : A''B''D''.$$

Nun ist

$$A''B''C'' = 0, \text{ also auch } A''B''D'' = 0,$$

d. h. der Punkt D'' liegt in der Geraden $A''B''$.

Die beiden Geraden, wie $A''B''$, sind Brennlinien. Durch einen Punkt und die beiden Brennlinien ist jeder Strahl bestimmt; denn durch einen gegebenen Punkt lässt sich nur eine Gerade ziehen, welche zwei gegebene einander kreuzende Gerade schneidet. Das Strahlensystem ist daher durch die beiden Brennlinien bestimmt. Es existirt nur ein Strahl, welcher die beiden Brennlinien rechtwinklig schneidet; dieser Strahl bestimmt den kleinsten Abstand der beiden Brennlinien.

Dass nur zwei den Grundebenen parallele Brennlinien existiren, ist für sich klar; dass aber keine dritte, den Grundebenen nicht parallele Brennlinie existiren kann, geht aus Folgendem hervor: Sind (Fig. 3) AB und CD die beiden Brennlinien, so bilden die Geraden AD, BD zwei sich im Punkte D schneidende Strahlen und die Geraden AC und BC zwei im Punkte C sich schneidende Strahlen. Eine dritte Brennlinie müsste daher entweder mit der Brennlinie AB oder mit der Brennlinie CD zusammenfallen.

3. Unter der Dichte der Strahlen in einer Ebene versteht man die Anzahl der durch die Flächeneinheit gehenden Strahlen. Ist die Dichte der Strahlen in einer Grundebene constant, so ist sie in jeder parallelen Ebene constant. Sind nämlich f und g zwei gleiche Flächenstücke in der Grundebene, f' und g' die entsprechenden in einer parallelen Ebene, so ist $f' = g'$. Die Flächenstücke f' und g' sind durch die durch die Flächen f und g gehenden Strahlen bestimmt. Die Dichte in f' und g' ist daher gleich. Die Dichte der Strahlen ist der Grösse des Flächenstücks umgekehrt proportional.

Sind M, N, P, Q die Durchschnittspunkte der vier Strahlen AD, BD, BC, AC mit einer den Brennlinien AB und CD parallelen Ebene, so ist das Viereck $MNPQ$ ein Parallelogramm, dessen (spitzer) Winkel dem (spitzen) Winkel φ der beiden Brennlinien gleich ist. Die Fläche dieses Vierecks ist

$$MQ \,.\, QP \sin\varphi.$$

Nun ist

$$MQ:CD = AQ:AC,$$
$$PQ:AB = QC:AC,$$

also

$$\frac{MQ.PQ}{CD.AB} = \frac{AQ.QC}{AC^2},$$

mithin die Fläche f des Vierecks $MNPQ$

$$f = AQ.QC\frac{CD.AB}{AC^2}\sin\varphi.$$

Für alle parallelen Ebenen ist der Ausdruck

$$\frac{CD.AB}{AC^2}\sin\varphi$$

constant $= k$. Die Fläche ist daher dem Producte $AQ.QC$ proportional, letzteres Product ist wieder dem Producte der Abstände der schneidenden Ebenen von den beiden Brennlinien proportional.*

Ist h der Abstand der beiden Brennlinien und befindet sich die schneidende Ebene zwischen den beiden Brennlinien, so ist, wenn x der Abstand derselben von der einen Brennlinie ist, $h-x$ der andere. Das Product $x(h-x)$ wird für $x=\frac{1}{2}h$ ein Maximum, die Dichte des Strahlenbüschels daher an dieser Stelle ein Minimum.

Graz. Prof. Dr. J. Frischauf.

IV. Eine geometrische Aufgabe.

Zu vier gegebenen Kugeln eine fünfte so zu construiren, dass diese jede der gegebenen vier je unter einem gegebenen Winkel schneide.

Verbindet man die Mittelpunkte zweier sich schneidender Kugeln mit irgend einem Punkte ihres Schnittkreises durch Radien, so sagen wir: die beiden Kugeln schneiden sich mehr ausschliessend oder mehr einschliessend, je nachdem jene Radien den stumpfen oder den spitzen Schnittwinkel der beiden Kugeln mit einander einschliessen.

Zwei Kugeln werden von einer dritten gleichartig oder ungleichartig geschnitten, je nachdem die dritte Kugel die beiden anderen zugleich mehr ausschliessend oder mehr einschliessend, oder aber die eine mehr ausschliessend und die andere mehr einschliessend schneidet.

Bezeichnet man die vier gegebenen Kugeln mit M_1, M_2, M_3, M_4 und die zu construirende mit μ, so hat diese nachfolgende verschiedene Lagen zu den vier Kugeln M:

* Dieser Satz gilt auch, wenn die Schnittebene $MNPQ$ nicht, wie in der Zeichnung, zwischen den beiden Brennlinien liegt.

1. μ schneidet alle vier Kugeln mehr ausschliessend;
2. μ schneidet alle vier Kugeln mehr einschliessend;
3. μ schneidet drei Kugeln mehr ausschliessend und eine mehr einschliessend;
4. μ schneidet eine Kugel mehr ausschliessend und drei mehr einschliessend;
5. μ schneidet zwei Kugeln mehr ausschliessend und zwei mehr einschliessend.

Der Fall 1 wie 2 geben je nur eine Anordnung der vier Kugeln M in Bezug zur Kugel μ. Diese beiden Anordnungen entsprechen einander. Der Fall 3 giebt vier Anordnungen, so dass jeder derselben je eine aus den Anordnungen des Falles 4 entspricht. Der Fall 5 enthält sechs verschiedene Anordnungen, die sich zu je zweien entsprechen. Jede Anordnung giebt zu einer Lösung unserer Aufgabe Veranlassung. Wir erhalten somit sechszehn Lösungen, die sich achtmal zu je zweien entsprechen.

Zum Beweise der unten angegebenen Construction und Lösungen der Aufgabe möge man nachfolgende Sätze beachten:

1. Schneidet eine Kugel zwei gegebene Kugeln, beide je unter gleichen Winkeln, und zwar 1. gleichartig oder 2. ungleichartig, so liegen die Schnittkreise der ersten Kugeln mit den beiden anderen derart auf ihr, dass der eine von den durch diese Kreise gehenden Kegeln seine Spitze in einem der beiden Aehnlichkeitspunkte der zwei gegebenen Kugeln liegend hat, und zwar im Fall 1 im äusseren, im Fall 2 im innern.

2. Alle Kugeln, welche zwei gegebene Kugeln je unter gleichen Winkeln, und zwar beide gleichartig oder ungleichartig schneiden und ihre Mittelpunkte auf einer Geraden liegend haben, bilden eine Kugelschaar. Ihre Potenzebene geht im ersten Falle durch den äussern und im zweiten Falle durch den innern Aehnlichkeitspunkt der beiden gegebenen Kugeln.

Wir haben nun nachfolgende Construction: Man schneide jede der gegebenen vier Kugeln mit einer Ebene e, so dass diese Ebene e_x mit der Kugel M_x den gleichen Schnittwinkel α_x bildet, als wie die Kugel μ. x ist eine der Zahlen von 1 bis 4. Construiren wir nun die vier Kugeln, von denen je eine mit je einer der gegebenen concentrisch ist und je die zugehörige Ebene e_x berührt. Diesen Kugeln wollen wir den Namen Kleinkugeln geben und mit kM_1, kM_2, kM_3, kM_4 bezeichnen. Es berührt alsdann die Kleinkugel kM_1 die Ebene e_1, kM_2 die Ebene e_2 etc. Construire nun die Ebene E, auf der die äusseren Aehnlichkeitspunkte der vier Kleinkugeln liegen. Lege von dem Potenzpunkte der vier gegebenen Kugeln an jede von diesen eine Tangentialebene, deren Berührungspunkte beziehent-

lich b_1, b_2, b_3, b_4 seien, und ziehe die Geraden $k_1 b_1$, $k_2 b_2$, $k_3 b_3$, $k_4 b_4$, deren Durchschnittspunkte mit der Ebene E die Punkte a_1, a_2, a_3, a_4 sein mögen. Lege von a_1 als Spitze den Tangentialkegel an die Kleinkugel $k M_1$ und construire eine Kugel m_1, die diesen Kegel und die Tangentialebene b_1 berühre. Auf analoge Weise construire man die Kugeln m_2, m_3, m_4. Beschreibe jetzt diejenigen zwei Kugeln μ_1 und μ_2, von denen die eine die Kugeln m_1 bis m_4 ausschliessend und die andere je einschliessend berührt, so sind dies zwei Kugeln, die die gegebenen vier unter den bestimmten Winkeln α schneiden.

Die 14 übrigen Lösungen ergeben sich, indem man für die Ebene E der Reihe nach die Ebenen, durch äussere und innere Aehnlichkeitspunkte gehend, nimmt.

Bemerkung. Liegt der Potenzpunkt P der Kugeln M innerhalb dieser Kugeln, so kann man die Tangentialebenen b_1 bis b_4 nicht ziehen. Welche Aenderung ergiebt sich dann in der Construction? Wann ist die Auflösung unmöglich und unter welchen Umständen reducirt sich die Anzahl der Lösungen?

Welche Beziehungen ergeben sich bei imaginären Schnitten und Schnittwinkeln α?

Aus der Construction dieser Aufgabe ergiebt sich ohne Weiteres die für das entsprechende Problem über die Kreise in der Ebene. Auf deren Erörterung gehe ich hier nicht näher ein.

Solothurn, im October 1870. Prof. G. Affolter.

V. Ueber das Einschalten eines trigonometrischen Punktes in ein gegebenes Dreiecksnetz nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Wenn die Lage mehrerer Punkte einer Ebene in irgendwelcher Weise, etwa durch rechtwinklige Coordinaten gegeben ist, so wird die Aufgabe, einen weitern Punkt gegen die gegebenen festzulegen, im Allgemeinen vollständig gelöst durch Messung zweier Winkel, welche je einen geometrischen Ort des neuen Punktes liefern. Hat man aber mehr als zwei Winkel (nicht mit absoluter Genauigkeit) gemessen, so ist die Aufgabe, die wahrscheinlichste Lage des Punktes zu ermitteln, welche bei Detailtriangulirungen eine wichtige Rolle spielt, nach der Methode der kleinsten Quadrate zu behandeln, und wird gewöhnlich dadurch gelöst, dass man, unter Zugrundelegung von Näherungswerthen $x_0 y_0$ der Coordinaten des gesuchten Punktes, zwischen den an diesen anzubringenden wahrscheinlichsten Verbesserungen $x\, y$ und den wahrscheinlichsten Aenderungen $\delta \delta' \delta'' \ldots$ der ge-

messenen Winkel (mit Hilfe des Taylor'schen Satzes) lineare Gleichungen aufstellt von der Form

$$1)\quad \left\{ \begin{array}{l} \delta = a x + b y + w, \\ \delta' = a' x + b' y + w', \\ \delta'' = a'' x + b'' y + w'' \\ \ldots\ldots\ldots, \end{array} \right.$$

deren weitere Behandlung nach der Methode der kleinsten Quadrate auf zwei Gleichungen:

$$2)^* \quad \left\{ \begin{array}{l} (aa)\, x + (ab)\, y + (aw) = 0, \\ (ab)\, x + (bb)\, y + (bw) = 0 \end{array} \right.$$

und damit auf die gesuchten Verbesserungen x und y, sowie, unter Zuhilfenahme von (ww), auch auf deren mittlere zu fürchtende Fehler führt.

Der Ansatz der Bedingungsgleichungen 1) und die numerische Ermittelung ihrer Coefficienten ist der umständlichste und am wenigsten zu controlirende Theil der Rechnung und kann durch folgendes einfachere Verfahren ersetzt werden:

Unter der (oben stillschweigend gemachten) Annahme gleicher Genauigkeit der Winkelmessung oder einer bereits erfolgten Modification der Gleichungen 1) mit den Quadratwurzeln der Gewichte bei ungleicher Genauigkeit der Winkelmessung verlangt die Methode der kleinsten Quadrate bekanntlich, dass die Quadratsumme

$$3)\quad \Omega = (\delta\delta) = (aa)x^2 + 2(ab)xy + (bb)y^2 + 2(aw)x + 2(bw)y + (ww)$$

zum Minimum wird, eine Bedingung, die sofort auf die Gleichungen 2) führt. Fasst man aber den allgemeinen Werth von Ω ins Auge (ohne Rücksicht auf das Minimum), so erhellt, dass man die sechs Coefficienten (aa) (ab) ... (ww) finden kann, sobald man diejenigen sechs Werthe $\Omega_0\, \Omega_1 \ldots \Omega_5$ kennt, welche Ω für irgendwelche sechs bestimmte Werthsysteme xy annimmt. Bezeichnet man demnach die Werthe, welche Ω annimmt,

$$4)\quad \left\{ \begin{array}{llll} \text{für } x = 0, & y = 0 & \text{mit} & \Omega_0, \\ \text{,,}\quad x = +1, & y = 0 & \text{,,} & \Omega_1, \\ \text{,,}\quad x = -1, & y = 0 & \text{,,} & \Omega_2, \\ \text{,,}\quad x = 0, & y = +1 & \text{,,} & \Omega_3, \\ \text{,,}\quad x = 0, & y = -1 & \text{,,} & \Omega_4, \\ \text{,,}\quad x = +1, & y = +1 & \text{,,} & \Omega_5, \\ \text{,,}\quad x = -1, & y = +1 & \text{,,} & \Omega_6, \end{array} \right.$$

so erhält man die Coefficienten ausgedrückt durch die Gleichungen

---

* Mit der üblichen Bezeichnung der Summen durch Klammern.

$$
5) \quad \begin{cases}
(ww) = \Omega_0, \\
(aa) = \dfrac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} - \Omega_0, \\
(aw) = \dfrac{\Omega_1 - \Omega_2}{4}, \\
(bb) = \dfrac{\Omega_3 + \Omega_4}{2} - \Omega_0, \\
(bw) = \dfrac{\Omega_3 - \Omega_4}{4}, \\
2(ab) = \Omega_5 - (aa) - (bb) - (ww) - 2(aw) - 2(bw), \\
2(ab) = \Omega_6 - (aa) - (bb) - (ww) + 2(aw) + 2(bw).
\end{cases}
$$

Die letzte Gleichung dient als Probe.

Die Bestimmung der Summencoefficienten ist also zurückgeführt auf diejenige der Werthe Ω, diese aber sind einfach zu rechnen; es sind z. B. die in Ω_1 vorkommenden δ die Widersprüche zwischen den gemessenen Winkeln und den Werthen, welche dieselben annehmen, wenn x_0+1 und y_0 als Coordinaten des neuen Punktes in Rechnung genommen werden; sämmtliche Ω finden sich also mittels derselben Rechenoperationen, welche bei Ermittelung des unter allen Umständen gebrauchten (ww) dienen.

Vergleicht man dieses Verfahren mit dem gewöhnlichen, so zeigt sich bereits der Gewinn, dass man sich nicht mit dem Ansatz der Bedingungsgleichungen zu befassen hat, während der Wegfall der Berechnung der $a, b \ldots$ durch die Rechnung sämmtlicher δ auf den ersten Blick aufgewogen erscheint; allein wenn man bedenkt, dass diejenigen δ, welche in Ω_0 vorkommen, auch bei der gewöhnlichen Methode ermittelt werden müssen, und dass alle anderen δ an denselben Stellen der Logarithmentafel wie die ersteren zu rechnen sind, also kein weiteres Blättern verursachen, sondern nur eine Wiederholung der Rechnung mit Aenderung der zwei oder drei letzten Ziffern verlangen, so fällt der Vergleich zu Gunsten des vorgeschlagenen Verfahrens aus. (Nur bei rein pothenotischer Bestimmung wird wegen der gleichen Form aller Bedingungsgleichungen und wegen der verhältnissmässig grossen Zahl von Richtungen der Vortheil geringer ausfallen.) Allein auch diese Rechnung lässt sich noch wesentlich vereinfachen, wenn sie theilweise durch eine Construction ersetzt wird. Bezeichnet man mit $ABC\ldots$ die gegebenen Punkte, mit $P_0 P_1 \ldots P_6$ diejenigen Lagen des gesuchten Punktes, welchen die Werthe $\Omega_0 \Omega_1 \ldots \Omega_6$ entsprechen, dann hat man, wie schon erwähnt, zur Bestimmung von Ω_0 die Richtungen $AP_0\, BP_0 \ldots$ trigonometrisch zu rechnen, und die Bestimmung von Ω_1 würde ebenso verlangen die Rechnung der Richtungen $AP_1\, BP_1 \ldots$; eine Richtungsdifferenz $AP_1 - AP_0$ ist aber $= \dfrac{e}{AP}\, 206265$, wenn e der Abstand des Punktes P_1 von der Geraden AP_0, und lässt sich höchst einfach construiren, indem e und AP (beide natürlich in sehr ver-

schiedenem Massstab) aus einer genauen Zeichnung genommen werden. Man hat also nur die Richtungen AP_0 BP_0 ... zu rechnen und schreibt dann rasch die Tabelle aller AP_1 BP_1..., AP_2 BP_2..., indem man die Richtungsdifferenzen, von denen je zwei absolut gleich, aber entgegengesetzten Zeichens sind, aus einem bequem eingerichteten Diagramm mit dem Zirkel abnimmt und mit ihrem aus der Figur zu ersehenden Vorzeichen den AP_0 BP_0... zufügt.

In Beziehung auf Rechenproben ist die schon erwähnte zweifache Rechnung von (ab) vollkommen ausreichend [5)]; sollte diese Probe nicht stimmen, so sieht man nach, ob in jeder Gruppe $\delta_0\, \delta_1 \ldots \delta_6$, welche ein und demselben Winkel zugehören (also nicht in demselben Ω vorkommen), die leicht zu erweisende Gleichung

$$\delta_1 - \delta_2 + \delta_3 - \delta_4 = \delta_5 - \delta_6$$

erfüllt ist.

Hat man es mit so grossen Entfernungen zu thun, dass die Erde als Kugel zu betrachten ist, so ändert sich am Ganzen nur die Berechnung der Richtungen $AP_0 BP_0$..., welche mit Rücksicht auf die nöthigen kleinen Correctionen auszuführen ist.

Selbstverständlich lässt sich das vorgeschlagene Verfahren auf jede Ausgleichung mit zwei Unbekannten anwenden; ob indessen ein Gewinn dadurch erzielt wird, hängt von der Natur der Bedingungsgleichungen ab. Ebenso lässt sich nicht allgemein sagen, ob das Verfahren bei drei und mehr Unbekannten noch von Vortheil ist.

Die Gleichungen für (aa) und (bb) in 5) geben noch zu einer theoretischen Bemerkung Veranlassung: Diese Werthe sind wesentlich positiv und es fragt sich, ob sich dies aus den betreffenden Gleichungen 4) ersehen lässt. Um es zu untersuchen, betrachten wir die Gleichung 2) als Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung in Beziehung auf ein Coordinatensystem $xy\Omega$. Da stets $\Omega > 0$, so liegt die Fläche ganz auf einer Seite der xy-Ebene, und da zugleich Ω beliebig gross werden kann, so kann die Fläche nichts Anderes sein, als ein elliptisches Paraboloid. Jeder ebene Schnitt || der xy-Ebene muss eine Ellipse geben, weshalb zwischen den Coefficienten der Gleichung die Beziehung stattfinden muss:

$$(bb) - \frac{(ab)}{(aa)}(ab) > 0.$$

Dieser Ausdruck ist mit der Gauss'schen Bezeichnung $= (bb.1)$ und ist nur dann allgemein > 0, wenn $(aa) > 0$ und $(bb) > 0$ (Encke, B. J. 1835, S. 272). Dasselbe lässt sich auch rein geometrisch einsehen, wenn die Bedeutung des arithmetischen Mittels $\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}$. als das zum Halbirungspunkte einer Sehne der Fläche gehörige Ω ins Auge gefasst wird.

Karlsruhe, im Februar 1871. Prof. W. Jordan.

VI. Ueber einen merkwürdigen Punkt des Dreiecks.

(Hierzu Taf. I, Fig. 4.)

Vertauscht man in einem Dreiecke ABC die Richtungen der Seiten dergestalt, dass (Fig. 4)

$$AB_a = AB, \quad AC_a = AC,$$
$$BC_b = BC, \quad BA_b = BA,$$
$$CA_c = CA, \quad CB_c = CB$$

genommen wird, und construirt man ferner die Parallelogramme

$$AB_aA^*C_a, \quad BC_bB^*A_b, \quad CA_cC^*B_c,$$

so schneiden sich deren Diagonalen AA^*, BB^*, CC^* in einem Punkte O. Letzterer besitzt die Eigenschaft, dass die Summe der Quadrate seiner Abstände von den Dreiecksseiten ein Minimum ausmacht; er ist also identisch mit dem von Dr. Wetzig im XII. Theile dieser Zeitschrift, S. 281, untersuchten Punkte.

(Aus einer Mittheilung von Const. Harkema in Petersburg.)

VII. Ueber eine analytische Entwickelung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie in voller Allgemeinheit.

(Hierzu Taf. I, Fig. 5 u. 6.)

Die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie werden gewöhnlich nicht im Zusammenhange mit den Elementen der analytischen Geometrie des Raumes gegeben, obwohl dieselben recht eigentlich dahin gehören. Wie bekannt, rührt dies davon her, dass, wenn diese Formeln ohne irgendwelche Beschränkung abgeleitet werden sollen, in dieselben mehrfach Wurzelgrössen eingehen, deren Zeichen sich nicht so leicht bestimmen lässt. Einen beachtenswerthen Versuch, diesen Uebelstand zu beseitigen, unternahm Cauchy (*Exerc. IV*, S. 5 flgg.); indess ist nicht zu verkennen, dass dies erst dann vollständig gelingen könne, wenn die in der analytischen Geometrie auftretenden Grössen eindeutig definirt werden, was nach dem bekannten Vorgange von Möbius leicht durchgeführt werden kann. Auf ähnliche Weise wurde die Sphärik von Gauss in der *Theor. mot. corp. coel.* und nachher von Möbius (Leipz. Berichte 1860, S. 52 flgg.) behandelt, der a. a. O. zuerst die genannten Formeln in voller Allgemeinheit begründete. — Im Folgenden sollen diese Formeln auf analytischem Wege, d. h. mit Zugrundelegung der bekannten Richtungscoordinaten im Raume gewonnen werden — ein an sich naheliegendes Verfahren, das sich aber kaum irgendwo vollständig, d. h. mit Ausschluss jeder Beschränkung, durchgeführt finden dürfte (vgl. z. B. Grunert, Trigonometrie, S. 135 flgg.).

Es ist dazu eine strengere Fassung der Grundbegriffe der analytischen Geometrie in dem oben angedeuteten Sinne erforderlich.

1. Wenn sich eine geschlossene Linie von einem beliebigen Punkte des Raumes aus durch eine sich selbst nicht schneidende, in sich zurückkehrende Kegelfläche projiciren lässt, so kann dieselbe, von diesem Punkte aus betrachtet, nach ihrer ganzen Länge in einem Drehungssinne durchlaufen werden. Ist derselbe der scheinbaren täglichen Bewegung der Erde (oder u. A. der Bewegung eines Uhrzeigers) entgegengesetzt, so soll er als positiv bezeichnet werden. Dem entsprechend wird auch, wenn die positive Richtung in der Normale einer gegebenen Ebene festgesetzt ist, für die in dieser gezeichneten Winkel und Umfänge derjenige Sinn als positiv gelten, welcher für einen Beobachter, der so auf der Ebene steht, dass die positive Normalenrichtung von seinen Füssen zum Scheitel geht, mit dem eben definirten positiven Sinne übereinstimmt. Dann ist auch umgekehrt mit dem positiven Drehungssinne in der Ebene die Richtung der positiven Normale bestimmt.

Von drei auf einander senkrechten Richtungen g, h, k ist demnach jede als positive Normale für die von den beiden anderen gebildeten Ebenen anzusehen. Daraus folgt

$$1)\qquad \hat{g h} = \hat{h k} = \hat{k g}.$$

Dies gilt insbesondere von den positiven Axenrichtungen x, y, z des rechtwinkligen Coordinatensystems, welches „von erster oder zweiter Art" heissen soll, je nachdem die gleichen Winkel $\hat{y z}$, $\hat{z x}$, $\hat{x y}$ 90^0 oder 270^0 betragen.

Für jede vom Anfangspunkte O ausgehende Richtung a sind die Cosinusse λ, μ, ν der mit den positiven Axen gebildeten Winkel eindeutig bestimmt; denn dieselben sind bezüglich von der Annahme des positiven Sinnes in den Ebenen xa, ya, za unabhängig. Bezeichnen x, y, z die Coordinaten eines Punktes A auf der Geraden a, so ist

$$2)\qquad x = \lambda\,.\,OA, \quad y = \mu\,.\,OA, \quad z = \nu\,.\,OA,$$

wenn nur das Zeichen von OA gehörig berücksichtigt wird.

Sind M, P die Projectionen von A bezüglich auf die xy-Ebene und die x-Axe, so giebt die Projection des räumlichen Vierecks $OPMA$ auf a

$$\lambda x + \mu y + \nu z = OA,$$

woraus mit Rücksicht auf 2) folgt:

$$3)\qquad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1.$$

Wird durch O noch eine zweite Richtung b gelegt, deren Richtungscosinusse λ', μ', ν' sind, so findet man durch Projection desselben Vierecks auf b

$$\lambda' x + \mu' y + \nu' z = OA \cos \hat{a b},$$

also nach 2)

$$4)\qquad \lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = \cos \hat{a b}.$$

Daraus folgt, dass auch umgekehrt durch jedes Werthsystem λ, μ, ν nur eine einzige Richtung a bestimmt wird. Denn würden deren zwei angenommen, so würden dieselben gleichwohl vermöge 3) den Winkel 0^0 einschliessen.

2. Unter dem Winkel zweier Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}'$ wird hier der Winkel ihrer positiven Normalen verstanden. Soll derselbe eindeutig bestimmt sein, so muss die positive Richtung in der Durchschnittslinie beider Ebenen gegebensein. Unter dieser Voraussetzung gilt die bekannte Formel

$$5)\qquad A'B'C' = ABC \,.\, \cos \mathfrak{E}^\wedge\mathfrak{E}',$$

worin $A'B'C'$ die Projection des in der Ebene $\mathfrak{E}$ liegenden Dreiecks ABC auf $\mathfrak{E}'$ bedeutet, auch mit Rücksicht auf die Zeichen der Dreiecksflächen (vergl. Baltzer, Elem. d. Math. II, S. 335). Um dies ganz streng nachzuweisen, betrachte man zunächst ein solches Dreieck ABC, von dessen Seiten eine, z. B. BC, mit der Durchschnittslinie der Ebene $\mathfrak{E}\mathfrak{E}'$ parallel ist (oder damit zusammenfällt). Nun lege man durch BC eine zu $\mathfrak{E}'$ parallele Ebene und bestimme ihre positive Normale so, dass die Projection von ABC auf dieselbe : $A''BC$ mit $A'B'C'$ vollkommen identisch werde. Ist dann H der gemeinsame Fusspunkt der von A und A'' auf BC gefällten Lothe, so hat man mit Einschluss des Zeichens

$$2ABC = BC \,.\, HA, \quad 2A''BC = BC \,.\, HA'',$$

wenn nur die positiven Richtungen in HA und HA'' so angenommen werden, dass sie von der positiven Richtung in BC je um den Winkel $+90^0$ abstehen. Bezeichnen wir diese Richtungen bezüglich mit h, h'', g, ferner die positiven Normalen von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ mit n und n', so ist nach 1)

$$n^\wedge h = h^\wedge g = -90^0, \quad n'^\wedge h'' = h''^\wedge g = -90^0.$$

Ferner ist, da die vier Richtungen h, h'', n, n' in derselben Ebene liegen,

$$h^\wedge h'' + h''^\wedge n' + n'^\wedge n + n^\wedge h = 0,$$

somit

$$h^\wedge h'' = n^\wedge n' = \mathfrak{E}^\wedge\mathfrak{E}'.$$

Daraus folgt

$$HA'' = HA \,.\, \cos \mathfrak{E}^\wedge\mathfrak{E}', \text{ also } A''BC = ABC \,.\, \cos \mathfrak{E}^\wedge\mathfrak{E}'.$$

Der Uebergang von diesem speciellen Falle auf den allgemeinen, in welchem die Seiten BC, CA, AB des gegebenen Dreiecks von der Durchschnittslinie von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ in endlichen Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ geschnitten werden, wird durch einen von Möbius (Leipz. Berichte 1865, S. 61) gegebenen Satz vermittelt, demzufolge

$$ABC = \mathfrak{B}A\mathfrak{C} + \mathfrak{C}B\mathfrak{A} + \mathfrak{A}C\mathfrak{B}$$

ist. Hier stehen auf der rechten Seite nur Dreiecke, deren Grundlinien in die Durchschnittslinie von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ fallen. — Auf ähnliche Weise lässt sich Gleichung 5) auf jede geradlinig begrenzte Figur verallgemeinern.

3. Es sollen nun die Richtungscosinusse l, m, n der positiven Normale für die von zwei durch den Anfangspunkt gehenden Geraden

gebildete Ebene ermittelt werden. In derselben wird die positive Richtung wieder beziehentlich mit a, b bezeichnet.

Ist A ein beliebiger Punkt auf der ersten Geraden mit den Coordinaten x, y, z; B ein solcher auf der zweiten mit den Coordinaten x', y', z', so erhalten wir für die Projection $OA'B'$ des Dreiecks OAB auf die yz-Ebene zunächst nach 5)

$$OA'B' = l . OAB;$$

ferner zufolge einer bekannten Formel

$$2 OA'B' = \varepsilon(yz' - y'z),$$

wo ε gleich $+1$ oder -1 ist, je nachdem das Coordinatensystem von erster oder zweiter Art ist. Aus diesen Gleichungen folgt mit Rücksicht auf 2) wegen

$$2 OAB = OA . OB . \sin a\hat{\ }b$$

für die gesuchte Grösse l

$$l \sin a\hat{\ }b = \varepsilon(\mu\nu' - \mu'\nu).$$

Auf ähnliche Weise findet man

$$6) \qquad m \sin a\hat{\ }b = \varepsilon(\nu\lambda' - \nu'\lambda), \quad n \sin a\hat{\ }b = \varepsilon(\lambda\mu' - \lambda'\mu).$$

Anmerkung. Bei Zugrundelegung von schiefwinkligen Raumcoordinaten treten an Stelle der vorstehenden Formeln zwei polare Systeme — entsprechend der zweifachen Art, eine Richtung eindeutig zu bestimmen, d. i. entweder durch die Cosinusse λ, μ, ν der mit den Axen x, y, z — oder die Sinusse $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ der mit den Ebenen yz, zx, xy gebildeten Winkel. (Unter den letzteren sind die Complemente der Winkel zwischen der gegebenen Richtung und den positiven Normalen auf die bezüglichen Coordinatenebenen zu verstehen.) Werden diese Grössen für die positive Normale der Ebene ab bezüglich mit l, m, n, L, M, N bezeichnet, so hat man einerseits

$$L \sin a\hat{\ }b \sin y\hat{\ }z = \mu\nu' - \mu'\nu \text{ etc.},$$

andererseits

$$l \sin a\hat{\ }b \sin \mathfrak{X} = \mathfrak{m}\mathfrak{n}' - \mathfrak{m}'\mathfrak{n} \text{ etc.}$$

Hier bedeuten $\mathfrak{X}$ etc. bezüglich die Winkel zwischen der zx- und xy-Ebene etc. Beide Systeme ergeben sich aus einer von Gauss herrührenden Formel (vergl. Baltzer, Det., § 16, 4), das erstere unmittelbar, das letztere durch polare Umformung. Dies findet sich auch für sich bei Cauchy a. a. O. S. 62. — Der folgenden Entwickelung vorgreifend, bemerken wir, dass sich auch aus den vorstehenden Gleichungen die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie ohne jede Beschränkung ableiten lassen, wenn nur einige einfache Formeln berücksichtigt werden, die sich unmittelbar aus den bekannten Relationen

$$x \sin\xi = \mathfrak{l} . OA, \quad y \sin\eta = \mathfrak{m} . OA, \quad z \sin\zeta = \mathfrak{n} . OA$$

ergeben, wo ξ, η, ζ bezüglich die Winkel zwischen yz-Ebene und x-Axe etc. bezeichnen.

4. Nun seien durch den Anfangspunkt drei Richtungen a, b, c gelegt und λ, μ, ν; λ', μ', ν'; λ'', μ'', ν'' die bezüglichen Cosinusse. Werden dann unter α, β, γ die positiven Normalen für die Ebenen bc, ca, ab verstanden und die Richtungscosinusse derselben bezüglich mit l, m, n; l', m', n'; l'', m'', n'' bezeichnet, so hat man nach 6)

$$6^*)\quad \left\{\begin{array}{ll} l' \sin c\hat{}a = \varepsilon(\mu''\nu - \mu\nu''), & l''\sin a\hat{}b = \varepsilon(\mu\nu' - \mu'\nu), \\ m'\sin c\hat{}a = \varepsilon(\nu''\lambda - \nu\lambda''), & m''\sin a\hat{}b = \varepsilon(\nu\lambda' - \nu'\lambda), \\ n'\sin c\hat{}a = \varepsilon(\lambda''\mu - \lambda\mu''), & n''\sin a\hat{}b = \varepsilon(\lambda\mu' - \lambda'\mu). \end{array}\right.$$

Nach 4) ist aber

$$\cos\beta\hat{}\gamma = l'l'' + m'm'' + n'n'';$$

also folgt durch Einsetzung der vorstehenden Ausdrücke

$$7)\quad \left\{\begin{array}{l} \cos\beta\hat{}\gamma \,.\, \sin c\hat{}a \,.\, \sin a\hat{}b = \begin{Vmatrix} \lambda'', \mu'', \nu'' \\ \lambda, \mu, \nu \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \lambda, \mu, \nu \\ \lambda', \mu', \nu' \end{Vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} \lambda''\lambda + \mu''\mu + \nu''\nu, & \lambda'\lambda'' + \mu'\mu'' + \nu'\nu'' \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2, & \lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos c\hat{}a, & \cos b\hat{}c \\ 1, & \cos a\hat{}b \end{vmatrix}, \end{array}\right.$$

wie sich aus 3) und 4) sofort ergiebt.

Auf ähnliche Art werden die Formeln

$$\cos\gamma\hat{}\alpha \,.\, \sin a\hat{}b \,.\, \sin b\hat{}c = \begin{vmatrix} \cos a\hat{}b, & \cos c\hat{}a \\ 1, & \cos b\hat{}c \end{vmatrix},$$

$$\cos\alpha\hat{}\beta \,.\, \sin b\hat{}c \,.\, \sin c\hat{}a = \begin{vmatrix} \cos b\hat{}c, & \cos a\hat{}b \\ 1, & \cos c\hat{}a \end{vmatrix}$$

gefunden.

Die in diesen Formeln auftretenden Determinanten sind adjungirte Elemente des Schemas

$$\begin{vmatrix} 1, & \cos a\hat{}b, & \cos c\hat{}a \\ \cos a\hat{}b, & 1, & \cos b\hat{}c \\ \cos c\hat{}a, & \cos b\hat{}c, & 1 \end{vmatrix} = P.$$

Bezeichnen wir dieselben allgemein mit $p_{r,s}$, so stellt sich das Quadrat von 7) in folgender Art dar:

$$p_{22}\, p_{33} \cos\beta\hat{}\gamma^2 = p^2_{23}.$$

Daraus folgt

$$p_{22}\, p_{33} \sin\beta\hat{}\gamma^2 = p_{22}\, p_{33} - p^2_{23} = P,$$

also

$$8)\quad \sin c\hat{}a \sin a\hat{}b \sin\beta\hat{}\gamma = \sigma\sqrt{P},$$

wo σ entweder $+1$ oder -1 sein kann. $\sqrt{P}$ soll durchweg als absolut positiv betrachtet werden.

5. Da der Winkel $\beta\hat{}\gamma$ eindeutig definirt ist, so kann σ in jedem bestimmten Falle nur einen der Werthe $+1$ und -1 erhalten. Hierüber lässt sich eine Regel aufstellen, zu der man am schnellsten auf folgende Art gelangt:

Denkt man sich eine Ebene gelegt, welche die Geraden a, b, c bezüglich in den Punkten A, B, C schneidet, so entsteht ein Tetraeder, dessen Volum

$$3\, COAB = OAB \,.\, HC.$$

Hier bezeichnet H den Fusspunkt der von C auf OAB gefällten Normale. Werden OAB und HC mit den Zeichen genommen, die denselben nach Festsetzung des positiven Sinnes in der Ebene OAB zukommen, so entspricht der vorstehende Ausdruck genau der von Möbius (Statik I, S. 101) aufgestellten Regel, wonach $COAB$ als positiv oder negativ zu betrachten ist, je nachdem dem in C befindlichen Auge der Sinn OAB positiv oder negativ erscheint. Nun ist aber

$$2\,OAB = OA\,.\,OB \sin a\hat{}b, \quad HC = OC \cos c\hat{}\gamma,$$

also

$$6\,COAB = -6\,OABC = OA\,.\,OB\,.\,OC \sin a\hat{}b \cos c\hat{}\gamma. \tag{9}$$

$\cos c\hat{}\gamma$ ergiebt sich mittels Gleichung 7). Setzt man nämlich an Stelle der Richtung b die Richtung γ und demgemäss an Stelle von γ die positive Normale c_1 der Ebene $a\gamma$, so folgt aus der erwähnten Formel wegen $\cos a\gamma = 0$

$$\sin c\hat{}a \sin a\hat{}\gamma \cos \beta\hat{}c_1 = -\cos c\hat{}\gamma.$$

Da c_1 in der Ebene $\beta\gamma$ liegt, so ist

$$\beta\hat{}c_1 + c_1\hat{}\gamma + \gamma\hat{}\beta = 0;$$

ferner hat man nach 1)

$$a\hat{}\gamma = \gamma\hat{}c_1 \; (= \pm 90),$$

also

$$\cos \beta\hat{}c_1 = \cos(a\hat{}\gamma + \beta\hat{}\gamma) = -\sin a\hat{}\gamma \sin \beta\hat{}\gamma,$$

und schliesslich wegen $\sin a\hat{}\gamma^2 = 1$

$$\sin c\hat{}a \sin \beta\hat{}\gamma = \cos c\hat{}\gamma.$$

Wird dieser Werth für $\cos c\hat{}\gamma$ in 9) eingesetzt, so folgt

$$6\,OABC = -\,OA\,.\,OB\,.\,OC \sin c\hat{}a \sin a\hat{}b \sin \beta\hat{}\gamma. \tag{10}$$

Werden die Punkte A, B, C bezüglich auf den Richtungen a, b, c selbst angenommen, so dass die Strecken OA, OB, OC als positive Grössen zu betrachten sind, so ist das Zeichen des Ausdrucks $\sin c\hat{}a$, $\sin a\hat{}b$, $\sin \beta\hat{}\gamma$ dem des Tetraedervolumens $OABC$ entgegengesetzt. Daraus ergiebt sich folgende Regel zur Bestimmung von σ in 8): Diese Grösse ist gleich $+1$ oder -1, je nachdem der Umlauf ABC, wozu die Punkte A, B, C beziehentlich auf den Richtungen a, b, c selbst anzunehmen sind, längs der Seiten dieses Dreiecks ausgeführt, für den Punkt O im positiven oder negativen Sinne vor sich geht.

Die Grösse $-\sin a\hat{}b \cos c\hat{}\gamma$ wird nach v. Staudt (Crelle J. 24, S. 255) als Sinus der Ecke a, b, c, d. h. mit $\sin abc$ bezeichnet. Demnach ist

$$\sin abc = -\sin a\hat{}b \cos c\hat{}\gamma = -\sin c\hat{}a \sin a\hat{}b \sin \beta\hat{}\gamma = \sigma \sqrt{P}. \tag{11}$$

Man findet ferner mit Rücksicht auf 4) und 6*)

$$\sin abc = -\sin a\hat{}b \cos c\hat{}\gamma = -(l''\lambda'' + m''\mu'' + n''\nu''),$$

also

$$\sin abc = -\varepsilon \begin{vmatrix} \lambda, & \mu, & \nu \\ \lambda', & \mu', & \nu' \\ \lambda'', & \mu'', & \nu'' \end{vmatrix}.$$

Diese Formel, welche zuerst bei Gauss, *Disq. cca. superf. curv. II*, 7, vorkommt (vergl. auch Cauchy a. a. O. S. 31), führt unmittelbar von Gleichung 10) auf den bekannten Ausdruck des Tetraedervolums durch die Coordinaten seiner Eckpunkte.

Endlich folgt aus der Bedeutung von σ [11)]

$$\sin bac = -\sin abc \text{ etc.}$$

6. Wird um den Punkt O eine Kugelfläche mit dem Radius 1 beschrieben, welche von den Richtungen a, b, c bezüglich in den Punkten A, B, C getroffen wird, so entsteht ein sphärisches Dreieck ABC, auf welches die Formeln 7) und 8) unmittelbar übertragen werden können. Dabei treten an Stelle von $b^\wedge c$, $c^\wedge a$, $a^\wedge b$ die Seiten BC, CA, AB dieses sphärischen Dreiecks, jede von dem zuerst stehenden Eckpunkte ab gerechnet, in der positiven Richtung des bezüglichen Hauptkreises. Werden diese Richtungen mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ bezeichnet, so findet man ferner die $\beta^\wedge\gamma$, $\gamma^\wedge\alpha$, $\alpha^\wedge\beta$ bezüglich gleich den sphärischen Winkeln $\mathfrak{b}^\wedge\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}^\wedge\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}^\wedge\mathfrak{b}$, wenn dieselben an der Aussenseite der Kugelfläche im positiven Drehungssinne abgelesen werden. Dies erkennt man leicht aus der Figur; z. B. bestimmt man in den Ebenen ca, ab beziehentlich die Richtungen b', c' so, dass $a^\wedge c' = a^\wedge b = 90^0$, so findet man durch einen bereits in Nr. 2 angewandten Schluss, dass $\beta^\wedge\gamma = b'^\wedge c'$, welcher Winkel mit dem eben definirten $\mathfrak{b}^\wedge\mathfrak{c}$ vollständig übereinstimmt.

Mit Rücksicht auf diese Definitionen der Seiten und Winkel des sphärischen Dreiecks lässt sich das Zeichen des in 8) vorkommenden Ausdrucks $\sin CA \sin AB \sin \mathfrak{b}^\wedge\mathfrak{c}$ auch unmittelbar bestimmen. Man bemerkt zunächst, dass derselbe seinen Werth nicht ändert, wenn die positive Richtung in einem der Hauptkreise in die entgegengesetzte verwandelt wird. Tritt z. B. an Stelle von $\mathfrak{b}$ die entgegengesetzte Richtung $\mathfrak{b}'$, so wechselt CA sein Zeichen; allein zugleich kommt $b'^\wedge c = b'^\wedge b + \mathfrak{b}^\wedge\mathfrak{c} = 180 + \mathfrak{b}^\wedge\mathfrak{c}$ anstatt $b^\wedge\mathfrak{c}$, so dass im Ganzen der Ausdruck ungeändert bleibt. Daraus folgt, dass man, ohne denselben zu ändern, die positiven Richtungen der Hauptkreise so annehmen kann, dass die BC, CA, AB 180^0 nicht übersteigen. Dann stimmt aber sein Zeichen mit dem von $\sin \mathfrak{b}^\wedge\mathfrak{c}$ überein und man erkennt aus der Figur, dass dasselbe $+$ oder $-$ sei, je nachdem der Umlauf ABC, der zwischen diesen Punkten in der vorgeschrieben Ordnung so auszuführen ist, dass die beschriebenen Bogen AB, BC, CA 180^0 nicht überschreiten, für einen die Kugelfläche von aussen betrachtenden Beobachter im positiven oder negativen Sinne erfolgt. Dies Resultat ist vollständig mit dem identisch, welches in der vorigen Nummer erhalten wurde.

Aus der vollständigen Symmetrie der rechten Seite der Gleichung 8) in Beziehung auf die Seiten und Eckpunkte des sphärischen Dreiecks ABC folgt, dass auch die Ausdrücke $\sin AB \sin BC \sin \mathfrak{c}^\wedge\mathfrak{a}$ und $\sin BC \sin CA \sin \mathfrak{a}^\wedge\mathfrak{b}$ denselben Werth besitzen müssen, wie $\sin CA \sin AB \sin \mathfrak{b}^\wedge\mathfrak{c}$. Es ist also

$$12)\qquad \frac{\sin \mathfrak{b}^\wedge\mathfrak{c}}{\sin BC} = \frac{\sin \mathfrak{c}^\wedge\mathfrak{a}}{\sin CA} = \frac{\sin \mathfrak{a}^\wedge\mathfrak{b}}{\sin AB} = \frac{\sigma\sqrt{P}}{\sin AC \sin CA \sin AB}.$$

Daraus folgt umgekehrt, dass die Grössen σ und $\sin\mathfrak{b}^\wedge\mathfrak{c}\,\sin\mathfrak{c}^\wedge\mathfrak{a}\,\sin\mathfrak{a}^\wedge\mathfrak{b}$ gleichbezeichnet sind, so dass also der oben definirte Sinn ABC mit dem Vorzeichen von $\sin\mathfrak{b}^\wedge\mathfrak{c}\,\sin\mathfrak{c}^\wedge\mathfrak{a}\,\sin\mathfrak{a}^\wedge\mathfrak{b}$ übereinstimmt.

Die Gleichungen 12) in Verbindung mit 7), die in den geänderten Bezeichnungen so lauten:

$$13)\quad \left\{\begin{aligned} \sin CA \sin AB \cos\mathfrak{b}^\wedge\mathfrak{c} &= \cos CA \cos AB - \cos BC,\\ \sin AB \sin BC \cos\mathfrak{c}^\wedge\mathfrak{a} &= \cos AB \cos BC - \cos CA,\\ \sin BC \sin CA \cos\mathfrak{a}^\wedge\mathfrak{b} &= \cos BC \cos CA - \cos AB, \end{aligned}\right.$$

sind die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie, aus denen sich bekanntlich die übrigen durch algebraische (und zwar meist eindeutige) Operationen ableiten lassen. Z. B. eliminirt man aus 13) $\cos AB$, ersetzt in den beiden so erhaltenen Gleichungen die $\sin BC$ etc. vermittelst 12) bezüglich durch $\sin \mathfrak{b}^\wedge\mathfrak{c}$ etc., so ergiebt sich die Relation

$$14)\qquad \sin\mathfrak{c}^\wedge\mathfrak{a}\,\sin\mathfrak{a}^\wedge\mathfrak{b}\,\cos BC = \cos\mathfrak{c}^\wedge\mathfrak{a}\,\cos\mathfrak{a}^\wedge\mathfrak{b} - \cos\mathfrak{b}^\wedge\mathfrak{c},$$

der sich ähnliche für $\cos CA$ und $\cos AB$ anschliessen. Bei den hier angewandten Definitionen der Stücke eines sphärischen Dreiecks tritt also die Polarität der Formeln in Beziehung auf Seiten und Winkel ganz ungetrübt hervor.

Aus 14) folgt in derselben Weise wie aus 7) die Gleichung 8):

$$15)\qquad \sin\mathfrak{c}^\wedge\mathfrak{a}\,\sin\mathfrak{a}^\wedge\mathfrak{b}\,\sin BC = \tau\sqrt{\Pi},$$

wo unter Π die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1, & \cos\mathfrak{a}^\wedge\mathfrak{b}, & \cos\mathfrak{c}^\wedge\mathfrak{a}\\ \cos\mathfrak{a}^\wedge\mathfrak{b}, & 1, & \cos\mathfrak{b}^\wedge\mathfrak{c}\\ \cos\mathfrak{c}^\wedge\mathfrak{a}, & \cos\mathfrak{b}^\wedge\mathfrak{c}, & 1 \end{vmatrix}$$

zu verstehen ist. Der Werth von τ ergiebt sich unmittelbar aus 12). Es ist

$$16)\qquad \begin{aligned} &(\sin AB \sin BC \sin\mathfrak{c}^\wedge\mathfrak{a}) \,.\, (\sin BC \sin CA \sin\mathfrak{a}^\wedge\mathfrak{b})\\ &= (\sin BC \sin CA \sin AB) \,.\, (\sin\mathfrak{c}^\wedge\mathfrak{a}\,\sin\mathfrak{a}^\wedge\mathfrak{b}\,\sin BC) = P. \end{aligned}$$

Da P wesentlich positiv ist, so sieht man, dass τ gleich $+1$ oder -1 ist, je nachdem $\sin BC \sin CA \sin AB$ positiv oder negativ ist.

Aus 15) und 16) folgt ferner

$$\sin BC^2 . \sin CA^2 . \sin AB^2 . \Pi = P^2,$$

und in ähnlicher Art aus 12) und 15)

$$\sin\mathfrak{b}^\wedge\mathfrak{c}^2\,\sin\mathfrak{c}^\wedge\mathfrak{a}^2\,\sin\mathfrak{a}^\wedge\mathfrak{b}^2 . P = \Pi^2$$

(vergl. Junghann, Grunert Archiv 34, S. 374). Diese beiden Formeln lassen sich auch unmittelbar aus 13) und 15) ableiten. Versteht man unter $p_{r,s}$ wie in Nr. 4 die adjungirten Elemente des Schemas P, so ist offenbar

$$\sin BC^2 \sin CA^2 \sin AB^2 . \Pi = \Sigma \pm p_{11}\, p_{22}\, p_{33} = P^2.$$

Die Formeln 14) und 15) erhält man auch, wenn man 12) und 13) auf das Polardreieck von ABC anwendet, welches von den positiven Polen A', B', C' der Hauptkreise BC, CA, AB, d. i. den Endpunkten der Richtungen α, β, γ gebildet wird. (Nach Gauss, *Theor. mot.*, S. 151, liegt der positive Pol eines Hauptkreises zur Linken eines nach der positiven Rich-

tung desselben auf der Aussenseite der Kugelfläche fortschreitenden, was mit dem Vorstehenden übereinstimmt.) Werden die positiven Richtungen der Hauptkreise $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ bezüglich mit $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ bezeichnet, so ist, wie oben

$$B'C' = \beta^\wedge\gamma = \mathfrak{b}^\wedge\mathfrak{c} \text{ etc.};$$

ferner, da a, b, c bezüglich die positiven Normalen für die Ebenen $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ darstellen:

$$\mathfrak{b}'^\wedge\mathfrak{c}' = \mathfrak{b}^\wedge\mathfrak{c} = BC \text{ etc.}$$

Somit folgt durch Anwendung der Gleichung 12) auf das Dreieck $A'B'C'$

$$17) \qquad \sin\mathfrak{c}^\wedge\mathfrak{a} \sin\mathfrak{a}^\wedge\mathfrak{b} \sin BC = \sigma' \sqrt{\Pi},$$

wo σ' gleich $+1$ oder -1 ist, je nachdem der Sinn $A'B'C'$ für den Beobachter von aussen (s. o.) positiv oder negativ ist. Zufolge der oben gemachten Bemerkung muss derselbe mit dem Vorzeichen von

$$\sin\mathfrak{b}'^\wedge\mathfrak{c}' \sin\mathfrak{c}'^\wedge\mathfrak{a}' \sin\mathfrak{a}'^\wedge\mathfrak{b}',$$

d. i.

$$\sin BC \sin CA \sin AB,$$

übereinstimmen, so dass die vorstehende Formel im vollen Einklange mit 15) steht.

7. Gewöhnlich wird in den Hauptkreisen, die das sphärische Dreieck bilden, ein positiver Sinn nicht unterschieden, sondern die Seiten desselben absolut genommen, indem je einer von den je zwei Eckpunkte verbindenden Bogen als Dreiecksseite erklärt wird. Um auch unter dieser Voraussetzung allgemein giltige Formeln zu erhalten, müssen die sphärischen Winkel gemäss der von Möbius (a. a. O. Nr. 15) gegebenen Regel genommen werden: „Man durchgehe auf der äussern Seite der Kugelfläche den Umfang des Dreiecks nach dem Sinne ABC und bezeichne die Seiten der Bogen AB, BC, CA, welche auf diesem Wege zur Linken (Rechten) liegen. Dann bilden sowohl diejenigen Winkel, welche die bezeichneten Schenkel enthalten, als auch die, welche sie nicht enthalten, ein zusammengehöriges System.“ Indem diese beiden Systeme nicht wesentlich von einander verschieden sind, vielmehr die Winkel des ersteren bei der zweiten Art der Bezeichnung als solche des zweiten auftreten, so können wir uns auf die Betrachtung des ersteren beschränken. Bezeichnen wir die Winkel desselben mit A, B, C und die denselben gegenüberliegenden Seiten bezüglich mit a, b, c, so können wir nach passender Festsetzung der positiven Richtungen der Hauptkreise setzen:

$$BC = a, \qquad CA = b, \qquad AB = c,$$

$$\mathfrak{b}^\wedge\mathfrak{c} = 180 \mp A, \quad \mathfrak{c}^\wedge\mathfrak{a} = 180 \mp B, \quad \mathfrak{a}^\wedge\mathfrak{b} = 180 \mp C,$$

wo sich das doppelte Zeichen auf die zweifache Art der Markirung der Seiten bezieht. Demgemäss folgt aus 12) und 13):

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}=\frac{\pm\sigma\sqrt{P}}{\sin a\sin b\sin c},$$
$$\sin b\sin c\cos A=\cos a-\cos b\cos c\ \text{ etc.}$$

8. Sind von den sechs Stücken a, b, c; A, B, C, deren jedes alle Werthe zwischen 0^0 und 360^0 annehmen kann, drei beliebige gegeben, so erhält man, wie schon Möbius im Eingange der öfters erwähnten Abhandlung bemerkt, für die drei übrigen **in jedem Falle zwei** Systeme zusammengehöriger Werthe. Wird nur eindeutige Bestimmung derselben verlangt, so kann das in der Mehrzahl der Fälle dadurch erreicht werden, dass eines der gesuchten Stücke auf eine halbe Peripherie beschränkt wird. Dies kommt darauf hinaus, entweder den Sinn ABC so, wie derselbe in Nr. 6 definirt wurde, oder der ihm zugeordneten polaren $A'B'C'$ von vornherein vorzuschreiben. Um diese Bemerkung etwas genauer auszuführen, sollen jedoch wieder die Definitionen und Formeln von Nr. 6 gebraucht werden. Der Kürze wegen werden von hier ab unter a, b, c; A, B, C bezüglich die Grössen BC, CA, AB; $\mathfrak{b}^\wedge\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}^\wedge\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}^\wedge\mathfrak{b}$ verstanden.

Die Auflösung der sphärischen Dreiecke umfasst sechs verschiedene Aufgaben, je nachdem die Stücke

1) a, b, c, 2) A, b, c, 3) B, b, c,
4) b, B, C, 5) a, B, C, 6) A, B, C

gegeben sind.

Man erkennt sofort, dass im ersten und fünften Falle auch der Sinn $A'B'C'$ des zugeordneten Polardreiecks gegeben ist; denn er ergiebt sich im letzteren unmittelbar aus 17), im ersteren unmittelbar aus der Bemerkung, dass er mit dem Vorzeichen von $\sin a\sin b\sin c$ übereinstimmen müsse. Dagegen ist für die bezüglichen Dreiecke der Sinn ABC entgegengesetzt, wie man aus 12) entnimmt.

Auf ähnliche Weise wird gefunden, dass im zweiten und sechsten Falle der Sinn ABC für die beiden Dreiecke, die den gestellten Anforderungen Genüge leisten, bereits aus den gegebenen Stücken bestimmt sei, sowie, dass dieselben sich durch den Sinn der zugeordneten Polardreiecke unterscheiden.

Ganz anders stellen sich der dritte und vierte Fall. Zunächst stehen hier die Sinne ABC und $A'B'C'$ in gegenseitiger Abhängigkeit, welche dadurch ausgedrückt ist, dass der Werth von $\dfrac{\sin A\sin B\sin C}{\sin a\sin b\sin c}$ gegeben ist. Dieser Quotient ist nämlich gleich $\left(\dfrac{\sin B}{\sin b}\right)^3$. — Wenn wir auf den dritten Fall etwas näher eingehen, so bieten sich zunächst aus der Gleichung

18) $$\sin C\sin b=\sin c\sin B$$

die beiden Werthe von C dar, die sich also zu 180^0 ergänzen. Aus der zwei-

ten und dritten der Gleichungen 13) ergeben sich dann $\sin a$ und $\cos a$, und zwar erhält man für die erstere Grösse

$$\sin a = \frac{\cos b^2 - \cos c^2}{-\sin c \cos b \cos B + \sin b \cos c \cos C}.$$

Entsprechend den beiden Werthen von $\cos C$, die einander entgegengesetzt gleich sind, werden also auch zwei Werthe von a: a' und a'' gefunden. Um zu entscheiden, ob $\sin a'$ und $\sin a''$ gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen tragen, bilde man ihr Product

$$\sin a' \sin a'' = \frac{(\cos b^2 - \cos c^2)^2}{\sin c^2 \cos b^2 \cos B^2 - \sin b^2 \cos c^2 \cos C^2}.$$

Mit Rücksicht auf 18) lässt sich der Nenner dieses Bruches ohne Mühe transformiren in

$$(\sin c^2 - \sin b^2)(1 - \sin c^2 \sin B^2),$$

so dass

$$\sin a' \sin a'' = \frac{\sin c^2 - \sin b^2}{1 - \sin c^2 \sin B^2}$$

wird. — Man hat also zu unterscheiden:

a) Ist $\sin c^2 > \sin b^2 > \sin c^2 \sin B^2$ [der zweite Theil dieser Ungleichung folgt unmittelbar aus 18)], so sind $\sin a'$ und $\sin a''$ gleichbezeichnet; mithin ist für die beiden hierher gehörigen Dreiecke der Sinn ABC gleichartig. Nach dem oben Bemerkten gilt dasselbe von dem polar zugeordneten Sinne $A'B'C'$. — Die beiden Dreiecke können nur dadurch getrennt werden, dass C auf einen Quadranten beschränkt wird.

b) Ist $\sin c^2 < \sin b^2$, so sind $\sin a'$ und $\sin a''$ ungleichbezeichnet, folglich der Sinn ABC, sowie auch der polare $A'B'C'$ in den beiden in Rede stehenden Dreiecken entgegengesetzt.

Aehnlich gestaltet sich die Sache im vierten Falle, wo es darauf ankommt, ob $\sin C^2 > \sin B^2 > \sin C^2 \sin b^2$ oder $\sin C^2 < \sin B^2$ ist.

Berlin, 4. Juni 1870. Dr. O. Stolz.

VIII. Zum Gebrauche der Zahlentafeln.

Die irrationalen Zahlenwerthe werden, auf eine bestimmte Anzahl von Decimalstellen gekürzt, so in Tafeln gebracht, dass der Fehler wegen der vernachlässigten Decimalstellen am kleinsten wird, also kleiner als $\frac{1}{2}$ Einheit der letzten Stelle oder, wenn man (wie es jetzt häufig geschieht) die Erhöhung der letzten Stelle bezeichnet, kleiner als $\frac{1}{4}$ Einheit. Es ist nun interessant, zu sehen, dass auch der Fehler der interpolirten Zahlen, wenn man die in der Tafel enthaltenen als Glieder einer arithmetischen Reihe erster Ordnung voraussetzt, diese Grösse nicht übersteigt.

Es seien l, l' die mittleren Zahlenwerthe einer Function für die Argumente n und $n+1$, welche unmittelbar in der Tafel enthalten sind, $l+w$, $l'+w'$ die wahren Werthe. λ sei der wahre Zahlenwerth der Function für das Argument $n+d$, wo d ein echter Bruch ist. Dann ist $l'-l$ die mittlere und $l'+w'-(l+w)=l'-l+w'-w$ die wahre Differenz, also

$$\lambda=l+w+(l'-l+w'-w)\,d$$

oder

$$\lambda=l+(l'-l)\,d+(1-d)\,w+dw'.$$

Nun ist $l+(l'-l)\,d$ der mittlere interpolirte Werth der Function für das Argument $n+d$, also

$$F=(1-d)\,w+dw'$$

der Fehler des mittleren Werthes. Da nun $1-d+d=1$ ist, so ist der Fehler im Allgemeinen absolut kleiner als der grössere der Fehler w oder w'.

Wird die Erhöhung der letzten Decimale in den Tafelwerthen nicht angegeben, so ist der grösste Werth von w oder $w'=\frac{1}{2}$ Einheit der letzten Stelle. Damit der Fehler der interpolirten Zahl diese Grenze nicht übersteigt, ist es nöthig, die aus $(l'-l)\,d$ erhaltenen späteren Decimalstellen beizubehalten. Wird die Erhöhung der letzten Decimale angezeigt, so ist der Fehler kleiner als $\frac{1}{4}$ Einheit der letzten Stelle; das Beibehalten der aus $(l'-l)\,d$ erhaltenen späteren Decimalstellen macht dann keine wesentliche Mehrarbeit.

J. Frischauf.

Berichtigung

zu dem Aufsatze: „Vier combinatorische Probleme",

Jahrg. 1870, S. 361 flgg. dieser Zeitschrift.

Da ich zu der Zeit, als der citirte Aufsatz erschien, im Felde stand und deshalb nicht in der Lage war, die Correcturbogen durchzusehen, so finden sich in dem Aufsatze eine Anzahl Druckfehler und Unrichtigkeiten, welche der nachstehenden Berichtigung bedürfen:

S. 362 Z. 17 von unten, im Nenner, statt $\alpha_n!$ lies: $a_n!$.
„ 364 „ 8 und 9 von oben ist das Wort „man" deplacirt.
ibid. „ 13 v. o. statt $n=2$ lies: $a=2$.
„ „ 1 v. u. „ 1 lies: I.
S. 366 „ 5 v. o. „ 145 lies: 45.
„ 368 „ 7 und 8 v. o. statt Forderung III lies: Forderung 3).
ibid. „ 9 v. o. statt zu weit lies: zu zweit.

S. 368	Z. 17 v. u.	statt	Gruppe lies: Gruppen.
„ 371	„ 1 v. o.	„	k lies: $\varkappa$.
„ 373	„ 14 v. u.	„	$-0,28153\ldots$ lies: $-0,27846\ldots$.
ibid.	„ 9 v. u.	„	den stumpfen Winkel $2\,arctg\sqrt{2}$ lies: einen rechten Winkel.
S. 374	„ 6 v. u.	„	$2n(2n+2)$ lies: $2n(2n+3)$.
„ 375	„ 5 v. o., im Exponenten,	statt	$n+e$ lies: $n+c$.
ibid.	„ 10 v. o.	statt	24 lies: 25.
ibid.	„ 13 v. o.	„	0,96414... lies: 0,82436....

Baden-Baden, im December 1870. E. Schröder.

VII.

Zur Theorie der quadratischen Formen.

Von

Dr. P. Bachmann,

Professor an der Universität Breslau.

Die folgenden Seiten haben zum Zwecke, die elementaren arithmetischen Eigenschaften der quadratischen Formen möglichst einfach und ohne andere, als rein arithmetische Hilfsmittel zu entwickeln. Dies geschieht dadurch, dass man nicht, wie Gauss gethan hat, die algebraische Transformation derselben, sondern die Darstellung einer Zahl durch eine quadratische Form zum Ausgangspunkte wählt. Die Transformation ergiebt sich so selbst als Corollar arithmetischer Sätze über quadratische Formen. — Um bei den wesentlichen Punkten ausführlicher sein zu können, gehe ich über einige andere Punkte kurz hinweg und beschränke mich auf die einfachsten Voraussetzungen.

§ 1. Unter einer quadratischen Form verstehe ich jeden Ausdruck $ax^2 + 2bxy + cy^2$, in welchem a, b, c ganze, a, $2b$, c relativ prime, x, y unbestimmte ganze Zahlen sind. Zur Abkürzung bediene ich mich dafür des Zeichens (a, b, c).

Das Hauptproblem der Lehre von den quadratischen Formen, welches auch diese ganze Theorie hervorgerufen hat, besteht in der Darstellung einer gegebenen Zahl durch eine gegebene quadratische Form (a, b, c), oder in der Aufgabe, die unbestimmte Gleichung $ax^2 + 2bxy + cy^2 = m$ durch ganze Zahlen x, y aufzulösen. Wir fügen hier sogleich die Einschränkung hinzu, dass die letzteren relativ prim sein sollen, weil auf diesen Fall der andere, wo sie einen gemeinschaftlichen Theiler hätten, leicht zurückführbar ist. Setzen wir die Zahl $b^2 - ac = D$, welche die Determinante der Form genannt wird, von einem positiven Quadrate, also a und c von Null verschieden voraus, so ist die zu lösende unbestimmte Gleichung mit jeder der beiden folgenden:

$$1)\qquad \begin{cases} (ax+by)^2 - Dy^2 = am, \\ (bx+cy)^2 - Dx^2 = cm, \end{cases}$$

völlig gleichbedeutend.

Da man sich leicht überzeugen kann, dass durch jede Form (a, b, c) stets Zahlen darstellbar sind*, welche zu irgend einer Zahl relativ prim sind, so setzen wir grösserer Einfachheit wegen m als eine ungerade und zur Determinante D relativ prime Zahl voraus.

Aus den Gleichungen 1) folgt, dass nicht jede solche Zahl m durch eine quadratische Form mit der gegebenen Determinante dargestellt werden kann, sondern dass für eine solche die beiden Congruenzen

$$(ax+by)^2 \equiv Dy^2, \quad (bx+cy)^2 \equiv Dx^2 \pmod m$$

möglich sein müssen. Da nun durch eine beliebige, in m enthaltene Primzahl entweder x oder y nicht theilbar sein darf, folgt leicht die nothwendige Bedingung, dass D quadratischer Rest $(\mathrm{mod}\, m)$ sein muss.

Bezeichnet man daher, unter der Voraussetzung, dass diese Bedingung erfüllt ist, jede Wurzel der Congruenz

$$2)\qquad z^2 \equiv D \pmod m$$

mit n, so müssen, damit m durch die gegebene quadratische Form dargestellt wird, etwa, indem $x=\alpha$, $y=\gamma$ gesetzt wird, für jede Wurzel n die Congruenzen

$$\begin{aligned} 3)\qquad & (a\alpha+b\gamma)^2 \equiv n^2\gamma^2 \\ 4)\qquad & (b\alpha+c\gamma)^2 \equiv n^2\alpha^2 \end{aligned} \pmod{m}$$

erfüllt werden. Sei p eine in m enthaltene Primzahl, p^π die höchste Potenz derselben, welche m theilt, so kann nur eine der beiden Zahlen α, γ durch p theilbar sein. Angenommen, γ sei durch p nicht theilbar, so muss

$$(a\alpha+b\gamma+n\gamma)(a\alpha+b\gamma-n\gamma) \equiv 0 \pmod{p^\pi}$$

sein, wenn n irgend eine der beiden Wurzeln bedeutet, welche die Congruenz $z^2 \equiv D \pmod{p^\pi}$ erfüllen. Daher wird, wenn nun unter n eine ganz bestimmte dieser beiden Wurzeln verstanden wird, sein müssen:

$$a\alpha+b\gamma+n\gamma \equiv 0 \pmod p.$$

Da nun offenbar nach der über γ gemachten Annahme nicht zugleich

$$a\alpha+b\gamma-n\gamma \equiv 0 \pmod p$$

sein kann, da sonst n, also auch D den Factor p mit m gemeinsam hätte, so muss

$$5)\qquad a\alpha+b\gamma+n\gamma \equiv 0 \pmod{p^\pi}$$

sein. Für denselben Modul folgt aber aus der Gleichung

$$a\alpha^2+2b\alpha\gamma+c\gamma^2 = (a\alpha+b\gamma)\alpha+(b\alpha+c\gamma)\gamma = m:$$
$$\gamma(b\alpha+c\gamma) \equiv -\alpha(a\alpha+b\gamma),$$

also

$$6)\qquad b\alpha+c\gamma-n\alpha \equiv 0 \pmod{p^\pi}.$$

---

* S. darüber Dirichlet's Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgeg. von Dedekind (1. Aufl.), § 93.

Bezeichnet man daher mit β, δ irgend zwei ganze Zahlen, die der Gleichung $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ Genüge leisten, so wird in Bezug auf jeden $(mod p^{\pi})$, welcher in m enthalten, aber gegen γ prim ist, die Congruenz stattfinden müssen:

$$7)\qquad (a\alpha+b\gamma)\beta+(b\alpha+c\gamma)\delta\equiv n \ (mod.\, p^{\pi}).$$

Ist γ theilbar, also α nicht theilbar durch p, so braucht man nur von der Congruenz 4) auszugehen, um zu denselben Congruenzen 5), 6), 7) geführt zu werden. Daraus folgt aber leicht, dass diese Congruenzen auch stattfinden müssen $(mod\, m)$, wenn unter n eine ganz bestimmte Wurzel der Congruenz 2) verstanden wird; man wird also haben:

$$8)\qquad \left.\begin{array}{c} a\alpha+b\gamma+n\gamma\equiv 0 \\ b\alpha+c\gamma-n\alpha\equiv 0 \\ (a\alpha+b\gamma)\beta+(b\alpha+c\gamma)\delta\equiv n \end{array}\right\} (mod\, m).$$

Durch passende Wahl von β, δ geht die letzte dieser Congruenzen in eine Gleichung über; denn aus einem bestimmten Systeme β, δ, welches der Gleichung $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ genügt, erhält man alle durch die Formeln $\beta+\alpha h$, $\delta+\gamma h$, worin h eine beliebige ganze Zahl ist; also wird der allgemeine Werth des Ausdrucks $(a\alpha+b\gamma)\beta+(b\alpha+c\gamma)\delta$ gleich

$$(a\alpha+b\gamma)\beta+(b\alpha+c\gamma)\delta+h[(a\alpha+b\gamma)\alpha+(b\alpha+c\gamma)\gamma]$$
$$=(a\alpha+b\gamma)\beta+(b\alpha+c\gamma)\delta+h\,.\,m,$$

und man kann nun die Unbestimmte h so wählen, dass die obige Congruenz in eine Gleichung übergeht. Dann bestehen die beiden Gleichungen

$$9)\qquad \left\{\begin{array}{l} (a\alpha+b\gamma)\alpha+(b\alpha+c\gamma)\gamma=m, \\ (a\alpha+b\gamma)\beta+(b\alpha+c\gamma)\delta=n, \end{array}\right.$$

folglich

$$10)\qquad a\alpha+b\gamma=m\delta-n\gamma,\quad b\alpha+c\gamma=-m\beta+n\alpha.$$

Diese Betrachtungen lehren: d a s s j e d e m ö g l i c h e D a r s t e l l u n g d e r Z a h l m d u r c h d i e g e g e b e n e q u a d r a t i s c h e F o r m z u e i n e r b e s t i m m t e n W u r z e l n d e r C o n g r u e n z 2) g e h ö r t, und man kann also alle Darstellungen von m durch die nämliche Form in Gruppen theilen, indem man zwei Darstellungen in dieselbe Gruppe nimmt oder nicht, je nachdem sie zu derselben Wurzel gehören oder nicht.

Ich bemerke noch, dass, wenn γ und m einen grössten gemeinsamen Theiler d haben, dieser auch in a aufgehen muss; alsdann bestimmt die erste der Congruenzen 8) oder die gleichbedeutende

$$\frac{a\alpha+b\gamma}{d}\equiv -n\,.\,\frac{\gamma}{d}\left(mod\,\frac{m}{d}\right)$$

den Rest der Wurzel n in Bezug auf jeden Divisor von $\frac{m}{d}$ unzweideutig; um ihn auch in Bezug auf die Factoren von d zu bestimmen, dient die sich aus der zweiten jener Congruenzen ergebende Congruenz:

$$n\equiv b\ (mod\, d).$$

Die Zahl a selber kann durch (a, b, c) dargestellt werden, indem man $x=1$, $y=0$ setzt. Da letztere Zahl durch a theilbar ist, muss die Wurzel, zu welcher diese Darstellung gehört, nach dem eben Bemerkten bestimmt werden, und ergiebt sich gleich b.

§ 2. Betrachten wir jetzt, wenn es deren giebt, zwei verschiedene, derselben Darstellungsgruppe angehörige Darstellungen α, γ; α', γ' der Zahl m durch die Form (a, b, c), dergestalt, dass dieselben den Congruenzen

$$\begin{array}{llll} 1. & a\alpha+b\gamma\equiv-n\gamma, & 2. & a\alpha'+b\gamma'\equiv-n\gamma' \\ 3. & b\alpha+c\gamma\equiv n\alpha, & 4. & b\alpha'+c\gamma'\equiv n\alpha' \end{array} \pmod m$$

Genüge leisten, so ergiebt sich aus den beiden ersten die erste, aus den beiden letzten die zweite der folgenden Congruenzen:

$$a(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma)\equiv 0,\quad c(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma)\equiv 0 \pmod m.$$

Wenn man aber die erste jener vier Congruenzen mit der letzten multiplicirt und davon das Product der beiden mittleren subtrahirt, erhält man nach einigen leichten Reductionen die folgende:

$$2(b^2-ac)(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma)\equiv 0 \pmod m,$$

welche, mit den beiden vorigen vereint, erfordert, dass $\alpha\gamma'-\alpha'\gamma$ durch m theilbar ist, weil durch irgend eine in m enthaltene Primzahl wenigstens einer der drei Coefficienten a, b, c, welche relativ prim vorausgesetzt wurden, nicht theilbar sein kann.

Man bemerke nun die wichtige Eigenschaft der Form x^2-Dy^2, welche durch nachstehende identische Gleichung ausgedrückt wird:

$$11)\qquad (x^2-Dy^2).(x'^2-Dy'^2)=(xx'-Dyy')^2-D(xy'-x'y)^2.$$

Daraus ergiebt sich sofort das Resultat, dass in der Gleichung

$$[(a\alpha+b\gamma)^2-D\gamma^2].[(a\alpha'+b\gamma')^2-D\gamma'^2]$$
$$=[(a\alpha+b\gamma)(a\alpha'+b\gamma')-D\gamma\gamma']^2-D[a(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma)]^2,$$

in welcher die linke Seite gleich $(am)^2$ und das subtractive Glied der rechten Seite durch $(am)^2$ theilbar ist, auch das andere Glied der rechten Seite durch $(am)^2$ theilbar sein muss, und dass also die beiden Werthe

$$\frac{(a\alpha+b\gamma)(a\alpha'+b\gamma')-D\gamma\gamma'}{am} \text{ und } \frac{\alpha\gamma'-\alpha'\gamma}{m}$$

zwei ganze Zahlen t, u sind, welche der Gleichung

$$12)\qquad t^2-Du^2=1$$

Genüge leisten. Hieraus schliesst man, dass je zwei verschiedene Darstellungen derselben Zahl m durch die gegebene quadratische Form, welche zu derselben Darstellungsgruppe gehören, durch die nachstehende Gleichung:

$$13)\qquad a\alpha'+b\gamma'+\gamma'\sqrt{D}=(a\alpha+b\gamma+\gamma\sqrt{D})(t+u\sqrt{D}),$$

in welcher die rationalen Theile und die Coefficienten von $\sqrt{D}$ einzeln auf beiden Seiten gleich zu setzen sind und welche sich unmittelbar aus den für t, u gefundenen Werthen ergiebt, mit einander verbunden sind.

Man schliesst aber auch leicht umgekehrt, dass, wenn t, u zwei Zahlen sind, welche der Gleichung 12) Genüge leisten, die Werthe α', γ', welche sich aus der Gleichung 13) ergeben, eine Darstellung der Zahl m durch die Form (a, b, c) liefern, welche zur selben Congruenzwurzel gehört, als die Darstellung α, γ. Da nämlich die Gleichung 13) bestehen bleibt, wenn $\sqrt{D}$ durch $-\sqrt{D}$ ersetzt wird, so ergiebt sich einerseits

$$a\alpha'^2 + 2b\alpha'\gamma' + c\gamma'^2 = (a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2)(t^2 - Du^2) = m,$$

andererseits aus den Gleichungen

$$\text{13a)} \quad a\alpha' + b\gamma' = (a\alpha + b\gamma)t + D\gamma u, \quad \gamma' = (a\alpha + b\gamma)u + \gamma t$$

die Beziehung

$$a\alpha' + b\gamma' + n\gamma' = (a\alpha + b\gamma)t + D\gamma u + (a\alpha + b\gamma)un + \gamma tn$$
$$\equiv (a\alpha + b\gamma + \gamma n)(t + un) \pmod{m};$$

$a\alpha' + b\gamma' + n\gamma'$ ist also gleichzeitig mit $a\alpha + b\gamma + \gamma n$ congruent Null. Hieraus erhält man folgenden eleganten Satz:

Alle Darstellungen der Zahl m durch die Form (a, b, c), welche derselben Darstellungsgruppe angehören, erhält man aus irgend einer derselben vermittelst der Gleichung 13), in welcher t, u alle ganzzahligen Lösungen der unbestimmten Gleichung 12) darstellen. Diese Gleichung ist unter dem Namen der Pell'schen Gleichung bekannt.

§ 3. Wie man alle Lösungen der Pell'schen Gleichung finden und auf welche Weise entscheiden könne, ob eine gegebene Zahl durch eine gegebene quadratische Form zu einer bestimmten Wurzel gehörig darstellbar ist oder nicht, darüber verweise ich einerseits auf Dirichlet's Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgeg. von Dedekind, Supplem. VIII, andererseits auf seine Abhandlung, Crelle's Journal, Bd. 24 S. 342. In diesem Paragraphen soll nur noch kurz die Aequivalenz der quadratischen Formen behandelt werden.

I. Setzt man in den beiden Gleichungen 9) für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ resp. $-\gamma', -\delta', \alpha', \beta'$, so dass $\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1$ wird, so gehen sie über in

$$m = (c\alpha' - b\gamma')\alpha' + (-b\alpha' + a\gamma')\gamma', \quad n = (c\alpha' - b\gamma')\beta' + (-b\alpha' + a\gamma')\delta'$$

und geben demnach folgenden Satz: Jede Zahl m, welche durch die Form (a, b, c) zur Wurzel n gehörig dargestellt werden kann, gestattet auch eine Darstellung durch die Form $(c, -b, a)$, welche zu derselben Wurzel gehört. Wenn man daher zwei Formen von der Art, dass jede Zahl, welche durch die eine dargestellt werden kann, auch einer Darstellung durch die andere fähig ist, die zur selben Wurzel gehört, äquivalente Formen nennt, so muss man sagen: die beiden Formen (a, b, c) und $(c, -b, a)$ sind einander äquivalent.

II. Wenn eine Zahl m durch (a, b, c) zur Wurzel n gehörig dargestellt werden kann, so ist nach 8) oder 10)

$$a\alpha + b\gamma + n\gamma \equiv 0 \ (mod\, m), \quad a\alpha + b\gamma + n\gamma = m\delta.$$

Daraus folgt aber

$$m\delta - n\gamma - b\gamma = a\alpha \text{ oder } m\delta - n\gamma - b\gamma \equiv 0 \ (mod.\, a).$$

Erhebt man nun die letzte Gleichung ins Quadrat, so erhält man

$$(m\delta - n\gamma)^2 - 2m\delta \,.\, b\gamma + 2nb\,.\,\gamma^2 + b^2\gamma^2 = a^2\alpha^2,$$

und wenn man in dem Gliede $-2m\delta . b\gamma$ für $m\delta$ seinen Werth substituirt, ergiebt sich nach einigen leichten Reductionen

$$(m\delta - n\gamma)^2 - D\gamma^2 = a(a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2) = am,$$

also

$$m\delta^2 - 2n\delta\gamma + \frac{n^2 - D}{m}\,.\,\gamma^2 = a.$$

Dieses Resultat enthält folgenden Satz: Wenn eine Zahl m durch die Form (a, b, c) mittels der Werthe α, γ zur Wurzel n gehörig dargestellt werden kann, so wird umgekehrt a durch die Form $\left(m, n, \frac{n^2 - D}{m}\right)$ mittels der Werthe $\delta, -\gamma$ dargestellt, und diese Darstellung gehört, wie die zweite der obigen Congruenzen zeigt, zur Wurzel b.

Verbindet man dies Resultat mit dem vorigen (unter I), so kann man noch hinzufügen, dass auch die Zahl c durch die Form $\left(m, n, \frac{n^2 - D}{m}\right)$ dargestellt wird mittels der Werthe $\delta' = -\beta$, $-\gamma' = \alpha$, und dass diese Darstellung zur Congruenzwurzel $-b$ gehören muss. Wendet man auf die beiden letzten Darstellungen die Formeln 9) an, so findet man die folgenden drei Gleichungen, welche stattfinden müssen, sobald eine Zahl m durch (a, b, c) zur Wurzel n gehörig vermittelst der Werthe α, γ dargestellt werden kann:

$$a = m\delta^2 - 2n\delta\gamma + m_1\gamma^2, \quad b = -(m\delta - n\gamma)\beta + (n\delta - m_1\gamma)\alpha,$$
$$c = m\beta^2 - 2n\beta\alpha + m_1\alpha^2.$$

Da alsdann aber auch a durch (m, n, m_1) dargestellt werden kann, und zwar zur Wurzel b gehörig, so ist ebenso

$$14) \quad m = a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2, \quad n = (a\alpha + b\gamma)\beta + (b\alpha + c\gamma)\delta,$$
$$m_1 = a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2,$$

von welchen drei Gleichungen die ersten beiden sich von selbt verstehen. Der Kürze wegen ist m_1 für $\frac{n^2 - D}{m}$ gesetzt, und es ist stets

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

III. Hieraus kann man nun ohne Schwierigkeit die Aequivalenz der beiden Formen (a, b, c) und (m, n, m_1) folgern, sobald m durch (a, b, c) zur Wurzel n gehörig dargestellt werden kann. Dazu ist nur zu zeigen, dass, wenn eine Zahl M durch (a, b, c) zur Wurzel N gehörig darstellbar ist, sie einer gleichen Darstellung auch durch die Form (m, n, m_1) fähig ist. Angenommen, es sei

$$M = (aA + b\Gamma)A + (bA + c\Gamma)\Gamma, \quad N = (aA + b\Gamma)B + (bA + c\Gamma)\Delta,$$
während A, B, Γ, Δ vier ganze Zahlen sind, welche der Gleichung
$$A\Delta - B\Gamma = 1$$
genügen, so hat man nur nöthig, die soeben gegebenen Werthe von a, b, c in die Ausdrücke für M, N zu substituiren, um ohne Schwierigkeit die folgenden drei Gleichungen
$$M = m(\delta A - \beta\Gamma)^2 + 2n(\delta A - \beta\Gamma)(\alpha\Gamma - \gamma A) + m_1(\alpha\Gamma - \gamma A)^2,$$
$$N = [m(\delta A - \beta\Gamma) + n(\alpha\Gamma - \gamma A)](\delta B - \beta\Delta)$$
$$+ [n(\delta A - \beta\Gamma) + m_1(\alpha\Gamma - \gamma A)](\alpha\Delta - \gamma B),$$
$$(\delta A - \beta\Gamma)(\alpha\Delta - \gamma B) - (\alpha\Gamma - \gamma A)(\delta B - \beta\Delta) = (\alpha\delta - \beta\gamma)(A\Delta - B\Gamma) = 1$$
zu erhalten, deren Vergleichung mit den Gleichungen 9) aber gerade beweist, dass M durch die Form (m, n, m_1) zur Wurzel N gehörig dargestellt werden kann.

Die Entscheidung, ob zwei Formen (a, b, c) und (a', b', c') äquivalent sind oder nicht, kommt nach diesem Satze offenbar auf die Frage zurück, ob a' durch (a, b, c) zur Wurzel b' gehörig darstellbar ist oder nicht, und diese Frage kann, wie am Anfange dieses Paragraphen gesagt worden ist, erledigt werden.

IV. Nachdem der vorige Nachweis gelungen, folgt nun sofort, dass überhaupt zwei Formen äquivalent sind, sobald durch jede derselben irgend eine Zahl m zur selben Wurzel n gehörig dargestellt werden kann. Denn in diesem Falle sind beide Formen der dritten Form $\left(m, n, \frac{n^2 - D}{m}\right)$ äquivalent, woraus offenbar auch ihre gegenseitige Aequivalenz folgt.

V. Zum Schluss soll nachgewiesen werden, dass die arithmetische Definition der Aequivalenz zweier Formen mit der üblichen algebraischen Definition gleichbedeutend ist.

Damit die beiden Formen (a, b, c) und (m, n, m_1) äquivalent sind, ist die nothwendige und hinreichende Bedingung das Bestehen der Gleichungen 14), in welchen α, β, γ, δ vier beliebige ganze Zahlen bedeuten, welche die Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ erfüllen. Multiplicirt man diese Gleichungen durch x^2, $2xy$, y^2 resp. und addirt, so kommt
$$mx^2 + 2nxy + m_1y^2 = a(\alpha x + \beta y)^2 + 2b(\alpha x + \beta y)(\gamma x + \delta y) + c(\gamma x + \delta y)^2,$$
d. h. wenn die Form (a, b, c) der Form (m, n, m_1) äquivalent ist, so geht sie in dieselbe über, wenn man die Unbestimmten x, y durch $\alpha x + \beta y$, $\gamma x + \delta y$ resp. ersetzt; wir wollen kurz sagen: durch die Substitution $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$. Umgekehrt, wenn durch eine Substitution dieser Art, deren Elemente durch die Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ mit einander verbunden sind, (a, b, c) in (m, n, m_1) transformirt werden kann, so sind beide Formen einander äquivalent. Denn aus der obigen Gleichung, wenn sie stattfindet, schliesst man

durch Vergleichung der Coefficienten von x^2, $2xy$, y^2 auf ihren beiden Seiten sofort wieder die Gleichungen 14).

Hiernach kann als die nothwendige und hinreichende algebraische Bedingung für die Aequivalenz zweier Formen die Bedingung ausgesprochen werden, dass eine in die andere durch eine Substitution $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ transformirt werden kann, deren Coefficienten der Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ Genüge leisten.

VI. Nach den Gleichungen 14) liefert jede zu n gehörige Darstellung α, γ der Zahl m durch die Form (a, b, c) eine Transformation $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ der letzteren in die Form (m, n, m_1). Aber auch umgekehrt erhält man aus jeder solchen Transformation eine Darstellung von m durch (a, b, c), welche zur Wurzel n gehört, wenn man als darstellende Werthe den ersten und dritten Substitutionscoefficienten nimmt.

Da man nun im Vorhergehenden alle Darstellungen einer Zahl durch eine gegebene Form, welche derselben Darstellungsgruppe angehören, aus einer einzigen von ihnen zu finden gelehrt hat, so wird man unter der Voraussetzung, dass man eine solche kennt, oder, was dasselbe ist, dass man eine Transformation von (a, b, c) in (m, n, m_1) gefunden hat, daraus alle übrigen Transformationen ableiten können. Sind nämlich α, γ; α', γ' zwei zu derselben Wurzel n gehörige Darstellungen, so sind diese durch die Gleichungen 13a) mit einander verbunden, aus denen sich leicht ergiebt:

$$\alpha' = \alpha t - (b\alpha + c\gamma)u, \quad \gamma' = \gamma t + (a\alpha + b\gamma)u.$$

Sind dann β, δ; β', δ' die zugehörigen Lösungen der beiden Gleichungen $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, $\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1$, so werden die Werthe β', δ' erhalten durch Auflösung der beiden Gleichungen

$$(a\alpha' + b\gamma')\beta' + (b\alpha' + c\gamma')\delta' = n, \quad -\gamma'\beta' + \alpha'\delta' = 1,$$

während $n = (a\alpha + b\gamma)\beta + (b\alpha + c\gamma)\delta$ ist. Durch Elimination von δ' findet man

$$m\beta' = n\alpha' - (b\alpha' + c\gamma') = (n\alpha - b\alpha - c\gamma)t - [n(b\alpha + c\gamma) - D\alpha]u.$$

Schreibt man den Coefficienten von t in der Form

$$n\alpha - (b\alpha + c\gamma)(\alpha\delta - \beta\gamma)$$

und substituirt für n seinen Werth, so findet man jenen leicht gleich $m\beta$. Dem Coefficienten von u dagegen kann man die Form geben:

$$b(n\alpha - b\alpha - c\gamma) + c(n\gamma + a\alpha + b\gamma),$$

in welcher der Factor von b bereits gleich $m\beta$ gefunden worden, der Factor von c aber sich nach derselben Methode gleich $m\delta$ ergiebt. Also ist der ganze Coefficient von u gleich $mb\beta + mc\delta$, woraus man endlich findet

$$\beta' = \beta t - (b\beta + c\delta)u.$$

Ganz ebenso ergiebt sich

$$\delta' = \delta t + (a\beta + b\delta)\, u.$$

Da jede Form sich selbst äquivalent ist, so kann man auch nach den sämmtlichen Transformationen einer Form in sich selbst fragen. Diese lassen sich aber sofort aus den allgemeinen Formeln erhalten, wenn man bemerkt, dass $\alpha = 1$, $\gamma = 0$ eine Darstellung der Zahl a durch (a, b, c) ergiebt, welche zur Wurzel b gehört; setzt man daher diese Werthe in die Gleichung

$$b = (a\alpha + b\gamma)\,\beta + (b\alpha + c\gamma)\,\delta$$

ein, so findet man $b\,(1 - \delta) = a\beta$; andererseits giebt die Gleichung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1 \text{ für } \alpha = 1, \quad \gamma = 0$$

den Werth $\delta = 1$, wonach endlich aus der vorigen Gleichung $\beta = 0$ folgt. Aus dieser speciellen Transformation erhält man nun nach den allgemeinen Formeln die sämmtlichen Transformationen einer Form (a, b, c) in sich selbst durch die folgenden Gleichungen:

$$\alpha' = t - bu, \quad \beta' = -cu, \quad \gamma' = au, \quad \delta' = t + bu.$$

VIII.

Ueber die Anwendung der Differentialquotienten mit allgemeinem Index* zum Integriren von Differentialgleichungen.

Von

Dr. R. Most in Stettin.

---

1. Zunächst sollen die von vielen Mathematikern** angedeuteten, von Liouville und Grünwald eingehend behandelten allgemeinen Differentialquotienten einer directen Methode unterworfen werden, um die wichtigsten Formen und Gesetze derselben in, wie es uns scheint, einfacher Weise abzuleiten; sodann sollen die gewonnenen Formen auf die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe angewandt werden***, da hier die Resultate von Kummer und Jacobi eine gute Controle der allgemeinen Formen darbieten; endlich soll die allgemeine Gleichung m^{ten} Grades behandelt werden, welche vom Verfasser bereits durch andere Formen integrirt worden ist.† Im Verlauf der Darstellung finden wir Gelegenheit, auf die Arbeiten Liouville's und Grünwald's hinzuweisen.

I.

2. Legt man das vielfache Integral auseinander, so gelangt man zu folgendem Reihenausdruck:

---

* Liouville: *Journal de l'école polytechnique, XXI cahier. Tome XIII p.* 1: *„Sur quelques questions de géometrie et de mécanique, et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces questions." P.* 71: *„Sur le calcul des différentielles à indices quelconques."* — Zeitschr. f. Math. u. Phys., XII. Jahrg. S. 441: Ueber „begrenzte" Derivationen und deren Anwendung, von Dr. A. Grünwald.

** A. a. O. *Tome XIII p.* 71.

*** A. a. O. *Tome XIII p.* 163: *„Sur l'intégration de l'équation*

$$(m x^2 + n x + p)\frac{d^2 y}{d x^2} + (q x + r)\frac{d y}{d x} + s y = 0$$

à l'aide des différentielles à indices quelconques."

† Schlömilch's Zeitschrift, XV. Jahrg. S. 427.

$$\int_g^x f\xi\, d\xi^m = \frac{u^m(x-g)^m}{1^{m-1|1}}\Big(1^{m-1|1} fx + 2^{m-1|1} f[x-u(x-g)] + 3^{m-1|1} f[x-2u(x-g)] + \ldots + (n+1)^{m-1|1} f[x-nu(x-g)]\Big)_{u=\frac{1}{n}=0};$$

schreibt man diese Gleichung in der Form

$$1)\quad \frac{d_g^{-m} fx}{dx^{-m}} = u^m(x-g)^m\Big(fx - (-m) f[x-u(x-g)] + \ldots (-1)^n(-m)_n f[x-un(x-g)]\Big)_{u=\frac{1}{n}=0},$$

so wird die Uebereinstimmung mit dem bekannten Ausdruck für den vielfachen Differentialquotienten:

$$1a)\quad \frac{d_g^m fx}{dx^m} = u^{-m}(x-g)^{-m}\Big(fx - m f[x-u(x-g)] + m_2 f[x-2u(x-g)] - \ldots\Big)_{u=0}$$

ersichtlich; da aus demselben $x-g$, also auch g verschwindet, so fällt das Zeichen $\frac{d_g^m fx}{dx^m}$ mit dem gewöhnlichen Differentialquotienten zusammen. — Durch theilweises Integriren kann man die linke Seite der Gleichung 1) auch durch folgende Reihe ausdrücken:

$$2)\quad \frac{d_g^{-m} fx}{dx^{-m}} = \frac{(x-g)^m}{\Gamma(m)}\left[\frac{fx}{m} - \frac{x-g}{m+1}\frac{dfx}{dx} + \frac{(x-g)^2}{1.2\,(m+2)}\frac{d^2fx}{dx^2} + \ldots (-1)^{p-1}\frac{(x-g)^{p-1}}{1.2.p-1(m+p-1)}\frac{d^{p-1}fx}{dx^{p-1}}\right]$$
$$+(-1)^p\int_0^{x-g}\left[\frac{(x-g)^{m-1}}{1.2\ldots m-1}\frac{\eta^p}{1.2\ldots p} - \frac{(x-g)^{m-2}}{1.m-2}\frac{\eta^{p+1}}{1\ldots p+1} + (-1)^m\frac{\eta^{p+m-1}}{1\ldots p+m-1}\right]\frac{d^p f(\eta+g)}{d\eta^p}\,d\eta,$$

wo der Rest mit wachsendem p verschwindet, wenn $\frac{d^p fx}{dx^p}$ sich einer endlichen Grenze nähert.

3. Indem die Gleichung 2) das Ziel der allgemeinen Untersuchung andeutet, soll Gleichung 1) zum Ausgangspunkt derselben genommen werden und fast in voller Uebereinstimmung mit Grünwald* folgende Definition gegeben werden:

---

* Schlömilch, Jahrg. XII S. 443.

$$3)\quad \frac{d_g^\mu fx}{dx^\mu} = u^{-\mu}(x-g)^{-\mu}\Big(fx - \mu f[x-u(x-g)] + \mu_2 f[x-2u(x-g)] - \dots + (-1)^n \mu_n f[x-nu(x-g)]\Big)_{u=\frac{1}{n}=0},$$

wo μ_p den p^{ten} Binomialcoefficienten von μ bezeichnet. Schon Liouville hat einen ähnlichen Ausdruck* für den Differentialquotienten mit allgemeinem Index abgeleitet; die Abweichung ist durch die Annahme, dass die Function fx in eine Reihe nach e^x entwickelbar sein soll, veranlasst, denn dieselbe beschränkt g auf den Werth ∞, wie sich bald ergeben wird. — Liegen x und g in dem Convergenzgebiet von fx, so kann man die einzelnen Glieder in Reihen nach $pu(x-g)$ entwickeln und erhält, indem man

$$M_\mu^p = \Big(\mu_1 - 2^p \mu_2 + 3^p \mu_3 - \dots (-1)^n n^p \mu_p\Big)_{u=\frac{1}{n}=0}$$

setzt, die Gleichung

$$4)\quad \frac{d_g^\mu fx}{dx^\mu} = u^{-\mu}(x-g)^{-\mu}\Big[(1-M^0{}_\mu) fx + u(x-g) M^1{}_\mu \frac{dfx}{dx} - \frac{u^2(x-g)^2}{1.2} M^2{}_\mu \frac{d^2 fx}{dx^2} + (-1)^{p-1} \frac{u^p (x-g)^p}{1.2\dots p} M^p{}_\mu \frac{d^p fx}{dx^p} + \dots\Big]_{u=\frac{1}{n}=0}.$$

Nun ist aber, wenn α und β nicht negative ganze Zahlen sind:

$$5)\quad lim\left[\frac{\alpha^{n|1}}{\beta^{n|1}}\right]_{u=\frac{1}{n}=0} = lim\, u^{\beta-\alpha} \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)},$$

wo die Gammafunctionen allgemeine Bedeutung haben. Beschränkt man nämlich zunächst das Zeichen Γ auf das Euler'sche Integral mit einem Exponenten, der einen positiven reellen Theil hat, so ist, unter der Voraussetzung $real\,\beta > real\,\alpha > 0$:

$$lim.\frac{\alpha^{n|1}}{\beta^{n|1}} = \frac{\Gamma(\alpha+n)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+n)\,\Gamma(\alpha)} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)}\,\frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha)}\int_0^\infty \frac{v^{\beta-\alpha-1}}{(1+v)^{\beta+n}}\,dv,$$

welches Integral durch die Substitution $v = \frac{w}{n}$ für $n=\infty$ in

$$\frac{1}{n^{\beta-\alpha}}\,\Gamma(\beta-\alpha)$$

übergeführt werden kann.

Ist $real\,\alpha > real\,\beta > 0$, so erhält man

$$lim.\frac{\alpha^{n|1}}{\beta^{n|1}} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)}\,\Gamma(\alpha-\beta) : \int_0^\infty \frac{v^{\alpha-\beta-1}}{(1+v)^{\alpha+n}}\,dv;$$

sind endlich α und β beliebig, so hat man

---

* A. a. O. *Tome XIII*, *p.* 111.

$$lim: \frac{\alpha^{n|1}}{\beta^{n|1}} = \frac{\alpha^{m|1}(\alpha+m)^{n-m|1}}{\beta^{m|1}(\beta+m)^{n-m|1}} = u^{\beta-\alpha}\frac{\alpha^{m|1}\,\Gamma(\beta+m)}{\beta^{m|1}\,\Gamma(\alpha+m)},$$

wenn m so gewählt ist, dass $\alpha+m$ und $\beta+m$ einen positiven reellen Theil haben. Der erhaltene Ausdruck stellt mit Erweiterung des Γ-Zeichens die rechte Seite der Gleichung 5) dar. — Somit ist

$$lim: [1-\mu_1+\mu_2-\ldots(-1)^n\mu_p]_{u=\frac{1}{n}=0} = lim\,\frac{(1-\mu)^{n|1}}{1^{n|1}} = lim.\,\frac{u^\mu}{\Gamma(1-\mu)},$$

also

$$6)\qquad M^0\mu = 1 - lim: \frac{u^\mu}{\Gamma(1-\mu)}.$$

Da nun

$$M_\mu^p = \mu\,(M_\mu^{p-1} - M_{\mu-1}^{p-1})$$
$$= k_0\,M^0\mu - k_1\,M^0\mu_{-1} + k_2\,M^0\mu_{-2} - \ldots(-1)^p\,k_p\,M^0\mu_{-p}$$

ist, wo

$$k_p = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-p+1) \text{ und } k_0 - k_1 + \ldots(-1)^p k_p = 0$$

ist, so erhält man

$$M_\mu^p = -\,lim: \left[k_0\frac{u^\mu}{\Gamma(1-\mu)} - k_1\frac{u^{\mu-1}}{\Gamma(2-\mu)} + \ldots + (-1)^p\,k_p\frac{u^{\mu-p}}{\Gamma(1+p-\mu)}\right]$$

$$lim\,[u^{-\mu+p}\,M_\mu^p] = (-1)^{p+1}\frac{k_p}{\Gamma(1+p-\mu)}.$$

Setzt man der bequemeren Schreibweise wegen $-\mu$ an die Stelle von μ, so ist, wenn μ nicht eine negative ganze Zahl ist:

$$7)\qquad \begin{aligned}\frac{d_g^{-\mu}fx}{dx^{-\mu}} &= (x-g)^\mu\left[\frac{1}{\Gamma(\mu+1)}fx + (-\mu)\frac{x-g}{\Gamma(\mu+2)}\frac{dfx}{dx}\right.\\ &\qquad\left. + (-\mu)_2\frac{(x-g)^2}{\Gamma(\mu+3)}\frac{d^2fx}{dx^2} + \ldots\right.\\ &= \frac{(x-g)^\mu}{\Gamma(\mu)}\left[\frac{1}{\mu}fx - \frac{x-g}{\mu+1}\frac{dfx}{dx} + \frac{(x-g)^2}{1.2.(\mu+2)}\frac{d^2fx}{dx^2} - \ldots\right.\end{aligned}$$

Diese Reihen lassen sich durch folgende Integrale summiren:

$$8)\qquad \begin{aligned}\frac{d_g^{-\mu}fx}{dx^{-\mu}} &= \frac{(x-g)^\mu}{\Gamma(\mu)}\int_1^0 \frac{u^{\mu-1}}{e^{2i\pi\mu}-1}f[x-u(x-g)]\,du\\ &= \frac{(x-g)^\mu}{\Gamma(\mu)}\int_0^1 \frac{(1-u)^{\mu-1}}{1-e^{2i\pi\mu}}f[g+u(x-g)]\,du\\ &= \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_{x-g}^0 \frac{u^{\mu-1}}{e^{2i\pi\mu}-1}f(x-u)\,du\\ &= \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_g^x \frac{(x-u)^{\mu-1}}{1-e^{2i\pi\mu}}fu\,du,\end{aligned}$$

welche, damit μ auch einen negativen reellen Theil haben kann, als geschlossene Integrale von der unteren Grenze aus um den durch die obere Grenze bezeichneten Verzweigungspunkt einmal positiv herumgeführt werden sollen. Drückt man $\Gamma(\mu)$ auch durch ein geschlossenes Integral aus:

$$\Gamma(\mu)=\int_{\infty}^{0}\frac{u^{\mu-1}}{e^{2i\pi\mu}-1}e^{-u}\,du,^{*}$$

so umfassen die obigen Integrale den Fall, wenn μ eine ganze negative Zahl ist, mit; man erhält z. B. für das letzte Integral den Ausdruck

$$\frac{d_g^{-\mu}fx}{dx^{-\mu}}=-\frac{\int_g^x (x-u)^{\mu-1}fu\,du}{\int_{\infty}^{0}u^{\mu-1}e^{-u}\,du};$$

setzt man nun $\mu=-n$, wo n eine ganze Zahl bedeutet, so werden die Grössen unter den Integralen monodrom, man kann also von den Ausgangspunkten ∞ und g absehen, wenn das Integral nur die Punkte 0 oder resp. x umschreibt, so dass man den bekannten Ausdruck

$$\frac{d^n fx}{dx^n}=\frac{1.2\ldots n}{2\pi i}\int\frac{fu}{(u-x)^{n+1}}du$$

gewinnt.

4. Ist $real\,\mu>0$, so kann man das geschlossene Integral

$$J=\int_b^a\frac{(u-a)^{\mu-1}}{e^{2i\pi\mu}-1}\varphi(u)\,du$$

auf ein gewöhnliches zurückführen, denn umkreist man a mit dem Radius ε und führt das Integral von $a-\varepsilon$ bis b auf demselben Wege zurück, auf dem man es hingeführt hat, so wird

$$J=-\int_b^{a-\varepsilon}(u-a)^{\mu-1}\varphi u\,du+\frac{\varepsilon^{\mu}}{e^{2i\pi\mu}-1}\int_0^{2\pi}e^{i\mu\vartheta}\varphi(a+\varepsilon e^{i\vartheta})\,d\vartheta;$$

wird ε unendlich klein, so erhält man

$$\int_b^a\frac{(u-a)^{\mu-1}}{e^{2i\pi\mu}-1}\varphi u\,du=\int_a^b(u-a)^{\mu-1}\varphi u\,du,^{**}$$

wo die linke Seite ein geschlossenes, die rechte Seite ein gewöhnliches Integral enthält.

---

* Vergl. Thomae's Vorschlag in der Zeitschrift von Schlömilch, XIV. Jahrg. S. 52.

** Vergl. Thomae a. a. O. S. 51.

Führt man unter der angegebenen Bedingung das dritte Integral 8) in ein gewöhnliches über und setzt $g=\infty$, so erhält man, indem man noch $-u$ an die Stelle von u treten lässt:

$$\frac{d_{\infty}^{-\mu} fx}{dx^{-\mu}} = \frac{1}{(-1)^{\mu}\Gamma(\mu)}\int_0^{\infty} u^{\mu-1} f(x+u)\,du,$$

wo die rechte Seite das von Liouville aufgestellte Integral* enthält. — Bei dem vierten Integral würde der Factor $1-e^{2i\pi\mu}$ ausfallen und man erhielte den von Grünwald aufgestellten Ausdruck.**

Uebrigens kann man nach dem Obigen jedes um einen Verzweigungspunkt herumgeführte geschlossene Integral durch theilweises Integriren in ein gewöhnliches Integral überführen; man erhält:

$$\begin{aligned}\int_b^{a}\frac{(u-a)^{\mu-1}}{e^{2i\pi\mu}-1}\varphi u\,du = \Gamma(\mu)\Big[&\frac{(b-a)^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)}\varphi b - \frac{(b-a)^{\mu+1}}{\Gamma(\mu+2)}\frac{d\varphi b}{db} - \dots \\ 9)\qquad &(-1)^{m-1}\frac{(b-a)^{\mu+m-1}}{\Gamma(\mu+m)}\frac{d^{m-1}\varphi b}{db^{m-1}} \\ &(-1)^{m}\frac{1}{\Gamma(\mu+m)}\int_a^b (u-a)^{\mu+m-1}\frac{d^m\varphi u}{du^m}du\Big],\end{aligned}$$

wo $real(\mu+m)>0$ ist. — Verwandelt man hiernach z. B. das vierte Integral unter Nr. 8) in ein gewöhnliches, so erhält man auf der rechten Seite den zweiten allgemeineren Ausdruck Grünwald's:

$$\begin{aligned}\frac{d_g^{-\mu} fx}{dx^{-\mu}} = \frac{(x-g)^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)} fg + \frac{(x-g)^{\mu+1}}{\Gamma(\mu+2)}\frac{dfg}{dg} + \dots + \frac{(x-g)^{\mu+m-1}}{\Gamma(\mu+m)}\frac{d^{m-1}fg}{dg^{m-1}} \\ + \frac{1}{\Gamma(\mu+m)}\int_g^x (x-u)^{\mu+m-1}\frac{d^m fu}{du^m}du.\text{***}\end{aligned}$$

5. Für die bisherigen Rechnungen ist die Bedingung gemacht, dass fg noch innerhalb des um x beschriebenen Convergenzkreises liege; fällt diese Bedingung fort, ist also fg unendlich, so wird die Grösse unter dem Integral in allen vier Ausdrücken bei 8) auch für die untere Grenze unendlich. Dies Ergebniss ist in Uebereinstimmung mit den gewöhnlichen Zeichen, denn es ist z. B.

$$\frac{d_g^{-n}(x-g)^{\nu-1}}{dx^{-n}} = \int_g^x (\xi-g)^{\nu-1}\,d\xi^n$$

für $real\,\nu<0$ offenbar unendlich; um nun aber den allgemeinen Differentialquotienten auch für diesen Fall als Rechnungsform brauchbar zu

---

* A. a. O. *Tome XIII p.* 8.

** A. a. O. *p.* 455.

*** A. a. O. *p.* 458.

machen, soll derselbe so definirt werden, dass er endlich bleibt. Bezeichnet man die Integrale 8) durch

$$J = \int_b^a \frac{(u-a)^{\mu-1}}{e^{2i\pi\mu}-1} \varphi u \, du$$

und ist

$$\varphi u = (u-b)^\nu \psi u,$$

wo ψu einwerthig ist, so soll nicht b, sondern $b-\beta$ als die untere Grenze genommen werden, dafür aber eine Ergänzung eintreten der Art, dass

$$J = \int_{b-\beta}^a \frac{(u-a)^{\mu-1}}{e^{2i\pi\mu}-1} (u-b)^\nu \psi u \, du - \int_{b-\beta}^b \frac{(u-b)^\nu}{e^{2i\pi\nu}-1} (u-a)^{\mu-1} \psi u \, du$$

wird, wodurch man auf das von Thomä vorgeschlagene Integral kommt.* — Mit dieser Erweiterung wird die Definition des Differentialquotienten mit allgemeinem Index für eine Function $(x-g)^\nu \varphi x$, bei der φx monodrom ist, durch folgende Gleichung gegeben:

$$\text{8a)} \quad \frac{d_g{}^{-\mu}}{dx^{-\mu}} (x-g)^\nu \varphi x = \frac{(x-g)^{\mu+\nu}}{\Gamma(\mu)} \left[\int_\varepsilon^1 \frac{(1-u)^{\mu-1}}{1-e^{2i\pi\mu}} u^\nu \varphi[g+u(x-g)] \, du + \int_\varepsilon^0 \frac{u^\nu}{e^{2i\pi\nu}-1} (1-u)^{\mu-1} \varphi[g+u(x-g)] \, du \right],$$

wo auf der rechten Seite zwei geschlossene Integrale mit dem beliebigen Ausgangspunkte ε auftreten. Ist $real\,\nu > -1$, so kann die rechte Seite vereinfacht werden zu folgendem Ausdruck mit geschlossenem Integral:

$$= \frac{(x-g)^{\mu+\nu}}{\Gamma(\mu)} \int_0^1 \frac{(1-u)^{\mu-1}}{1-e^{2i\pi\mu}} u^\nu \varphi[g+u(x-g)] \, du;$$

ist endlich auch $real\,\mu > 0$, so kann das Integral auf ein einfaches zurückgeführt werden und man erhält:

$$= \frac{(x-g)^{\mu+\nu}}{\Gamma(\mu)} \int_0^1 (1-u)^{\mu-1} u^\nu \varphi[g+u(x-g)] \, du;$$

findet nur die zweite Bedingung statt, die erste nicht, so kommt man auf das geschlossene Integral

$$= \frac{(x-g)^{\mu+\nu}}{\Gamma(\mu)} \int_1^0 \frac{u^\nu}{e^{2i\pi\nu}-1} (1-u)^{\mu-1} \varphi[g+u(x-g)] \, du.$$

---

* A. a. O S. 51.

II.

6. Wendet man die allgemeinen Ausdrücke auf die Functionen $e^{\alpha x}$ und $(x-g)^{\nu}(1-x+g)^{\lambda}$ an, so erhält man zunächst aus dem dritten Integral unter 8):

$$10)\qquad \frac{d^{\mu}_{-\infty}\, e^{\alpha x}}{dx^{\mu}} = \alpha^{\mu} e^{\alpha x}, \qquad \frac{d^{\mu}_{+\infty}\, e^{-\alpha x}}{dx^{\mu}} = (-\alpha)^{\mu} e^{-\alpha x};$$

da in diesen beiden Ausdrücken g nicht denselben Werth hat, so erkennt man, dass die von Liouville als Ausgangspunkt gewählte Gleichung

$$\frac{d^{\mu}\, e^{\nu x}}{dx^{\mu}} = \nu^{\mu} e^{\nu x} \,*$$

nicht allgemeingiltig genug ist, um als Definition brauchbar zu sein, wie ja denn auch Liouville bei Behandlung der Function $e^{\beta x} + e^{-\beta x}$ auf Widersprüche gestossen ist. **

Nach dem ersten oder zweiten Integral in 8) ergeben sich leicht folgende Werthe:

$$\frac{d^{-\mu}_{g}}{dx^{-\mu}}(x-g)^{\nu}(1-x+g)^{\lambda} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)}(x-g)^{\mu+\nu}\, F(-\lambda,\, \nu+1,\, \mu+\nu+1,\, x-g),$$

$$\frac{d^{-\mu}_{g+1}}{dx^{-\mu}}(x-g)^{\nu}(1-x+g)^{\lambda} = e^{i\pi\lambda}\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\mu+\lambda+1)}(x-g-1)^{\mu+\lambda}\, F(-\nu,\, \lambda+1,\, \mu+\lambda+1,\, 1-x+g),$$

$$11)\qquad \frac{d^{-\mu}_{+\infty}}{dx^{-\mu}} x^{\nu}(1-x)^{\lambda} = e^{i\pi(\mu+\lambda)}\frac{\Gamma(-\mu-\nu-\lambda)}{\Gamma(-\nu-\lambda)}x^{\mu+\nu+\lambda}\, F\left(-\lambda,\, -\mu-\nu-\lambda,\, -\nu-\lambda,\, \frac{1}{x}\right),$$

$$\frac{d^{-\mu}_{-\infty}}{dx^{-\mu}} x^{\nu}(1-x)^{\lambda} = e^{i\pi\lambda}\frac{\Gamma(-\mu-\nu-\lambda)}{\Gamma(-\nu-\lambda)}(1-x)^{\mu+\nu+\lambda}\, F\left(-\nu,\, -\mu-\nu-\lambda,\, -\nu-\lambda,\, \frac{1}{1-x}\right).$$

Jede der hypergeometrischen Reihen kann nach Jacobi *** durch drei andere ersetzt werden, denn es ist

$$\begin{aligned} F(\alpha,\beta,\gamma,x) &= (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha,\, \gamma-\beta,\, \gamma,\, \frac{x}{x-1}\right) \\ &= (1-x)^{-\beta} F\left(\gamma-\alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \frac{x}{x-1}\right) \\ &= (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha,\, \gamma-\beta,\, \gamma,\, x). \end{aligned}$$

---

* A. a. O. *Tome XIII p.* 3.

** A. a. O. *p.* 95 u. 96.

*** Borchardt, Bd. 56 S. 152.

Setzt man in 11) $\lambda=0$, so erhält man die bemerkenswerthen Formen:

$$\frac{d_g^\mu}{dx^\mu}(x-g)^\nu = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}(x-g)^{\nu-\mu}$$

11a) und

$$\frac{d_\infty^\mu}{dx^\mu}x^\nu = e^{i\pi\mu}\frac{\Gamma(\mu-\nu)}{\Gamma(-\nu)}x^{\nu-\mu}.$$

7. Für lineare Beziehungen der unabhängigen Veränderlichen gilt ein einfaches Gesetz: Ist $y=ax+b$, $h=ag+b$ und $\varphi(y)=fx$, so hat man

12)
$$\frac{d_g^\mu fx}{dx^\mu} = a^\mu \frac{d_h^\mu \varphi y}{dy^\mu};$$

nach dem zweiten Integral in 8) erhält man nämlich:

$$a^{-\mu}\frac{d_h^{-\mu}\varphi y}{dy^{-\mu}} = \frac{(x-g)^\mu}{\Gamma(\mu)}\int_0^1 \frac{(1-u)^{\mu-1}}{e^{2i\pi\mu}-1}\varphi[h+u(y-h]\,du,$$

und es ist

$$\varphi[h+u(y-h)] = \varphi\left[a\Big(g+u(x-g)\Big)+b\right] = f[g+u(x-g)].$$

Nach Gleichung 12) kann man die zweite Gleichung unter 11) aus der ersten ableiten, denn es ist in 11,2):

$$\frac{d_{g+1}^{-\mu}}{dx^{-\mu}}fx = \frac{d_{1-(-g)}^{-\mu}}{d[1-(1-x)]^{-\mu}}fx$$

$$= e^{i\pi\mu}\frac{d_{-g}^{-\mu}}{d(1-x)^{-\mu}}[(1-x)-(-g)]^\lambda[1-(1-x)+(-g)]^\nu;$$

man erhält also $11,_2$ aus $11,_1$, wenn man ν und λ vertauscht, $1-x$ und $-g$ an die Stelle von x und g setzt und dann mit $e^{i\pi\mu}$ multiplicirt. — Entsprechend ergiebt sich für $11,_4$:

$$\frac{d_{-\infty}^{-\mu}}{dx^{-\mu}}fx = \frac{d_{1-\infty}^{-\mu}}{d[1-(1-x)]^{-\mu}}fx = e^{i\pi\mu}\frac{d_\infty^{-\mu}}{d(1-x)^{-\mu}}(1-x)^\lambda[1-(1-x)]^\nu,$$

woraus man sieht, dass in $11,_3$ ν und λ zu vertauschen, $1-x$ an die Stelle von x zu setzen und der Ausdruck dann mit $e^{i\pi\mu}$ zu multipliciren ist.

8. Aus dem ersten Integral unter 8) ergeben sich die beiden wichtigen Gleichungen:

13)
$$\frac{d_g^\mu}{dx^\mu}[\varphi x+\psi x] = \frac{d_g^\mu}{dx^\mu}\varphi x + \frac{d_g^\mu}{dx^\mu}\psi x,$$

$$\frac{d_g^\mu}{dx^\mu}[\varphi x\,.\,\psi x] = \varphi x\frac{d_g^\mu \psi x}{dx^\mu} + \mu\frac{d\varphi x}{dx}\frac{d_g^{\mu-1}\psi x}{dx^{\mu-1}} + \mu_2\frac{d^2\varphi x}{dx^2}\frac{d_g^{\mu-2}\psi x}{dx^{\mu-2}} + \ldots,$$

wo μ_p den p^{ten} Binomialcoefficienten von μ bedeutet; um die letzte Gleichung abzuleiten, braucht man nur $\varphi[x-u(x-g)]$ durch eine Reihe nach $u(x-g)$ auszudrücken.

9. Für die Anwendung der allgemeinen Differentialquotienten zur Integration von Differentialgleichungen sind folgende Beziehungen wichtig:

$$14)\quad \begin{aligned} \frac{d_g^{\nu}}{dx^{\nu}}\left[\frac{d_g^{\mu}}{dx^{\mu}}fx\right] &= \frac{d_g^{\mu+\nu}}{dx^{\mu+\nu}}fx, \\ \frac{d_g^{\nu}}{dx^{\nu}}\left[\frac{d_g^{\mu}}{dx^{\mu}}fx\right] &= \frac{d_g^{\mu}}{dx^{\mu}}\left[\frac{d_g^{\nu}}{dx^{\nu}}fx\right]. \end{aligned}$$

Sind μ und ν gleichzeitig zwei positive ganze Zahlen m und n, so behalten beide Gleichungen ihre Geltung; ist ν allein nur eine positive ganze Zahl n, so gilt die erste Gleichung noch, die zweite aber nur unter der Bedingung

$$fg = f'g = \dots f^{n-1}g = 0,$$

wo $f^p g$ den p^{ten} Differentialquotienten von fg nach g bedeutet; ist μ allein eine positive Zahl m, so gelten beide Gleichungen nur unter der Bedingung

$$fg = f'g = \dots f^{m-1}g = 0;$$

ist endlich $\mu+\nu$ allein eine positive Zahl s, so gelten beide Gleichungen nur unter der Bedingung

$$fg = f'g = \dots f^{s-1}g = 0.$$

Diese Bedingungen sind wichtig, da sie g auf bestimmte Werthe einschränken. Bei den Formeln Liouville's hat g den Werth ∞; die von ihm abgeleiteten particulären Integrale unterliegen daher einer einschränkenden Bedingung.

Für die Ableitung der oben aufgestellten Probleme hat man in der Gleichung

$$\frac{d_g^{-\nu}}{dx^{-\nu}}\left[\frac{d_g^{-\mu}}{dx^{-\mu}}fx\right]$$

$$= \frac{(x-g)^{\mu+\nu}}{\Gamma(\mu)\,\Gamma(\nu)}\int_0^1\!\!\int_0^1 \frac{(1-u)^{\mu-1}}{1-e^{2i\pi\mu}}\,\frac{(1-v)^{\nu-1}}{1-e^{2i\pi\nu}}\,v^{\mu} f[g+uv(x-g)]\,du\,dv$$

die Function f unter dem Integral in eine Reihe nach $uv(x-g)$ zu entwickeln und dann die Glieder nach Gammafunctionen zu integriren; man erhält eine Reihe, welche, durch ein Integral summirt,

$$\frac{d_g^{-(\mu+\nu)}}{dx^{-(\mu+\nu)}}fx$$

giebt; zu demselben Resultate gelangt man bei Behandlung des Ausdrucks

$$\frac{d_g^{-\mu}}{dx^{-\mu}}\left[\frac{d_g^{-\nu}}{dx^{-\nu}}fx\right].$$

Ist $real\,\mu > -1$, so ist das oben aufgestellte Integral nach Abschnitt 5, Gleichung 8a) zu erweitern und Gebrauch zu machen von folgender Gleichung, die sich in aller Strenge beweisen lässt:

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{(1-u)^{\nu-1}}{1-e^{2i\pi\nu}}\, u^{\mu}\, du + \int_{\varepsilon}^{0} \frac{u^{\mu}}{e^{2i\pi\mu}-1}\,(1-u)^{\nu-1}\, du = \frac{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)}.$$

Ferner ist zu bemerken, dass das obige Doppelintegral, wenn

$$-(\mu+\nu) = s$$

ist, einen endlichen Werth nur unter der Voraussetzung

$$fg = f'g = \ldots f^{s-1}g = 0$$

giebt; man erhält dann

$$f^{s}(g) + (x-g)\, f^{s+1}(g) + \frac{(x-g)^2}{1\;2}\, f^{s+2}(g) + \ldots = \frac{d^{s} f x}{d x^{s}}.$$

Für ganze positive Werthe von ν differentiire man die zweite Gleichung unter 8) nach x und schaffe das Differential unter dem Integralzeichen durch theilweises Integriren fort, so ergiebt sich

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{d_g^{-\mu}}{d x^{-\mu}} f x\right] = \frac{d_g^{-\mu+1}}{d x^{-\mu+1}} f x,$$

also auch

$$\frac{d^n}{d x^n}\left[\frac{d_g^{\mu}}{d x^{\mu}} f x\right] = \frac{d_g^{\mu+n}}{d x^{\mu+n}} f x.$$

Ist μ aber eine ganze positive Zahl, so erhält man

$$\frac{d_g^{-\nu}}{d x^{-\nu}}\left[\frac{d^m f x}{d x^m}\right] = \frac{(x-g)^{\nu}}{\Gamma(\nu)} \int_{0}^{1} \frac{(1-u)^{\nu-1}}{1-e^{2i\pi\nu}}\, f^{(m)}\,[g+u\,(x-g)]\, du$$

$$= \frac{d_g^{m-\nu}}{d x^{m-\nu}} f x - \left[\frac{(x-g)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}\, f^{m-1} g + \frac{(x-g)^{\nu-2}}{\Gamma(\nu-1)}\, f^{m-2} g + \ldots \frac{(x-g)^{\nu-m}}{\Gamma(\nu-m+1)}\, f g\right],$$

woraus die Bedingung

$$fg = f'g = \ldots f^{m-1} g = 0$$

folgt. Das Weitere ergiebt sich hieraus leicht.

III.

10. Um die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe

$$D\,(a, b, c, y, x) = x\,(1-x)\,\frac{d^2 y}{d x^2} + [c - (a+b+1)\,x]\,\frac{d y}{d x} - a b y = 0$$

in allgemeinster Weise durch Differentialquotienten mit allgemeinem Index zu integriren, stellen wir zunächst folgende drei Formen für das Integral der Differentialgleichung $D(A, B, C, y, x) = 0$ auf:

15) $y = x^{-A} z$, wenn z der Differentialgleichung

$$D\left(A,\ A-C+1,\ A-B+1,\ z,\ \frac{1}{x}\right) = 0 \text{ genügt;}$$

16) $y = x^{p(1-C)}(1-x)^{q(C-A-B)} z$, wenn z der Differentialgleichung

$$D\,[p(1-C)+q(C-A-B)+A,\ p(1-C) \\ +q(C-A-B)+B,\ (2p-1)(1-C),\ z,\ x] = 0,$$

wo p und q die Werthe 0 und 1 haben können, genügt;

17)
$$y = \frac{d_g^{A-1}}{dx^{A-1}}\left[x^{A-C}(1-x)^{C-B-1}\right],$$

wo g die Werthe 0, 1, $\pm\infty$ haben und B mit A vertauscht werden kann.

Von den Gleichungen 15) und 16) überzeugt man sich durch vollständige oder allmälige Substitution der angeführten Ausdrücke; in Bezug auf 17) setze man $y = \frac{d_g^{\mu}}{dx^{\mu}}\varphi x$, so erhält man:

$$\frac{d_g^{\nu}}{dx^{\nu}} D\left(A,\ B,\ C,\ \frac{d_g^{\mu}}{dx^{\mu}}\varphi x,\ x\right) \\ = D\left(\nu+A,\ \nu+B,\ \nu+C,\ \frac{d_g^{\mu+\nu}}{dx^{\mu+\nu}}\varphi x,\ x\right) = 0;$$

setzt man nun $\mu+\nu=-1$, so wird $\mu+\nu+2$ die ganze positive Zahl 1 und es darf also nach den Bemerkungen in Abschnitt 9)

$$\frac{d_g^{\mu+\nu+2}}{dx^{\mu+\nu+2}}\varphi x = \frac{d\,.\,\varphi x}{dx}$$

nur unter der Bedingung $\varphi g = 0$ gesetzt werden.

Für $\nu = -A$ wird

$$\varphi x = x^{A-C}(1-x)^{C-B-1},$$

woraus sich, da nun $\mu = A-1$ ist, der Ausdruck für y ergiebt. Die Bedingung $\varphi(g) = 0$ beschränkt g auf die Werthe 0, 1, $\pm\infty$. — Setzt man $\nu = -B$, so gelangt man zu einem entsprechenden Resultat.

11. Setzt man

$$\alpha = p(b-a)+a,\quad \beta = q(c-a-b),\quad \gamma = r(1-c),$$

wo p, q und r die Werthe 0 und 1 haben können, so sind die allgemeinsten Integralformen der Gleichung

$$D(a,\ b,\ c,\ y,\ x) = 0\text{*}$$

folgende:

---

* Dass die Grössen $b-a$, $c-a-b$, $1-c$ fundamentale Bedeutung haben, geht schon daraus hervor, dass dieselben als Exponentendifferenzen der Riemann'schen P-Function auftreten; es ist

$$F(a, b, c, x) = P^{a}\begin{bmatrix} 0 & a & 0 & \\ 1-c & b & c-a-b & x \end{bmatrix}.$$

Riemann: Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe darstellbaren Functionen, S 20.

18) $x^{\gamma}(1-x)^{\beta}\frac{d_g^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{d\eta}\left[x^{-c+\alpha+\beta-\gamma}(1-x)^{c-a-b+\alpha-\beta+\gamma-1}\right]$,

wo $\eta=x$ oder $=1-x$;

19) $x^{-\alpha-\beta}(1-x)^{\beta}\frac{d_g^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{d\eta}\left[x^{2-c-2\gamma}(1-x)^{c-a-b+\alpha-\beta+\gamma-1}\right]$,

wo $\eta=\frac{1}{x}$ oder $=\frac{x-1}{x}$;

20) $x^{\gamma}(1-x)^{-\alpha-\gamma}\frac{d_g^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{d\eta}\left[x^{-c+\alpha+\beta-\gamma}(1-x)^{c-a-b-2\beta+1}\right]$,

wo $\eta=\frac{1}{1-x}$ oder $=\frac{x}{x-1}$ ist und g die Werthe 0, 1, $\pm\infty$ haben kann.

Mit den beiden Werthen von η, den drei Werthen von g und den acht Combinationen von α, β, γ stellt jeder der drei Ausdrücke 48 particuläre Integrale dar, welche, wenn die Differentialexponenten positive oder negative ganze Zahlen sind, als vielfache Differentiale oder Integrale auftreten.

Für die Differentialgleichung der Kugelfunctionen ergeben sich z. B., indem man

$$x=\frac{1-\xi}{2},\quad c=1,\quad a.b=-n(n+1)$$

setzt, folgende Integrale aus dem Ausdruck 18):

$$\frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}}(\xi+1)^2(\xi^2-1)^{n-1},\quad \frac{d^n}{d\xi^n}(\xi^2-1)^n,\quad (\xi+1)^2\frac{d^{n+1}}{d\xi^{n+1}}\frac{(\xi^2-1)^{n+1}}{(\xi+1)^2},$$

$$\int_\infty^\xi (u+1)^2\frac{du^{n+2}}{(u^2-1)^{n+2}},\quad \int_\infty^\xi \frac{du^{n+1}}{(u^2-1)^{n+1}},\quad (\xi+1)^2\int_\infty^\xi \frac{du^n}{(u+1)^2(u^2-1)^n}.$$

Mit Hilfe der Gleichungen 8) kann man aus den oben aufgestellten Differentialquotienten 18) bis 20) die von Jacobi* gegebenen bestimmten Integrale ableiten. Andererseits kommt man mit Hilfe der Gleichungen 11) auf die Kummer'schen** Integrale in folgender Form:

$$x^{\gamma}(1-x)^{\beta}F(\beta+\gamma+\alpha,\ \beta+\gamma+a+b-\alpha,\ 2\gamma+c,\ x),$$

$$x^{\gamma}(1-x)^{\beta}F(\beta+\gamma+\alpha,\ \beta+\gamma+a+b-\alpha,\ 2\beta+a+b-c+1,\ 1-x),$$

$$x^{-\alpha-\beta}(1-x)^{\beta}F\left(\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha+\beta+1-c-\gamma,\ 2\alpha-a-b+1,\ \frac{1}{x}\right),$$

$$x^{-\alpha-\beta}(1-x)^{\beta}F\left(\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha+\beta+1-c-\gamma,\ 2\beta+a+b-c+1,\ \frac{x-1}{x}\right),$$

$$x^{\gamma}(1-x)^{-\alpha-\gamma}F\left(\gamma+\alpha+\beta,\ \gamma+\alpha+c-a-b-\beta,\ 2\alpha-a-b+1,\ \frac{1}{1-x}\right),$$

---

* Borchardt, Bd. 56, S. 151 u. 152.

** Borchardt, Bd. 15, S. 52.

$$x^\gamma (1-x)^{-\alpha-\gamma} F\left(\gamma+\alpha+\beta,\ \gamma+\alpha+c-\alpha-b-\beta,\ 2\gamma+c,\ \frac{x}{x-1}\right).$$

Um die allgemeinen Integrale 18) und 19) zu finden, bestimme man y in der Gleichung $D(a, b, c, y, x)=0$ folgendermassen:

$$y=x^{\lambda}(1-x)^{\mu} y_1 \text{ nach 16)}, \quad y_1=x^{\lambda_1} y_2 \text{ nach 15)},$$
$$y_2=x^{\lambda_2}(1-x)^{\mu_2} y_3 \quad \text{„} \quad \text{„} \qquad y_3=x^{\lambda_3} y_4 \quad \text{„} \quad \text{„}$$

dann giebt

$$y=x^{\lambda+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}(1-x)^{\mu+\mu_2} y_4 \text{ den Ausdruck 18)},$$
$$y=x^{\lambda+\lambda_1+\lambda_2}(1-x)^{\mu+\mu_2} y_3 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad 19),$$

wenn y_3 und y_4 nach 17) durch einen Differentialquotienten bestimmt werden. — Giebt man ferner der ursprünglichen Differentialgleichung die Form

$$D(a, b, a+b-c+1, y, 1-x)=0,$$

so erkennt man, dass 20) aus 19) abgeleitet werden kann, indem man $1-x$ an die Stelle von x und $a+b-c+1$ an die Stelle von c, also auch γ an die Stelle von β und umgekehrt setzt.

Die Bemerkung, dass die Differentialgleichung $D(1, \varrho, \sigma, y, x)=0$ zunächst nach 17) das einfache Integral

$$y_1=x^{1-\sigma}(1-x)^{\sigma-\varrho-1}$$

und sodann nach bekannter Methode das vollständige Integral

$$y=x^{1-\sigma}(1-x)^{\sigma-\varrho-1}\int_k^x \frac{du}{u^{2-\sigma}(1-u)^{\sigma-\varrho}}$$

hat, gestattet die Aufstellung eines Integrals, wie es bei den Kugelfunctionen bereits bekannt ist. Man setze in der Gleichung des Abschnittes 10:

$$D\left(\nu+A,\ \nu+B,\ \nu+C,\ \frac{d_g^{\mu+\nu}}{dx^{\mu+\nu}}\varphi x,\ x\right)=0,$$

$\nu=1-A$, so erhält man nach Obigem einen Ausdruck für $\frac{d_g^{\mu+\nu}}{dx^{\mu+\nu}}\varphi x$, woraus, da $y=\frac{d_g^{\mu}}{dx^{\mu}}\varphi x$ ist, für y das vollständige Integral

$$17) \qquad y=\frac{d_g^{A-1}}{dx^{A-1}}\left[x^{A-C}(1-x)^{C-B-1}\int_k^x \frac{du}{u^{A-C+1}(1-u)^{C-B}}\right]$$

folgt. Benutzt man 17a) an der Stelle von 17), so erhält man für die Gleichung $D(a, b, c, y, x)=0$ folgende vollständige Integrale:

$$18\,a) \qquad x^\gamma(1-x)^\beta \frac{d_g^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{d\eta}\left[\frac{1}{x(1-x)}\int_k^x \left(\frac{x}{u}\right)^{1-c+\alpha+\beta-\gamma}\left(\frac{1-x}{1-u}\right)^{c-a-b+\alpha-\beta+\gamma} du\right],$$

$$\eta=x \text{ oder } 1-x,$$

$$19\text{a)}\quad x^{-\alpha-\beta}(1-x)^{\beta}\frac{d_y^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{d\eta}\left[\frac{1}{x(1-x)}\int_k^x\left(\frac{x}{u}\right)^{1-c+2(1-\gamma)}\left(\frac{1-x}{1-u}\right)^{c-a-b+\alpha-\beta+\gamma}du\right],$$

$$\eta=\frac{1}{x}\ \text{oder}\ \frac{x-1}{x},$$

$$20\text{a)}\quad x^{\gamma}(1-x)^{-\alpha-\gamma}\frac{d_g^{\alpha+\beta+\gamma-1}}{d\eta}\left[\frac{1}{x(1-x)}\int_k^x\left(\frac{x}{u}\right)^{1-c+\alpha+\beta-\gamma}\left(\frac{1-x}{1-u}\right)^{c-a-b+2(1-\beta)}du\right],$$

$$\eta=\frac{1}{1-x}\ \text{oder}\ \frac{x}{x-1};$$

die neu auftretende Grösse k ist eine beliebige Constante. Dass diese Ausdrücke vollständige Integrale der Differentialgleichung geben, erkennt man leicht, wenn man mit Einführung einer neuen Constanten k' das Integral $\int_k^x$ in zwei Stücke von k bis k' und von k' bis x zerlegt.

IV.

12. Die Gleichung

$$(a_0+b_0x^{\varrho})x^m\frac{d^my}{dx^m}+(a_1+b_1x^{\varrho})x^{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\ldots+(a_m+b_mx^{\varrho})\,y=\psi x$$

kann, wie der Verfasser gezeigt hat, in die Form

$$21)\quad (d_0+e_0\xi)\varrho^m\frac{d^my}{(d.\log\xi)^m}+(d_1+e_1\xi)\varrho^{m-1}\frac{d^{m-1}y}{(d.\log\xi)^{m-1}}+\ldots$$
$$+(d_m+e_m\xi)\,y=\chi(\xi)$$

übergeführt werden, wenn

$$x^{\varrho}=\xi,\quad \chi(\xi)=\psi(\xi^{\frac{1}{\varrho}}),\quad d_p=C_0^{m-p}a_p-C_1^{m-p+1}a_{p-1}+\ldots(-1)^pC_p^m a_0$$

gesetzt wird und die Grössen e eine entsprechende Beziehung zu den Grössen b haben; die auftretenden Constanten C sind Facultätencoefficienten, werden also durch

$$u^{n|1}=C_0^n u^n+C_1^n u^{n-1}+\ldots+u\,C^n_{n-1}$$

definirt.

Nach 8a) ist nun allgemein

$$x^{\mu-\nu}\frac{d_0^{\mu}x^{\nu}fx}{dx^{\mu}}=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\left[\int_{\varepsilon}^{1}\frac{(1-u)^{-\mu-1}}{1-e^{-2i\pi\mu}}u^{\nu}f(ux)\,du\right.$$
$$\left.+\int_{\varepsilon}^{0}\frac{u^{\nu}}{e^{2i\pi\nu}-1}(1-u)^{-\mu-1}f(ux)\,du\right],$$

also, da

$$\frac{d.f(ux)}{d.\log x} = \frac{d.f(ux)}{d.\log(ux)}$$

ist,

$$22)\quad \frac{d^p}{(d.\log x)^p}\left[x^{\mu-\nu}\frac{d_0^\mu x^\nu fx}{dx^\mu}\right] = x^{\mu-\nu}\frac{d_0^\mu}{dx^\mu}\left[x^\nu\frac{d^p fx}{(d.\log x)^p}\right].$$

Setzt man nun

$$y = \xi^{\mu-\nu-1}\frac{d_0^{\mu-1}\xi^\nu z}{d\xi^{\mu-1}},$$

so kann man mit Hilfe von 22) folgende Gleichungen ableiten:

$$23)\quad \begin{aligned} \frac{d^p y}{(d.\log\xi)^p} &= (\mu-\nu-1)\frac{d^{p-1}y}{(d.\log\xi)^{p-1}} + \xi^{\mu-\nu}\frac{d_0^\mu}{d\xi^\mu}\left[\xi^\nu\frac{d^{p-1}z}{(d.\log\xi)^{p-1}}\right],\\ \xi\frac{d^p y}{(d.\log\xi)^p} &= -(\nu+1)\xi\frac{d^{p-1}y}{(d.\log\xi)^{p-1}} + \xi^{\mu-\nu}\frac{d_0^\mu}{d\xi^\mu}\left[\xi^{\nu+1}\frac{d^{p-1}z}{(d.\log\xi)^{p-1}}\right], \end{aligned}$$

aus denen sich leicht folgende allgemeinere ergeben:

$$24)\quad \begin{aligned} \frac{d^p y}{(d.\log\xi)^p} &= (\mu-\nu-1)^p y + \xi^{\mu-\nu}\frac{d_0^\mu}{dx^\mu}\left[\xi^\nu\left(\frac{d^{p-1}z}{(d.\log\xi)^{p-1}}\right.\right.\\ &\qquad \left.\left. + (\mu-\nu-1)\frac{d^{p-2}z}{(d.\log\xi)^{p-2}} + \ldots + (\mu-\nu-1)^{p-1}z\right)\right],\\ \xi\frac{d^p y}{(d.\log\xi)^p} &= (-\nu-1)^p\xi y + \xi^{\mu-\nu}\frac{d_0^\mu}{dx^\mu}\left[\xi^{\nu+1}\left(\frac{d^{p-1}z}{(d.\log\xi)^{p-1}}\right.\right.\\ &\qquad \left.\left. + (-\nu-1)\frac{d^{p-2}z}{(d.\log\xi)^{p-2}} + \ldots + (-\nu-1)^{p-1}z\right)\right]. \end{aligned}$$

Drückt man nach diesen Gleichungen sämmtliche Differentialquotienten in 21) aus, so wird der zu y gehörige Factor folgender:

$$\varphi(d, \varrho[\mu-\nu-1)] + \xi\varphi[e, \varrho(-\nu-1)],$$

wo $\varphi(p, u) = p_0 u^m + p_1 u^{m-1} + \ldots + p_m$ ist.

Ist also

$$\varphi(d, u) = d_0(u-\alpha_1)\ldots(u-\alpha_m), \quad \varphi(e, u) = e_0(u-\beta_1)\ldots(u-\beta_m),$$

so wird durch die Werthe

$$\mu-\nu-1 = \frac{\alpha_1}{\varrho}, \quad \nu+1 = -\frac{\beta_1}{\varrho}$$

die Differentialgleichung 21) auf eine ähnliche in Bezug auf z zurückgeführt, welche nur von der $m-1^{\text{ten}}$ Ordnung ist; während die Coefficienten der Gleichung 21) aus den Ausdrücken $\varphi(d, \varrho u)$ und $\varphi(e, \varrho u)$ zu entnehmen sind, werden die der neuen Gleichung durch die Ausdrücke

$$\frac{\varphi(d, \varrho u)}{u - \frac{\alpha_1}{\varrho}} \text{ und } \frac{\varphi(e, \varrho u)}{u - \frac{\beta_1}{\varrho}}$$

gegeben; schreibt man deshalb die Gleichung 21) symbolisch:

$$D^m[\varphi(d, \varrho u), \varphi(e, \varrho u), y, \xi] = \chi(\xi),$$

so ist die daraus abgeleitete Gleichung folgende:

$$25)\quad D^{m-1}\left[\frac{\varphi(d,\varrho u)}{u-\frac{\alpha_1}{\varrho}},\ \frac{\varphi(e,\varrho u)}{u-\frac{\beta_1}{\varrho}},\ z_1,\ \xi\right]=\xi^{\frac{\beta_1}{\varrho}+1}\frac{d_0^{\frac{\beta_1-\alpha_1}{\varrho}}}{d\xi}\left[\xi^{-\frac{\alpha_1}{\varrho}-1}\chi(\xi)\right],$$

wenn

$$y=\xi^{\frac{\alpha_1}{\varrho}}\frac{d_0^{\frac{\alpha_1-\beta_1}{\varrho}-1}}{d\xi}\left[\xi^{-\frac{\beta_1}{\varrho}-1}z_1\right]$$

ist.

Fährt man in derselben Weise fort, z_1 durch z_2 auszudrücken etc., so gelangt man schliesslich zu einer Differentialgleichung erster Ordnung, welche zu integriren ist; es ergiebt sich:

$$26)\quad y=\varrho^{-m}\prod_{r=1}^{r=m-1}\left(\xi^{\frac{\alpha_r}{\varrho}}\frac{d_0^{\frac{\alpha_r-\beta_r}{\varrho}-1}}{d\xi}\left[\xi^{-\frac{\beta_r}{\varrho}-1}\right)\xi^{\frac{\alpha_m}{\varrho}}(d_0+e_0\xi)^{\frac{\beta_m-\alpha_m}{\varrho}}\int_k^{\xi}U.u^{-\frac{\alpha_m}{\varrho}-1}(d_0+e_0u)^{\frac{\alpha_m-\beta_m}{\varrho}-1}du\right]..\Big],$$

wo

$$U=\prod_{r=1}^{r=m-1}\left(u^{\frac{\beta_r}{\varrho}+1}\frac{d_0^{\frac{\beta_r-\alpha_r}{\varrho}}}{du}\left[u^{-\frac{\alpha_r}{\varrho}-1}\right)\chi(u)\right]\dots\Big]$$

ist und das Zeichen Π bedeutet, dass die Operation des Multiplicirens und Differentiirens $m-1$-mal wiederholt werden soll. Durch Vertauschung der Wurzeln erhält man die verschiedenen particulären Integrale. — Setzt man $\eta=x^{-\varrho}$, so geht 21) in die Form

$$D^m[\varphi(e,-\varrho u),\ \varphi(d,-\varrho u),\ y,\ \eta]=\eta\chi\left(\frac{1}{\eta}\right)$$

über und man erhält unmittelbar eine zweite Form:

$$27)\quad y=(-\varrho)^{-m}\prod_{r=1}^{r=m-1}\left(\eta^{-\frac{\beta_r}{\varrho}}\frac{d_0^{\frac{\alpha_r-\beta_r}{\varrho}-1}}{d\eta}\left[\eta^{\frac{\alpha_r}{\varrho}-1}\right)\eta^{-\frac{\beta_m}{\varrho}}(d_0\eta+e_0)^{\frac{\beta_m-\alpha_m}{\varrho}}\int_k^{\eta}Vu^{\frac{\beta_m}{\varrho}-1}(d_0u+e_0)^{\frac{\alpha_m-\beta_m}{\varrho}-1}du\right]\dots\Big],$$

wo

$$V=\prod_{r=1}^{r=m-1}\left(u^{-\frac{\alpha_r}{\varrho}+1}\frac{d_0^{\frac{\beta_r-\alpha_r}{\varrho}}}{du}\left[u^{\frac{\beta_r}{\varrho}-1}\right)u\chi\left(\frac{1}{u}\right)\right]\dots\Big]$$

ist.

Die Grösse k ist eine beliebige Constante; zerlegt man das bestimmte Integral in 26) und 27) in zwei von k bis k' und von k' bis ξ, resp. η, und und ersetzt das erste Integral durch eine Constante K, so erkennt man,

dass, wenn in 21) die rechte Seite Null ist, die particulären Integrale folgende sind:

$$26\text{a)}\quad y=\prod_{r=1}^{r=m-1}\left(\xi^{\frac{\alpha_r}{\varrho}}\frac{d_0^{\frac{\alpha_r-\beta_r}{\varrho}-1}}{d\xi}\left[\xi^{-\frac{\beta_r}{\varrho}-1}\right)\xi^{\frac{\alpha_m}{\varrho}}(d_0+e_0\xi)^{\frac{\beta_m-\alpha_m}{\varrho}}\right]\ldots\Big],$$

$$27\text{a)}\quad y=\prod_{r=1}^{r=m-1}\left(\eta^{-\frac{\beta_r}{\varrho}}\frac{d_0^{\frac{\alpha_r-\beta_r}{\varrho}-1}}{d\eta}\left[\eta^{\frac{\alpha_r}{\varrho}-1}\right)\eta^{-\frac{\beta_m}{\varrho}}(d_0\eta+e_0)^{\frac{\beta_m-\alpha_m}{\varrho}}\right]\ldots\Big].$$

Drückt man die Differentialquotienten nach 8) durch bestimmte Integrale aus, so erhält man die particulären Integrale, welche der Verfasser schon auf anderem Wege abgeleitet hat.* Um über die Auffassung der Ausdrücke 26) und 27) keinen Zweifel zu lassen, soll beispielsweise ein particuläres Integral der Differentialgleichung dritter Ordnung vollständig gegeben werden. Man erhält unter der Voraussetzung $\varrho=1$:

$$y=x^{\alpha_1}\frac{d_0^{\alpha_1-\beta_1-1}}{dx}\left[x^{\alpha_2-\beta_1-1}\frac{d_0^{\alpha_2-\beta_2-1}}{dx}\left[x^{\alpha_3-\beta_2-1}(d_0+e_0x)^{\beta_3-\alpha_3}Fx\right]\right],$$

wo

$$Fx=\int_k^x u^{\beta_1-\alpha_3}(d_0+e_0u)^{\alpha_3-\beta_3-1}\frac{d_0^{\beta_1-\alpha_1}}{du}\left[u^{\beta_2-\alpha_1-1}\frac{d_0^{\beta_2-\alpha_2}}{du}\left[u^{\beta_3-\alpha_2-1}\psi u\right]\right]du.$$

Die Gleichung

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[c-(a+b+1)x]\frac{dy}{dx}-aby=\psi x$$

hat das einfache Integral

$$y=\frac{d_0^{a-1}}{dx}\left[\frac{1}{x(1-x)}\int_k^x\left(\frac{x}{u}\right)^{a-c+1}\left(\frac{1-x}{1-u}\right)^{c-b}\frac{d_0^{-a}\psi u}{du^{-a}}du\right].$$

Es erübrigt nun noch, die Fälle zu berücksichtigen, wo

$$d_0=d_1=\ldots=0 \text{ oder } e_0=e_1=\ldots=0$$

ist. Wird in

$$\varphi(d,\varrho u)=0$$

die Grösse $d_0=0$, so muss u unendlich werden Zur Zeichenbestimmung genügen die ersten Glieder. Man entnimmt aus der Gleichung

$$d_0+\frac{d_1}{\varrho u}=0,\quad lim\,u=-lim\left(\frac{d_1}{\varrho d_0}\right)_{d_0=0}=-\infty \text{ und } lim(\varrho u d_0)=-d_1.$$

Entsprechend erhält man für 27) aus der Gleichung

$$\varphi(e,-\varrho v)=0$$

für $e_0=0$:

$$lim\,v=+\infty \text{ und } lim(\varrho v e_0)=e_1.$$

---

* Schlömilch's Zeitschrift, XV. Jahrg. S. 441.

Es handelt sich somit sowohl in 26) wie 27) um die beiden Grenzwerthe

$$lim\left[x^{-n}\frac{d_0^{-n+\mu}}{dx}(x^\mu fx)\right]_{n=\infty} \text{ und } lim\left[x^\mu\frac{d^{n+\mu}}{dx}(x^n fx)\right]_{n=\infty}.$$

Für den ersten Grenzwerth ergiebt sich aus dem letzten Ausdruck in 8a), indem daselbst u für nu gesetzt wird:

$$\Gamma(n-\mu)\,.\,n^{\mu+1}x^{-n}\frac{d^{-n+\mu}}{dx}[x^\mu f(nx)]=\int\limits_n^0\frac{u^\mu}{e^{2i\pi\mu}-1}\left(1-\frac{u}{n}\right)^{n-\mu-1}f(ux)\,du,$$

also:

$$28)\quad \begin{aligned} &lim\left[\Gamma(n-\mu).n^{\mu+1}x^{-n}\frac{d^{-n+\mu}}{dx}[x^\mu f(nx)]\right]_{n=\infty}\\ &=\int\limits_\infty^0\frac{u^\mu}{e^{2i\pi\mu}-1}e^{-u}f(ux)\,du.\end{aligned}$$

Um den zweiten Grenzwerth zu bestimmen, forme man die rechte Seite der aus 8a) entnommenen Gleichung:

$$x^\mu\frac{d^{\mu+\nu}}{dx}(x^\nu fx)=\frac{1}{\Gamma(-\mu-\nu)}\left[\int\limits_\varepsilon^1\frac{(1-u)^{-\mu-\nu-1}}{1-e^{2i\pi(\mu+\nu)}}u^\nu f(ux)\,du\right.$$
$$\left.+\int\limits_\varepsilon^0\frac{u^\nu}{e^{2i\pi\nu}-1}(1-u)^{-\mu-\nu-1}f(ux)\,du\right]$$

dadurch um, dass man $f(ux)$ in eine Reihe entwickelt, dann durch Gammafunctionen integrirt und berücksichtigt, dass

$$\Gamma(m-\mu)\,\Gamma(\mu+1-m)=(-1)^{m-1}\,\Gamma(\mu)\,\Gamma(1-\mu)$$

für jede ganze Zahl m ist. Man erhält dann für eine in der ganzen Ebene synektische Function fx die Gleichung

$$x^\mu\frac{d_0^{\mu+\nu}}{dx}(x^\nu fx)=\frac{\Gamma(\mu+\nu+1)}{\Gamma(\mu)\,\Gamma(1-\mu)}\left[\int\limits_\varepsilon^1\frac{(1-u)^\nu}{1-e^{2i\pi\nu}}u^{\mu-1}f\left(\frac{u-1}{u}x\right)du\right.$$
$$\left.+\int\limits_\varepsilon^0\frac{u^{\mu-1}}{e^{2i\pi\mu}-1}(1-u)^\nu f\left(\frac{u-1}{u}x\right)du\right].$$

Setzt man für ν die positive Grösse n, so verschwindet das erste geschlossene Integral, wenn sich ε der 1 nähert; man erhält, indem u an die Stelle von nu gesetzt wird:

$$x^{\mu}\frac{d_0^{\mu+n}}{dx}\left[x^n f\left(\frac{x}{n}\right)\right]$$

$$=\frac{\Gamma(\mu+n+1)}{\Gamma(\mu)\,\Gamma(1-\mu)}\,n^{-\mu}\int\limits_n^0\frac{u^{\mu-1}}{e^{2i\pi\mu}-1}\left(1-\frac{u}{n}\right)^n f\left(\frac{u-n}{u}\,\frac{x}{n}\right)du,$$

also:

$$\text{29)}\quad \begin{aligned} &\lim\left\{\frac{n^{\mu}}{\Gamma(\mu+n+1)}\,x^{\mu}\frac{d_0^{n+\mu}}{dx}\left[x^n f\left(\frac{x}{n}\right)\right]\right\}_{n=\infty}\\ &=\frac{1}{\Gamma(\mu)\,\Gamma(1-\mu)}\int\limits_{\infty}^0\frac{u^{\mu-1}}{e^{2i\pi\mu}-1}\,e^{-u}\,f\left(-\frac{x}{u}\right)du.\end{aligned}$$

Da die linke Seite von 29) $f\left(\frac{x}{n}\right)$ enthält, so ist es für 29) nicht nöthig, dass fx in der ganzen Ebene synektisch ist; es genügt, wenn sie im Bereich des Punktes 0 synektisch ist, vorausgesetzt, dass derselbe sich über x hinaus erstreckt.

Setzt man nun in 26):

$$-\frac{\alpha_1}{\varrho}=n,\quad \frac{\beta_1}{\varrho}=\mu,$$

so wird zunächst

$$U=u^{\mu+1}\frac{d_0^{n+\mu}}{du}\left[u^n F(u)\right],$$

wenn

$$F(u)=\frac{1}{u}\prod_{r=2}^{r=m-1}\left(u^{\frac{\beta_r}{\varrho}+1}\frac{d_0^{\frac{\beta_r-\alpha_r}{\varrho}}}{du}\left[u^{-\frac{\alpha_r}{\varrho}-1}\right)\chi(u)\right]\ldots\Big]$$

ist; ist

$$p=\frac{n^{\mu}}{\Gamma(\mu+n+1)}\quad\text{und}\quad u=\frac{v}{n},$$

so wird, indem man die Factoren n nach Gleichung 12) forthebt:

$$p\,U=up\,.\,v^{\mu}\frac{d_0^{n+\mu}}{dv}\left[v^{\mu}F\left(\frac{v}{n}\right)\right].$$

Für $n=\infty$ wird der zu u gehörige Factor der rechten Seite nach Gleichung 29) eine Function von v; sie heisse $F_1(v)$, so erhält man

$$\lim(p\,.\,U)=u\,F_1(v).$$

Führen wir diesen Werth in y ein, so lässt sich die Function, auf welche sich die $m-1$ unveränderten Differentiale zunächst beziehen, schreiben:

$$(n\xi)^{\frac{\alpha_m}{\varrho}}(d_0 n+e_0 n\xi)^{\frac{\beta_m-\alpha_m}{\varrho}}\int\limits_k^{n\xi}F_1(v)\,v^{-\frac{\alpha_m}{\varrho}}(d_0 n+e_0 v)^{\frac{\alpha_m-\beta_m}{\varrho}-1}dv,$$

wo k eine neue Constante ist. Da nun $lim\,(d_0 n) = d_1$ ist, so liegt eine Function von $n\xi$ vor, also erhalten wir auch eine solche, wenn wir uns an derselben die $m-1$ Differentiirungen nach ξ vollzogen denken; bezeichnet man die so erhaltene Function durch $F_2(n\xi)$, so kann der Grenzwerth von

$$\frac{1}{p}\,\xi^{-n}\,\frac{d_0^{-n-\mu-1}}{d\xi}\,[\xi^{-\mu-1}\,F_2(n\xi)]$$

nach 28) gefunden werden.

Ganz entsprechend ist Integral 27) zu behandeln, indem

$$n = \frac{\beta_1}{\varrho}, \quad \mu = -\frac{\alpha_1}{\varrho}$$

gesetzt und die Beziehung $lim\,(e_0 n) = e_1$ berücksichtigt wird.

IX.

Zur Theorie der Reihen.

Von

LEOPOLD SCHENDEL,

Stud. zu Berlin.

---

1. Wenn die Function $f(x)$ und ihre m-ersten Ableitungen von $x=x$ bis $x=x+h$ endlich und stetig sind, so ist

$$\frac{A_0^\alpha h^0}{0!} f(x+h) + \frac{A_1^\alpha h^1}{1!} f'(x+h) + \ldots + \frac{A^\alpha_{m-1}\, h^{m-1}}{\overline{m-1}!} f^{m-1}(x+h)$$
$$= \frac{1^{\alpha-1} h^0}{0!} f(x) + \frac{2^{\alpha-1} h^1}{1!} f'(x) + \ldots + \frac{m^{\alpha-1} h^{m-1}}{\overline{m-1}!} f^{m-1}(x)$$
$$+ \frac{(\overline{m+1}^{\alpha-1} - A^\alpha_m)\, h^m}{m!} f^m(x+h\vartheta), \quad 0<\vartheta<1,$$

wo α irgend eine positive ganze Zahl bedeutet und die Coefficienten A_0^α, $A_1^\alpha \ldots$ durch die Gleichung

$$\sum_1^m \binom{m-1}{k-1} A^\alpha_{k-1} = m^{\alpha-1}$$

definirt sind.

Beweis. Unter den getroffenen Bestimmungen ist nach der Regel der partiellen Integration

$$\int_0^1 \sum_1^m \binom{m-1}{k-1} A^\alpha_{k-1} (1-t)^{m-k} . f^m(x+ht)\, dt$$
$$= \frac{A^\alpha_{m-1}}{h} f^{m-1}(x+h) - \frac{m^{\alpha-1}}{h} f^{m-1}(x)$$
$$+ \frac{m-1}{h} \int_0^1 \sum_1^{m-1} \binom{m-2}{k-1} A^\alpha_{k-1} (1-t)^{m-1-k} . f^{m-1}(x+ht)\, dt$$

und folglich, wenn der links stehende Ausdruck durch U_m bezeichnet und die ganze Gleichung mit $\frac{h^m}{\overline{m-1}!}$ multiplicirt wird,

$$\frac{h^m U_m}{\overline{m-1}!} = \frac{A^\alpha_{m-1} h^{m-1}}{\overline{m-1}!} f^{m-1}(x+h) - \frac{m^{\alpha-1} h^{m-1}}{\overline{m-1}!} f^{m-1}(x) + \frac{h^{m-1} U_{m-1}}{\overline{m-2}!}.$$

Hieraus ergiebt sich nun sofort weiter die Gleichung

$$\frac{h^m U_m}{\overline{m-1}!} = \frac{A^\alpha_{m-1} h^{m-1}}{\overline{m-1}!} f^{m-1}(x+h) - \frac{m^{\alpha-1} h^{m-1}}{\overline{m-1}!} f^{m-1}(x)$$
$$+ \frac{A^\alpha_{m-2} h^{m-2}}{\overline{m-2}!} f^{m-2}(x+h) - \frac{\overline{m-1}^{\alpha-1} h^{m-2}}{\overline{m-2}!} f^{m-2}(x) + \ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{A_1{}^\alpha h^1}{1!} f'(x+h) - \frac{2^{\alpha-1} h^1}{1!} f'(x) + \frac{h^1 U_1}{0!},$$

und aus dieser geht, da

$$U_1 = \int_0^1 A_0{}^\alpha f'(x+ht)\,dt = \frac{A_0{}^\alpha f(x+h) - A_0{}^\alpha f(x)}{h}$$

und also

$$\frac{h^1 U_1}{0!} = \frac{A_0{}^\alpha h^0}{0!} f(x+h) - \frac{1^{\alpha-1} h^0}{0!} f(x)$$

ist, die Formel

$$\frac{A_0{}^\alpha h^0}{0!} f(x+h) + \frac{A_1{}^\alpha h^1}{1!} f'(x+h) + \ldots + \frac{A^\alpha_{m-1} h^{m-1}}{\overline{m-1}!} f^{m-1}(x+h)$$
$$= \frac{1^{\alpha-1} h^0}{0!} f(x) + \frac{2^{\alpha-1} h^1}{1!} f'(x) + \ldots + \frac{m^{\alpha-1} h^{m-1}}{\overline{m-1}!} f^{m-1}(x)$$
$$+ \frac{h^m}{\overline{m-1}!} \int_0^1 \sum_1^m \binom{m-1}{k-1} A^\alpha_{k-1} (1-t)^{m-k} \,.\, f^m(x+ht)\,dt$$

hervor, die mit der zu beweisenden bis auf das letzte Glied vollkommen übereinstimmt; es bleibt noch zu beweisen, dass das m-fache des bestimmten Integrals oder

$$m U_m = (\overline{m+1}^{\alpha-1} - A^\alpha_m) f^m(x+h\vartheta), \quad 0 < \vartheta < 1$$

ist. Ehe wir dies aber thun, müssen wir nachweisen, dass die Zahlen A^α_{m-1} positiv sind. Zu dem Ende setzen wir in der oben entwickelten Formel $f(x) = x^{m-1}$; dadurch entsteht die Gleichung

$$\binom{m-1}{0} A_0{}^\alpha h^0 (x+h)^{m-1} + \ldots + \binom{m-1}{m-1} A^\alpha_{m-1} h^{m-1} (x+h)^0$$
$$= \binom{m-1}{0} 1^{\alpha-1} h^0 x^{m-1} + \ldots + \binom{m-1}{m-1} m^{\alpha-1} h^{m-1} x^0,$$

aus der für $h = -x$ nach Division mit x^{m-1} die Relation

$$(-1)^{m-1} A^{\alpha}{}_{m-1} = \binom{m-1}{0} 1^{\alpha-1} - \binom{m-1}{1} 2^{\alpha-1} + \dots$$
$$+ (-1)^{m-1} \binom{m-1}{m-1} m^{\alpha-1}$$

hervorgeht.

Durch Multiplication mit m wird aus derselben

$$(-1)^{m-1}\, m\, A^{\alpha}{}_{m-1} = \binom{m}{1} 1^{\alpha} - \binom{m}{2} 2^{\alpha} + \dots + (-1)^{m-1} \binom{m}{m} m^{\alpha};$$

lassen wir nun hierin $m+1$ an die Stelle von m treten, so dass dadurch die Gleichung

$$(-1)^{m}\, \overline{m+1}\, A^{\alpha}{}_{m} = \binom{m+1}{1} 1^{\alpha} - \binom{m+1}{2} 2^{\alpha} + \dots + (-1)^{m} \binom{m+1}{m+1} \overline{m+1}^{\alpha}$$

entsteht, und subtrahiren dann von dieser die vorige, so wird

$$(-1)^{m} [\overline{m+1}\, A^{\alpha}{}_{m} + m\, A^{\alpha}{}_{m-1}] = \binom{m}{0} 1^{\alpha} - \binom{m}{1} 2^{\alpha} + \dots + (-1)^{m} \binom{m}{m} \overline{m+1}^{\alpha}$$

und folglich, da die rechte Seite mit $(-1)^{m} A_{m}{}^{\alpha+1}$ identisch ist,

$$A_{m}{}^{\alpha+1} = \overline{m+1}\, A^{\alpha}{}_{m} + m\, A^{\alpha}{}_{m-1}.$$

Da nun offenbar

$$A_0{}^1 = 1, \quad A_1{}^1 = 0, \quad A_2{}^1 = 0 \dots$$

ist, so müssen also sämmtliche Zahlen $A^{\alpha}{}_{m-1}$ positiv sein. Zugleich lehrt diese bemerkenswerthe Formel, dass sie auch ganze Zahlen sind und dass

$$A^{\alpha}{}_{m-1} = 0, \quad m > \alpha$$

ist. Diese letztere Eigenschaft ergiebt sich übrigens auch sofort aus der Definitionsgleichung, da erhellt, dass die Gleichung

$$\sum_{1}^{\alpha} \binom{m-1}{k-1} A^{\alpha}{}_{k-1} = m^{\alpha-1}$$

in Bezug auf m eine identische Gleichung ist.

Es erreiche nun innerhalb des Intervalles $t=0$ bis $t=1$ $f^{m}(x+ht)$ seinen kleinsten Werth für $t=a$ und seinen grössten für $t=b$; es ist dann

$$f^{m}(x+ha) < f^{m}(x+ht) < f^{m}(x+hb).$$

Diese Ungleichheit wird durch Multiplication mit

$$m \sum_{1}^{m} \binom{m-1}{k-1} A^{\alpha}{}_{k-1} (1-t)^{m-k}$$

nicht gestört, weil dieser Factor nach dem Vorhergehenden von $t=0$ bis $t=1$ durchaus positiv bleibt; multipliciren wir noch mit dt und integriren dann zwischen den Grenzen $t=0$ bis $t=1$, so wird daher offenbar

$$\sum_{1}^{m} \binom{m}{k-1} A^{\alpha}{}_{k-1} f^{m}(x+ha) < m\, U_m < \sum_{1}^{m} \binom{m}{k-1} A^{\alpha}{}_{k-1} f^{m}(x+hb)$$

oder, da

$$\sum_1^{m+1} \binom{m}{k-1} A^\alpha{}_{k-1} = \overline{m+1}^{\alpha-1}$$

ist,

$$(\overline{m+1}^{\alpha-1} - A^\alpha{}_m) f^m(x+ha) < m\, U_m < (\overline{m+1}^{\alpha-1} - A^\alpha{}_m) f^m(x+hb);$$

folglich muss zufolge der vorausgesetzten Stetigkeit von $f^m(x)$

$$m\, U_m = (\overline{m+1}^{\alpha-1} - A^\alpha{}_m) f^m(x+h\vartheta), \quad 0 < \vartheta < 1$$

sein. Damit ist unsere Formel vollständig erwiesen.

Das eben bewiesene Theorem enthält als speciellen Fall $(\alpha=1)$ das Taylor'sche Theorem

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots + \frac{h^{m-1}}{\overline{m-1}!} f^{m-1}(x)$$
$$+ \frac{h^m}{m!} f^m(x+h\vartheta), \quad 0 < \vartheta < 1$$

2. Gilt die Gleichung

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots$$

für Werthe von h, die zwischen den Grössen $-\lambda$ und $+\lambda$ liegen, so gilt für dieselben Werthe von h auch die Gleichung

$$\frac{A_0^\alpha h^0}{0!} f(x+h) + \frac{A_1^\alpha h^1}{1!} f'(x+h) + \ldots + \frac{A^\alpha{}_{\alpha-1} h^{\alpha-1}}{\overline{\alpha-1}!} f^{\alpha-1}(x+h)$$
$$= \frac{1^{\alpha-1} h^0}{0!} f(x) + \frac{2^{\alpha-1} h^1}{1!} f'(x) + \ldots.$$

Diese Gleichung besteht auch an den Grenzen der Convergenz für $h = \pm\lambda$, wenn für diese Grenzwerthe die Taylor'sche Reihe und ihre $\overline{\alpha-1}$ ersten Ableitungen nach h convergiren.

Beweis. Multiplicirt man die Taylor'sche Reihe und ihre $\overline{\alpha-1}$ ersten Ableitungen nach h:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \ldots + \frac{h^{\alpha-1}}{\overline{\alpha-1}!} f^{\alpha-1}(x) + \frac{h^\alpha}{\alpha!} f^\alpha(x) + \ldots$$

$$f'(x+h) = \qquad f'(x) + \ldots + \frac{h^{\alpha-2}}{\overline{\alpha-2}!} f^{\alpha-1}(x) + \frac{h^{\alpha-1}}{\overline{\alpha-1}!} f^\alpha(x) + \ldots$$

. . . .

$$f^{\alpha-1}(x+h) = \qquad f^{\alpha-1}(x) + \frac{h}{1} f^\alpha(x) + \ldots,$$

wobei hervorgehoben werden muss, dass diese Gleichungen nur dann richtig sind, zunächst für Werthe von h, die zwischen $-\lambda$ und $+\lambda$ liegen, wenn für diese Werthe die erste Gleichung besteht, und dann für $h = \pm\lambda$, wenn für diese Grenzwerthe sämmtliche rechtsstehende Reihen convergiren, der Reihe nach resp. mit

$$\frac{A_0^\alpha h^0}{0!}, \quad \frac{A_1^\alpha h^1}{1!} \ldots \frac{A^\alpha{}_{\alpha-1} h^{\alpha-1}}{\overline{\alpha-1}!}$$

und addirt dann die so entstehenden Gleichungen, so erhält man unter den angegebenen Bedingungen die Gleichung

$$\frac{A_0^\alpha h^0}{0!} f(x+h) + \frac{A_1^\alpha h^1}{1!} f'(x+h) + \ldots + \frac{A^\alpha_{\alpha-1} h^{\alpha-1}}{\alpha-1!} f^{\alpha-1}(x+h)$$

$$= \left[\binom{0}{0} A_0^\alpha\right] \frac{h^0}{0!} f(x) + \left[\binom{1}{0} A_0^\alpha + \binom{1}{1} A_1^\alpha\right] \frac{h^1}{1!} f'(x) + \ldots$$

$$+ \left[\binom{\alpha-1}{0} A_0^\alpha + \binom{\alpha-1}{1} A_1^\alpha + \ldots + \binom{\alpha-1}{\alpha-1} A^\alpha_{\alpha-1}\right] \frac{h^{\alpha-1}}{\alpha-1!} f^{\alpha-1}(x)$$

$$+ \left[\binom{\alpha}{0} A_0^\alpha + \binom{\alpha}{1} A_1^\alpha + \ldots + \binom{\alpha}{\alpha-1} A^\alpha_{\alpha-1}\right] \frac{h^\alpha}{\alpha!} f^\alpha(x) + \ldots,$$

in der die eingeklammerten Coefficienten offenbar für $m=1, 2\ldots$ aus dem Ausdrucke

$$\binom{m-1}{0} A_0^\alpha + \binom{m-1}{1} A_1^\alpha + \ldots + \binom{m-1}{\alpha-1} A^\alpha_{\alpha-1}$$

hervorgehen und somit mit $1^{\alpha-1}, 2^{\alpha-1}\ldots$ identisch sind, folglich etc. etc.

Für $x=0$, $h=x$ gehen aus den Theoremen 1 und 2 die folgenden hervor:

3. Wenn die Function $f(x)$ und ihre m ersten Ableitungen von $x=0$ bis $x=x$ endlich und stetig sind, so ist

$$\frac{A_0^\alpha x^0}{0!} f(x) + \frac{A_1^\alpha x^1}{1!} f'(x) + \ldots + \frac{A^\alpha_{m-1} x^{m-1}}{m-1!} f^{m-1}(x)$$

$$= \frac{1^{\alpha-1} x^0}{0!} f(0) + \frac{2^{\alpha-1} x^1}{1!} f'(0) + \ldots + \frac{m^{\alpha-1} x^{m-1}}{m-1!} f^{m-1}(0)$$

$$+ \frac{(\overline{m+1}^{\alpha-1} - A^\alpha_m) x^m}{m!} f^m(x\vartheta), \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Dieses Theorem enthält als speciellen Fall ($\alpha=1$) das Maclaurin-sche Theorem

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \ldots + \frac{x^{m-1}}{m-1!} f^{m-1}(0) + \frac{x^m}{m!} f^m(x\vartheta), \quad 0 < \vartheta < 1.$$

4. Gilt die Gleichung

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots$$

für Werthe von x, die zwischen den Grössen $-\lambda$ und $+\lambda$ liegen, so gilt für dieselben Werthe von x die Gleichung

$$\frac{A_0^\alpha x^0}{0!} f(x) + \frac{A_1^\alpha x^1}{1!} f'(x) + \ldots + \frac{A^\alpha_{\alpha-1} x^{\alpha-1}}{\alpha-1!} f^{\alpha-1}(x)$$

$$= \frac{1^{\alpha-1} x^0}{0!} f(0) + \frac{2^{\alpha-1} x^1}{1!} f'(0) + \ldots.$$

Diese Gleichung besteht auch an den Grenzen der Convergenz für $x = \pm\lambda$, wenn für diese Grenzwerthe die Maclaurin'sche Reihe und ihre $\overline{\alpha-1}$ ersten Ableitungen convergiren.

Es ist einleuchtend und mag noch bemerkt werden, dass, wenn eine ganze rationale Function in Beziehung auf m vom $\overline{\alpha-1}^{\text{ten}}$ Grade durch (α, m) bezeichnet, also

$$a_1 m^{\alpha-1} + a_2 m^{\alpha-2} + \ldots + a_{\alpha-1} m^1 + a_\alpha m^0 = (\alpha, m)$$

und ferner

$$a_1 A^\alpha{}_{m-1} + a_2 A^{\alpha-1}_{m-1} + \ldots + a_{\alpha-1} A^2{}_{m-1} + a_\alpha A^1{}_{m-1} = \varDelta_{m-1}$$

gesetzt wird, dass dann unter denselben Bedingungen, wie die in dem Theoreme 2, resp. 4 angegebenen, die Gleichungen

$$\frac{A_0 h^0}{0!} f(x+h) + \frac{A_1 h^1}{1!} f'(x+h) + \ldots + \frac{A_{\alpha-1} h^{\alpha-1}}{\alpha-1!} f^{\alpha-1}(x+h)$$
$$= \frac{(\alpha, 1) h^0}{0!} f(x) + \frac{(\alpha, 2) h^1}{1!} f'(x) + \ldots,$$

$$\frac{A_0 x^0}{0!} f(x) + \frac{A_1 x^1}{1!} f'(x) + \ldots + \frac{A_{\alpha-1} x^{\alpha-1}}{\alpha-1!} f^{\alpha-1}(x)$$
$$= \frac{(\alpha, 1) x^0}{0!} f(0) + \frac{(\alpha, 2) x^1}{1!} f'(0) + \ldots$$

bestehen.

Hinsichtlich der Zahlen $A^\alpha{}_{m-1}$ ist Folgendes sehr bemerkenswerth:

Die Zahlen $A_0{}^\alpha$, $A_1{}^\alpha$, $A_2{}^\alpha$ ... $A^\alpha{}_{\alpha-1}$ sind die Anfangsglieder der 0ten, 1ten, 2ten ... $\overline{\alpha-1}^{\text{ten}}$ Differenzen der arithmetischen Reihe $\overline{\alpha-1}^{\text{ter}}$ Ordnung

$$1^{\alpha-1},\ 2^{\alpha-1},\ 3^{\alpha-1},\ 4^{\alpha-1} \ldots.$$

Denn um diejenigen Grössen zu bestimmen, die eine arithmetische Reihe $\overline{\alpha-1}^{\text{ter}}$ Ordnung bilden, von der Beschaffenheit, dass $A_0{}^\alpha$ das erste Glied ihrer 0ten Differenzen, d. i. der Reihe selbst, $A_1{}^\alpha$ das erste Glied ihrer 1ten Differenzen u. s. f., $A^\alpha{}_{\alpha-1}$ das erste Glied ihrer $\overline{\alpha-1}^{\text{ten}}$ (letzten) Differenzen ist, hat man nach einer bekannten Formel den Ausdruck

$$\binom{m-1}{0} A_0{}^\alpha + \binom{m-1}{1} A_1{}^\alpha + \ldots + \binom{m-1}{\alpha-1} A^\alpha{}_{\alpha-1}$$

zu bilden, der das m^{te} Glied der gesuchten Reihe darstellt; dieser Ausdruck ist nun identisch mit $m^{\alpha-1}$ und also in der That

$$1^{\alpha-1},\ 2^{\alpha-1},\ 3^{\alpha-1},\ 4^{\alpha-1} \ldots$$

die Grössen, die die angegebene Eigenschaft besitzen.

Die Summe der m ersten Glieder dieser arithmetischen Reihe ist daher nach einer bekannten Gleichung durch die Formel

$$1^{\alpha-1} + 2^{\alpha-1} + 3^{\alpha-1} + \ldots + m^{\alpha-1} = \sum_1^\alpha \binom{m}{k} A^\alpha{}_{k-1}$$

gegeben, was man auch direct aus der Formel

$$m^{\alpha-1} = \sum_1^\alpha \binom{m-1}{k-1} A^\alpha{}_{k-1}$$

findet, wenn man dem m der Reihe nach die Werthe $1, 2, 3 \dots m$ zutheilt und die so entstehenden Gleichungen addirt.

Gewöhnlich schreibt man diese Summenformel in der Form

$$1^{\alpha-1} + 2^{\alpha-1} + 3^{\alpha-1} + \dots + m^{\alpha-1} = \frac{m^\alpha}{\alpha} + \frac{m^{\alpha-1}}{2} + \tfrac{1}{2}\binom{\alpha-1}{1} B_1\, m^{\alpha-2}$$
$$- \tfrac{1}{4}\binom{\alpha-1}{3} B_3\, m^{\alpha-4} + \tfrac{1}{6}\binom{\alpha-1}{5} B_5\, m^{\alpha-6} - \dots,$$

wo B_1, B_3, $B_5 \dots$ die sogenannten Bernoulli'schen Zahlen sind.

Der Coefficient von m in der erst gegebenen Formel ist, wenn nach Potenzen von m geordnet wird:

$$\tfrac{1}{1} A_0{}^\alpha - \tfrac{1}{2} A_1{}^\alpha + \tfrac{1}{3} A_2{}^\alpha - \dots + (-1)^{\alpha-1} \frac{1}{\alpha} A^\alpha{}_{\alpha-1},$$

dagegen in der zuletzt gegebenen $(-1)^{\lambda+1} B_{2\lambda-1}$ oder Null, je nachdem $\alpha = 2\lambda + 1$ oder $\alpha = 2\lambda + 2$ ist; folglich bestehen die Gleichungen

$$(-1)^{\lambda+1} B_{2\lambda-1} = \tfrac{1}{1} A_0{}^{2\lambda+1} - \tfrac{1}{2} A_1{}^{2\lambda+1} + \tfrac{1}{3} A_2{}^{2\lambda+1} - \dots + \frac{1}{2\lambda+1} A^{2\lambda+1}_{2\lambda},$$
$$0 = \tfrac{1}{1} A_0{}^{2\lambda+2} - \tfrac{1}{2} A_1{}^{2\lambda+2} + \tfrac{1}{3} A_2{}^{2\lambda+2} - \dots - \frac{1}{2\lambda+2} A^{2\lambda+2}_{2\lambda+1},$$

durch deren erstere die Bernoulli'schen Zahlen independent bestimmt sind, da es ja die Zahlen $A^\alpha{}_{m-1}$ durch die Gleichung

$$(-1)^{m-1} A^\alpha{}_{m-1} = \binom{m-1}{0} 1^{\alpha-1} - \binom{m-1}{1} 2^{\alpha-1} + \dots + (-1)^{m-1} \binom{m-1}{m-1} m^{\alpha-1}$$

sind.

Bemerkt man übrigens, dass sich aus der fünftletzten, in Bezug auf m identischen Gleichung die Relation

$$A_0{}^\alpha - A_1{}^\alpha + A_2{}^\alpha - \dots + (-1)^{\alpha-1} A^\alpha{}_{\alpha-1} = 0, \quad \alpha > 1$$

ergiebt, so lassen sich diese Formeln vermittelst der Relation

$$A_m{}^{\alpha+1} = \overline{m+1}\, A^\alpha{}_m + m\, A^\alpha{}_{m-1}$$

auch in die Form

$$(-1)^{\lambda+1} B_{2\lambda-1} = -\tfrac{1}{2} A_0{}^{2\lambda} + \tfrac{2}{3} A_1{}^{2\lambda} - \dots + \frac{2\lambda}{2\lambda+1} A^{2\lambda}_{2\lambda-1},$$
$$0 = -\tfrac{1}{2} A_0{}^{2\lambda+1} + \tfrac{2}{3} A_1{}^{2\lambda+1} - \dots - \frac{2\lambda+1}{2\lambda+2} A^{2\lambda+1}_{2\lambda}$$

bringen.

Aus der eben benutzten, in Bezug auf m identischen Gleichung können gleichfalls ohne Mühe die einfachen Relationen

$$A^\alpha{}_{\alpha-1} = 1.2 \dots \alpha-1,$$
$$A^\alpha{}_{\alpha-2} = \frac{1.2 \dots \alpha}{2}, \quad \alpha > 1$$

hergeleitet werden.

Setzt man der Kürze wegen

$$\mathcal{A}^\alpha{}_{m-1} = \frac{A^\alpha{}_{m-1}}{m-1!},$$

so lässt sich die fünftletzte Relation auch durch die Gleichung

$$A_m^{\alpha+1} = \overline{m+1}\, A_m^\alpha + A_{m-1}^\alpha$$

darstellen, aus der erhellt, dass die Zahlen A'_{m-1} ganze Zahlen und somit die Zahlen A^α_{m-1} durch $m-1!$ ohne Rest theilbar sind.

Durch die Substitution $\alpha+1=k+n$, $m=n-1$, $A'^{k+n}_{n-1} = C_k^{-n}$ wird aus ihr die folgende Gleichung

$$C_k^{-n} = C_k^{-(n-1)} + n\, C_{k-1}^{-n},$$

durch die bekanntlich, wenn die offenbar richtigen Gleichungen

$$C_k^{-1} = 1, \quad C_0^{-n} = 1$$

zu ihr hinzugefügt werden, die sogenannten Facultätencoefficienten negativer Exponenten bestimmt sind. Es sind demnach die Zahlen A^α_{m-1} mit den Facultätencoefficienten negativer Exponenten durch die Gleichung

$$n-1!\, C_k^{-n} = A_{n-1}^{k+n}$$

verknüpft. Da nun durch die Facultätencoefficienten negativer Exponenten die Facultätencoefficienten positiver Exponenten ausgedrückt werden können, so ist klar, dass sich auch diese aus den Zahlen A^α_{m-1} herleiten lassen. Die betreffende Formel, durch die das bewirkt werden kann, ist die folgende:

$$C_k^n = (-1)^{k-1} n \binom{n-1}{k}\binom{n+k}{k}\Big[\frac{1}{n+1}\cdot\frac{k}{k+1}\cdot\frac{A_0^{k+1}}{0}$$
$$-\frac{1}{n+2}\cdot\frac{k(k-1)}{(k+1)(k-2)}\cdot\frac{A_1^{k+2}}{1!}+\ldots$$
$$+\frac{(-1)^{k-1}}{n+k}\cdot\frac{k(k-1)\ldots 1}{(k+1)(k+2)\ldots 2k}\cdot\frac{A_{k-1}^{2k}}{k-1!}\Big].$$

Wegen der hierbei zu Grunde gelegten Gleichung verweisen wir auf den Abschnitt „Das Bildungsgesetz der Facultätencoefficienten" in Schlömilch's Compendium der höheren Analysis, Bd. 2, Braunschweig 1866.

In dem eben angeführten Werke befinden sich auf Seite 11 zwei Formeln zur independenten Bestimmung der Tangenten- und Secantencoefficienten; diese lassen sich, wie man sofort erkennt, auch in der Form

$$(-1)^{\mu-1}\tau_{2\mu-1} = \frac{1\, A_0^{2\mu-1}}{\sqrt{2^0}} \sin\left(\tfrac{2}{4}\pi\right) - \frac{2\, A_1^{2\mu-1}}{\sqrt{2^1}} \sin\left(\tfrac{3}{4}\pi\right) + \ldots$$
$$+ \frac{\overline{2\mu-1}\, A_{2\mu-2}^{2\mu-1}}{\sqrt{2^{2\mu-2}}} \sin\left(\frac{2\mu\pi}{4}\right),$$

$$(-1)^{\mu-1}\tau_{2\mu} = \frac{1\, A_0^{2\mu}}{\sqrt{2^0}} \cos\left(\tfrac{2}{4}\pi\right) - \frac{2\, A_1^{2\mu}}{\sqrt{2^1}} \cos\left(\tfrac{3}{4}\pi\right) + \ldots$$
$$- \frac{2\mu\, A_{2\mu-1}^{2\mu}}{\sqrt{2^{2\mu-1}}} \cos\left(\frac{2\mu+1}{4}\pi\right)$$

schreiben. Die Formel, aus der sie hergeleitet, und die dort in etwas anderer Gestalt auf Seite 10 steht, ist die folgende:

$$D_x^n F(e^x) = \frac{A_0^n}{0!} e^{1x} F'(e^x) + \frac{A_1^n}{1!} e^{2x} F''(e^x) + \ldots + \frac{A^n_{n-1}}{n-1!} e^{nx} F^{(n)}(e^x).$$

Endlich mag noch bemerkt werden, dass zwischen den Zahlen

$$\Delta^n 0^m = \binom{n}{0} n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m - \ldots,$$

die in der endlichen Differenzenrechnung (vergl. die Grundlehren der endlichen Differenzen- und Summenrechnung von George Boole, deutsch bearbeitet von Dr. Schnuse, Braunschweig 1867) auftreten, und den Zahlen A^α_{m-1}, wie man augenblicklich erkennt, die Relation

$$\Delta^n 0^m = n A^m_{n-1}$$

besteht.

Eine kleine Tafel der Zahlen A^α_{m-1} findet man am Ende dieser Abhandlung.

Als Anhang lassen wir hier einige Reihenentwickelungen mit Angabe der nöthigen Convergenzbedingungen folgen, die sich vermittelst des Theorems 4 mit Leichtigkeit aus bekannten Theoremen herleiten lassen.

Die Reihenentwickelung

$$\binom{m}{0} A_0^\alpha x^0 (1+x)^m + \binom{m}{1} A_1^\alpha x' (1+x)^{m-1} + \ldots$$
$$+ \binom{m}{\alpha-1} A^\alpha_{\alpha-1} x^{\alpha-1} (1+x)^{m+1-\alpha}$$
$$= \binom{m}{0} 1^{\alpha-1} x^0 + \binom{m}{1} 2^{\alpha-1} x' + \ldots$$

gilt für jedes endliche m, wenn der absolute Werth von x kleiner als die positive Einheit ist; im Falle $x=+1$ muss dagegen m zwischen $\alpha-2$ und $+\infty$, und im Falle $x=-1$ zwischen $\alpha-1$ und $+\infty$ liegen.

Die Formel

$$\left[1 + \frac{A_1^\alpha}{1!} x + \frac{A_2^\alpha}{2!} x^2 + \ldots + \frac{A^\alpha_{\alpha-1}}{\alpha-1!} x^{\alpha-1}\right] e^x = 1 + \frac{2^{\alpha-1}}{1!} x + \frac{3^{\alpha-1}}{2!} x^2 + \ldots$$

besteht für jedes endliche x.

Die Gleichungen

$$\sin x + \frac{A_1^\alpha}{1} x \cos x - \frac{A_2^\alpha}{2!} x^2 \sin x - \frac{A_3^\alpha}{3!} x^3 \cos x + \ldots = \frac{2^{\alpha-1}}{1!} x - \frac{4^{\alpha-1}}{3!} x^3 + \ldots,$$

$$\cos x - \frac{A_1^\alpha}{1!} x \sin x - \frac{A_2^\alpha}{2!} x^2 \cos x + \frac{A_3^\alpha}{3!} x^3 \sin x + \ldots = 1 - \frac{3^{\alpha-1}}{2!} x^2 + \frac{5^{\alpha-1}}{4!} x^4 - \ldots$$

gelten für jedes endliche x.

Die Reihenentwickelung

$$l(1+x) + \frac{A_1^\alpha}{1}\left(\frac{x}{1+x}\right)^1 - \frac{A_2^\alpha}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \ldots + (-1)^\alpha \frac{A^\alpha_{\alpha-1}}{\alpha-1}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{\alpha-1}$$
$$= \tfrac{2}{1}{}^{\alpha-1} x - \tfrac{3}{2}{}^{\alpha-1} x^2 + \ldots$$

gilt für jedes x, das zwischen der positiven und negativen Einheit liegt, im Falle $\alpha=1$ auch für $x=+1$.

Die Gleichung

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg} x + \frac{A_1^\alpha}{1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^1 \sin\left(1 \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right) - \frac{A_2^\alpha}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^1 \sin\left(2 \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right) + \ldots \\ + (-1)^\alpha \frac{A^\alpha_{\alpha-1}}{\alpha-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^{\alpha-1} \sin\left(\overline{\alpha-1} \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right) \\ = \frac{2^{\alpha-1}}{1} x - \frac{4^{\alpha-1}}{3} x^3 + \frac{6^{\alpha-1}}{5} x^5 - \ldots\end{aligned}$$

gilt für jedes x, dessen absoluter Werth kleiner als Eins ist, im Falle $\alpha=1$ auch für $x=\pm 1$.

Die Reihenentwickelung

$$\begin{aligned}\Bigg[1 + \frac{a \,.\, b}{1 \,.\, (c-b-a-1)} A_1^\alpha + \frac{a(a+1) \,.\, b(b+1)}{1.2\,(c-b-a-1)(c-b-a-2)} A_2^\alpha + \ldots \\ + \frac{a(a+1)\ldots(a+\alpha-2) \,.\, b(b+1)\ldots(b+\alpha-2)}{1.2\ldots(\alpha-1).(c-b-a-1)(c-b-a-2)\ldots(c-b-a-\alpha+1)} A^\alpha_{\alpha-1}\Bigg] \\ \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-b-a)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} = 1 + \frac{a\ b}{1.c} 2^{\alpha-1} + \frac{a(a+1) \,.\, b(b+1)}{1.2.c(c+1)} 3^{\alpha-1} + \ldots\end{aligned}$$

besteht für jedes positive a, b, c unter der Bedingung, dass

$$c-b-a > \alpha-1$$

ist.

Die Reihenentwickelung

$$\begin{aligned}\Bigg[1 - \binom{m}{1}\frac{a}{b+m-1} A_1^\alpha + \binom{m}{2}\frac{a(a+1)}{(b+m-1)(b+m-2)} A_2^\alpha - \ldots \\ + (-1)^{\alpha-1}\binom{m}{\alpha-1}\frac{a(a+1)\ldots(a+\alpha-2)}{(b+m-1)(b+m-2)\ldots(b+m-\alpha+1)} A^\alpha_{\alpha-1}\Bigg] \\ \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b+m)}{\Gamma(b)\,\Gamma(a+b+m)} = \binom{m}{0}\frac{1^{\alpha-1}}{a(a+1)\ldots(a+b-1)} \\ - \binom{m}{1}\frac{2^{\alpha-1}}{(a+1)(a+2)\ldots(a+b)} + \ldots\end{aligned}$$

gilt für jedes positive a, b, m, wenn $b+m>\alpha-1$ und b eine ganze Zahl ist.

Gilt die Gleichung

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots$$

für Werthe von h, die zwischen den Grössen $-\lambda$ und $+\lambda$ liegen, so besteht, wenn m eine ganze positive Zahl bedeutet, die Gleichung

$$\begin{aligned}\binom{m}{m} f(x+mh) - \binom{m}{m-1} f(x+\overline{m-1}\,h) + \ldots - (-1)^m \binom{m}{1} f(x+1h) \\ + (-1)^m \binom{m}{0} f(x) = \frac{A^m_{m-1}}{m-1!} h^m f^m(x) + \frac{A^{m+1}_{m-1}}{m-1!}\frac{h^{m+1}}{m+1} f^{m+1}(x) \\ + \frac{A^{m+2}_{m-1}}{m-1!}\frac{h^{m+2}}{(m+1)(m+2)} f^{m+2}(x) + \ldots\end{aligned}$$

für Werthe von h, die zwischen den Grössen $-\frac{\lambda}{m}$ und $+\frac{\lambda}{m}$ liegen; sie besteht auch noch an den Grenzen der Convergenz für $h = \pm\frac{\lambda}{m}$, wenn die erste Gleichung für $h = \pm\lambda$ richtig bleibt.

Beweis. Lässt man in der Gleichung

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots - \lambda < h < +\lambda$$

an die Stelle von h der Reihe nach mh, $\overline{m-1}h \ldots 1h$ treten, so entstehen offenbar die Gleichungen

$$f(x+mh) = f(x) + m\frac{h}{1} f'(x) + m^2 \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots - \frac{\lambda}{m} < h < +\frac{\lambda}{m},$$

$$f(x) + \overline{m-1}\,h) = f(x) + \overline{m-1}\frac{h}{1} f'(x) + \overline{m-1}^2 \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots$$
$$-\frac{\lambda}{m-1} < h < +\frac{\lambda}{m-1}$$

. . . .

$$f(x+1h) = f(x) + 1 . \frac{h}{1} f'(x) + 1^2 \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots - \frac{\lambda}{1} < h < +\frac{\lambda}{1}.$$

Multiplicirt man nun diese, und zwar die erste mit $\binom{m}{m}$, die zweite mit $-\binom{m}{m-1}$ u. s. w., die letzte mit $(-1)^{m-1}\binom{m}{1}$, und addirt dann die so entstehenden Gleichungen, so wird

$$\binom{m}{m} f(x+mh) - \binom{m}{m-1} f(x+\overline{m-1}\,h) + . \; . + (-1)^{m-1}\binom{m}{1} f(x+1h)$$
$$= \left[\binom{m}{m} - \binom{m}{m-1} + \ldots + (-1)^{m-1}\binom{m}{1}\right] f(x)$$
$$+ \left[\binom{m}{m} m - \binom{m}{m-1} \overline{m-1} + \; . \; + (-1)^{m-1}\binom{m}{1} 1\right] \frac{h}{1} f'(x)$$
$$+ \left[\binom{m}{m} m^2 - \binom{m}{m-1} \overline{m-1}^2 + \ldots + (-1)^{m-1}\binom{m}{1} 1^2\right] \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots$$
$$-\frac{\lambda}{m} < h < +\frac{\lambda}{m}$$

oder, wenn das erste rechts stehende Glied auf die linke Seite gebracht und die Relationen

$$\binom{m}{m} - \binom{m}{m-1} + \ldots + (-1)^{m-1}\binom{m}{1} + (-1)^m \binom{m}{0} = 0,$$
$$\binom{m}{m} m\alpha - \binom{m}{m-1} \overline{m-1}^\alpha + \ldots + (-1)^{m-1}\binom{m}{1} 1\alpha = m\,A\alpha_{m-1}$$

berücksichtigt werden,

$$\binom{m}{m} f(x+mh) - \binom{m}{m-1} f(x+\overline{m-1}\,h) + \ldots - (-1)^m \binom{m}{1} f(x+1h)$$
$$+ (-1)^m \binom{m}{0} f(x) = \frac{m\,A^1_{m-1}}{1!} h f'(x) + \frac{m\,A^2_{m-1}}{2!} h^2 f''(x) + \ldots$$
$$-\frac{\lambda}{m} < h < +\frac{\lambda}{m},$$

und hieraus folgt wegen der Relation

$$A^\alpha_{m-1} = 0, \quad m > \alpha$$

sofort die Richtigkeit des aufgestellten Satzes, wenigstens bis auf den die Grenzen der Convergenz betreffenden Zusatz, dessen Richtigkeit nach diesem Beweise aber von selbst erhellt.

Für $x=0$, $h=x$ geht aus dem obigen Theorem das folgende hervor:

Gilt die Gleichung

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots$$

für Werthe von x, die zwischen den Grössen $-\lambda$ und $+\lambda$ liegen, so besteht die Gleichung

$$\binom{m}{m} f(mx) - \binom{m}{m-1} f(\overline{m-1}\,x) + \ldots - (-1)^m \binom{m}{1} f(1x) + (-1)^m \binom{m}{0} f(0)$$
$$= \frac{A^m_{m-1}}{m-1!} x^m f^m(0) + \frac{A^{m+1}_{m-1}}{m-1!} \frac{x^{m+1}}{m+1} f^{m+1}(0)$$
$$+ \frac{A^{m+2}_{m-1}}{m-1!} \frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)} f^{m+2}(0) + \ldots$$

für Werthe von x, die zwischen den Grössen $-\frac{\lambda}{m}$ und $+\frac{\lambda}{m}$ liegen; sie besteht auch noch an den Grenzen der Convergenz für $x = \pm\frac{\lambda}{m}$, wenn die erste Gleichung für $x = \pm\lambda$ richtig bleibt.

Nimmt man $f(x) = e^x$ an, so erhält man nach diesem Theoreme, da die Gleichung

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

für jedes endliche x gilt, also $\lambda = \infty$ ist und

$$\binom{m}{m} e^{mx} - \binom{m}{m-1} e^{\overline{m-1}\,x} + \ldots - (-1)^m \binom{m}{1} e^{1x} + (-1)^m \binom{m}{0} e^0 = (e^x - 1)^m$$

gesetzt werden darf, die für jedes endliche x und jedes endliche positive ganze m bestehende Gleichung

$$(e^x - 1)^m = \frac{A^m_{m-1}}{m-1!} x^m + \frac{A^{m+1}_{m-1}}{m-1!} \frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{A^{m+2}_{m-1}}{m-1!} \frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + \ldots.$$

Für $f(x) = l(1+x)$ und $f(x) = (1+x)^n$ erhält man folgende Reihenentwickelungen, die wir von den vielen Reihenentwickelungen, die man vermittelst des obigen Theoremes aufstellen kann, hier noch anführen wollen:

$$\binom{m}{1} l(1+1x) - \binom{m}{2} l(1+2x) + \ldots + (-1)^{m-1} \binom{m}{m} l(1+mx)$$

$$= \frac{m A_{m-1}^{m}}{m} x^m - \frac{m A_{m-1}^{m+1}}{m+1} x^{m+1} + \frac{m A_{m-1}^{m+2}}{m+2} x^{m+2} + \ldots$$

$$-\frac{1}{m} < x < \underline{+} \frac{1}{m},$$

$$\binom{m}{m} (1+mx)^n - \binom{m}{m-1} (1+\overline{m-1}\,x)^n + \ldots - (-1)^m \binom{m}{1} (1+1x)^n$$

$$+ (-1)^m \binom{m}{0} 1^n = \binom{n}{m} m A_{m-1}^{m} x^m$$

$$+ \binom{n}{m+1} m A_{m-1}^{m+1} x^{m+1} + \ldots$$

$$-1 < x < +1, \quad -\infty < n < +\infty,$$

$$x = +1, \quad -1 < n < +\infty,$$

$$x = -1, \quad 0 < n < +\infty.$$

Anknüpfend an die drittletzte Gleichung, die man wegen der Relation

$$\overline{n-1}\,!\; C_k^{-n} = A_{n-1}^{k+n}$$

auch in der Form

$$1) \qquad (e^x - 1)^m = C_0^{-m} x^m + \frac{C_1^{-m} x^{m+1}}{m+1} + \frac{C_2^{-m} x^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + \ldots$$

schreiben kann, und die sich übrigens vermittelst der Formel

$$D_x{}^n F(e^x) = C_{n-1}^{-1} e^{1x} F'(e^x) + C_{n-2}^{-2} e^{2x} F''(e^x) + \ldots + C_0^{-n} e^{nx} F^n(e^x)$$

auch auf ganz ähnliche Weise entwickeln lässt, wie die analoge Gleichung

$$2) \qquad [l(1+x)]^m = C_0{}^m x^m - \frac{C_1{}^{m+1} x^{m+1}}{m+1} + \frac{C_2{}^{m+2} x^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + \ldots$$

$$-1 < x \leq +1$$

mit Hilfe der Formel

$$D_x{}^n F(lx) = \frac{1}{x^n} \left[C_0{}^n F^n(lx) - C_1{}^n F^{n-1}(lx) + \ldots + (-1)^{n-1} C_n{}^n F'(lx) \right]$$

in dem Abschnitte: „Die höheren Differentialquotienten“ in Schlömilch's Compendium der höheren Analysis, Bd. 2, hergeleitet ist, geben wir in dem Folgenden die Entwickelung einiger Formeln, aus denen die grosse Analogie, die zwischen den Facultätencoefficienten negativer Exponenten $C_k{}^{-n}$ und den Facultätencoefficienten positiver Exponenten $C_k{}^n$ besteht und von der schon die oben angeführten Gleichungen zeugen, erhellen, und aus denen man erkennen wird, dass die Facultätencoefficienten negativer Exponenten, wenn man so sagen darf, auf dem Gebiete der Exponentialgrössen, die Facultätencoefficienten positiver Exponenten dagegen auf dem Gebiete der Logarithmen eine Rolle spielen.

Dividirt man die Gleichung 1) durch x^m, differentiirt dann k-mal nach x und setzt alsdann $x=0$, so erhält man

$$3)\qquad \left[D_x^k\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^m\right]_0=\frac{1.2.3\ldots k}{(m+1)(m+2)\ldots(m+k)}\,C_k^{-m}.$$

Diese Gleichung, der die Gleichung

$$\left[D_x^k\left(\frac{l(1+x)}{x}\right)^m\right]_0=(-1)^k\,\frac{1.2.3\ldots k}{(m+1)(m+2)\ldots(m+k)}\,C_k^{m+k}$$

entspricht, dient zur algebraischen Bestimmung des Ausdrucks

$$\left[D_x^k\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^n\right]_0,$$

in dem n nicht, wie m, nur eine positive ganze, sondern irgend eine beliebige Zahl sein kann.

Bekanntlich ist nämlich, wenn y eine Function von x bedeutet,

$$D_x^k\,y^n=n\binom{k-n}{k}\left\{\frac{\binom{k}{1}}{n-1}\,y^{n-1}\,D_x^k\,y+\frac{\binom{k}{2}}{n-2}\,y^{n-2}\,D_x^k\,y^2-\ldots\right.$$
$$\left.+(-1)^k\,\frac{\binom{k}{k}}{n-k}\,y^{n-k}\,D_x^k\,y^k\right\};$$

setzt man daher $y=\frac{e^x-1}{x}$, so kommt man, wenn $x=0$, also $y=1$ angenommen wird, unter Benutzung der Formel 3) und unter Anwendung der abkürzenden Bezeichnung

$$P_k^n=n\binom{k-n}{k}\left\{-\frac{k}{k+1}\,\frac{C_k^{-1}}{n-1}+\frac{k(k-1)}{(k+1)(k+2)}\,\frac{C_k^{-2}}{n-2}-\ldots\right.$$
$$\left.+(-1)^k\frac{k(k-1)\ldots2.1}{(k+1)(k+2)\ldots2k}\,\frac{C_k^{-k}}{n-k}\right\}$$

auf die Gleichung

$$4)\qquad \left[D_x^k\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^n\right]_0=P_k^n.$$

Die analoge, auf ähnliche Weise entwickelbare Gleichung ist

$$5)\qquad \left[D_x^k\left(\frac{l(1+x)}{x}\right)^n\right]_0=(-1)^k\,Q_k^n,$$

wo

$$Q_k^n=n\binom{k-n}{k}\left\{-\frac{k}{k+1}\,\frac{C_k^{k+1}}{n-1}+\frac{k(k-1)}{(k+1)(k+2)}\,\frac{C_k^{k+2}}{n-2}-\ldots\right.$$
$$\left.+(-1)^k\,\frac{k(k-1)\ldots2.1}{(k+1)(k+2)\ldots2k}\,\frac{C_k^{2k}}{n-k}\right\}$$

zu nehmen ist.

Wenn man in der Gleichung 1) x an die Stelle von e^x-1 und also $l(1+x)$ an die Stelle von x treten lässt, so erhält man die Gleichung

$$x^m=C_0^{-m}[l(1+x)]^m+\frac{C_1^{-m}\,[l(1+x)]^{m+1}}{m+1}+\frac{C_2^{-m}\,[l(1+x)]^{m+2}}{(m+1)(m+2)}+\ldots.$$

Dieselbe Entwickelung für x^m muss man natürlich erhalten, wenn man in der transformirten Maclaurin'schen Reihe

$$f(x) = A_0 + \frac{A_1}{1!}\varphi(x) + \frac{A_2}{2!}\varphi(x)^2 + \ldots + \frac{A_n}{n!}\varphi(x)^n + R_{n+1},$$

$$A_0 = f(0), \quad A_k = \left[D_x^{k-1}\left(\frac{x}{\varphi(x)}\right)^k f'(x)\right]_0,$$

$$R_{n+1} = \frac{1}{n!}\int_0^1 [\varphi(x) - \varphi(t)]^n \left[D_\varrho^n\left(\frac{\varrho}{\varphi(x+\varrho) - \varphi(x)}\right)^{n+1} f'(t+\varrho)\right]_0 \varphi'(t)\,dt,$$

$$f(x) = x^m, \quad \varphi(x) = l(1+x)$$

annimmt; es muss daher für jedes positive k incl. $k=0$

$$\frac{C_k^{-m}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+k)} = \frac{A_{m+k}}{m+k!} = \frac{m}{m+k!}\left[D_x^{m+k-1}\left(\frac{x}{l(1+x)}\right)^{m+k} x^{m-1}\right]_0$$

oder

$$m-1!\, C_k^{-m} = \left[D_x^{m+k-1}\left(\frac{x}{l(1+x)}\right)^{m+k} . x^{m-1}\right]_0$$

und folglich nach Anwendung der Regel für die Differentiation der Producte

$$C_k^{-m} = \binom{m+k-1}{k}\left[D_x^k\left(\frac{x}{l(1+x)}\right)^{m+k}\right]_0$$

sein.

Die analoge Gleichung ist

$$C_k^{m+k} = (-1)^k \binom{m+k-1}{k}\left[D_x^k\left(\frac{x}{e^x - 1}\right)^{m+k}\right]_0.$$

Die in diesen Gleichungen stehenden Differentialquotienten sind infolge der Gleichungen 4) und 5) identisch resp. mit den Zahlen

$$(-1)^k\, Q_k^{-(m+k)} \text{ und } P_k^{-(m+k)};$$

es bestehen daher die bemerkenswerthen Gleichungen

$$C_k^{-m} = (-1)^k (m+k)\binom{m+k-1}{k}\binom{m+2k}{k}\left\{-\frac{k}{k+1}\,\frac{C_k^{k+1}}{m+k+1} + \frac{k(k-1)}{(k+1)(k+2)}\,\frac{C_k^{k+2}}{m+k+2} - \ldots + (-1)^k \frac{k(k-1)\ldots 2.1}{(k+1)(k+2)\ldots 2k}\,\frac{C_k^{2k}}{m+2k}\right\},$$

$$C_k^{m+k} = (-1)^k (m+k)\binom{m+k-1}{k}\binom{m+2k}{k}\left\{-\frac{k}{k+1}\,\frac{C_k^{-1}}{m+k+1} + \frac{k(k-1)}{(k+1)(k+2)}\,\frac{C_k^{-2}}{m+k+2} - \ldots + (-1)^k \frac{k(k-1)\ldots 2.1}{(k+1)(k+2)\ldots 2k}\,\frac{C_k^{-k}}{m+2k}\right\},$$

nach welchen sich die Facultätencoefficienten negativer Exponenten durch die Facultätencoefficienten positiver Exponenten, und umgekehrt, ausdrücken lassen.

Entwickelt man $\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^n$ nach dem Maclaurin'schen Theorem nach Potenzen von x, so erhält man unter Benutzung der Formel 4) die Reihenentwickelung

$$\left(\frac{e^x-1}{k}\right)^n = 1 + \frac{P_1^n}{1!}x + \frac{P_2^n}{2!}x^2 + \ldots,$$

von der man sicher weiss, dass sie für $n=m$, d. h. für positive ganze n, und, sofern $-2\pi < x < +2\pi$ angenommen wird, auch für $n=-1$ giltig ist; denn im ersten Falle geht sie nach Multiplication mit x^n in die Gleichung 1) und im zweiten Falle in die Reihenentwickelung

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 - \tfrac{1}{2}x + \frac{B_1}{2!}x^2 - \frac{B_3}{4!}x^4 + \ldots$$
$$-2\pi < x < +2\pi$$

über.

Ebenso erhält man unter Benutzung der Formel 5), wenn man

$$\left[\frac{l(1+x)}{x}\right]^n$$

nach dem Maclaurin'schen Theorem nach Potenzen von x entwickelt, die Reihenentwickelung

$$\left[\frac{l(1+x)}{x}\right]^n = 1 - \frac{Q_1^n x}{1!} + \frac{Q_2^n x^2}{2!} - \ldots,$$

und von dieser weiss man, dass sie, sofern $-1 < x \leqq +1$ angenommen wird, für $n=m$, d. h. für positive ganze n giltig ist, da sie nämlich in diesem Falle nach Multiplication mit x^n in die Gleichung 2) übergeht.

Zufolge des Umstandes, dass hiernach für

$$\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^m, \quad \left(\frac{l(1+x)}{x}\right)^m, \quad \frac{x}{e^x-1}$$

je zwei Reihenentwickelungen nach Potenzen von x statthaben, ergeben sich durch Vergleichung der Coefficienten gleicher Potenzen von x die folgenden bemerkenswerthen Relationen:

$$C_k^{-m} = (-1)^k m \binom{m-1}{k}\binom{m+k}{k}\left\{-\frac{k}{k+1}\frac{C_k^{-1}}{m-1} + \frac{k(k-1)}{(k+1)(k+2)}\frac{C_k^{-2}}{m-2} - \ldots \right.$$
$$\left. + (-1)^k \frac{k(k-1)\ldots 2.1}{(k+1)(k+2)\ldots 2k}\frac{C_k^{-k}}{m-k}\right\},$$

$$C_k^{m+k} = (-1)^k m \binom{m-1}{k}\binom{m+k}{k}\left\{-\frac{k}{k+1}\frac{C_k^{k+1}}{m-1} + \frac{k(k-1)}{(k+1)(k+2)}\frac{C_k^{k+2}}{m-2} - \ldots \right.$$
$$\left. + (-1)^k \frac{k(k-1)\ldots 2.1}{(k+1)(k+2)\ldots 2k}\frac{C_k^{2k}}{m-k}\right\},$$

$$(-1)^\lambda B_{2\lambda-1} = \frac{2\lambda}{2}C_{2\lambda}^{-1} - \frac{2\lambda(2\lambda-1)}{3.(2\lambda+2)}C_{2\lambda}^{-2} + \frac{2\lambda(2\lambda-1)(2\lambda-2)}{4.(2\lambda+2)(2\lambda+3)}C_{2\lambda}^{-3} - \ldots$$
$$- \frac{2\lambda(2\lambda-1)\ldots 2.1}{(2\lambda+1)(2\lambda+2)\ldots 4\lambda}C_{2\lambda}^{-2\lambda},$$

deren letztere besonders lehrt, wie die Bernoulli'schen Zahlen durch die Facultätencoefficienten negativer Exponenten ausgedrückt werden können.

Kleine Tafel der Zahlen A_{m-1}^{α}.

$$A_m^{\alpha+1} = \overline{m+1}\, A_m^{\alpha} + m\, A_{m-1}^{\alpha}; \quad A^1_0 = 1, \quad A^1_{m-1} = 0, \quad m > 1.$$

$\alpha =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$A_0 =$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$A_1 =$		1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095
$A_2 =$			2	12	50	180	602	1932	6050	18660	57002	173052	523250
$A_3 =$				6	60	390	2100	10206	46620	204630	874500	3669006	15195180
$A_4 =$					24	360	3360	25200	166824	1020600	5921520	33105600	180204024
$A_5 =$						120	2520	31920	323520	2775240	21754440	160134240	1126333440
$A_6 =$							720	20160	332640	4269600	46538640	456297120	4154885280
$A_7 =$								5040	181440	3780000	60127200	806788080	9648384480
$A_8 =$									40320	1814400	46569600	900144000	14555600640
$A_9 =$										362880	19958400	618710400	14288400000
$A_{10} =$											3628800	239500800	8821612800
$A_{11} =$												39916800	3113510400
$A_{12} =$													479001600

X.

Ueber das Integral der Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0.$$

Von

Dr. Ludwig Matthiessen

in Husum.

Ist V das Potential der Anziehung eines unendlichen homogenen Cylinders von beliebigem Querschnitt, so ist für jeden Punkt (x, y), welcher keinen Theil seiner Masse bildet, weil V unabhängig von der der Axe parallelen Coordinate z ist,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0.$$

Eine nur experimentelle Bestimmung des allgemeinen Integrals dieser Gleichung findet sich bei Laplace (*Méc. cél. liv. II*, § 11—13). Um die Gleichung zu integriren, führe man die Polarcoordinaten r und ω ein, indem $x=r\sin\omega$, $y=r\cos\omega$ gesetzt wird. Hieraus folgt

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\sin\omega,\quad \frac{\partial x}{\partial\omega}=r\cos\omega,\quad \frac{\partial y}{\partial r}=\cos\omega,\quad \frac{\partial y}{\partial\omega}=-r\sin\omega;$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial r^2}=0,\quad \frac{\partial^2 x}{\partial r\,\partial\omega}=\cos\omega,\quad \frac{\partial^2 x}{\partial\omega^2}=-r\sin\omega;$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial r^2}=0,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial r\,\partial\omega}=-\sin\omega,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial\omega^2}=-r\cos\omega.$$

Mithin

$$\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{\partial V}{\partial x}\sin\omega+\frac{\partial V}{\partial y}\cos\omega,$$

$$\frac{\partial V}{\partial\omega}=\frac{\partial V}{\partial x}r\cos\omega-\frac{\partial V}{\partial y}r\sin\omega,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\sin\omega^2+2\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\sin\omega\cos\omega+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\cos\omega^2,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\omega^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}r^2\cos\omega^2-2\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}r^2\sin\omega\cos\omega$$
$$+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}r^2\sin\omega^2-\frac{\partial V}{\partial x}r\sin\omega-\frac{\partial V}{\partial y}r\cos\omega.$$



Demnach ist

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial r}\sin\omega+\frac{\partial V}{\partial\omega}\cdot\frac{\cos\omega}{r},\quad \frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial V}{\partial r}\cos\omega-\frac{\partial V}{\partial\omega}\cdot\frac{\sin\omega}{r};$$

$$r^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial\omega^2}=r^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)-r\left(\frac{\partial V}{\partial x}\sin\omega+\frac{\partial V}{\partial y}\cos\omega\right)$$

$$=r^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)-r\frac{\partial V}{\partial r}.$$

Folglich ist

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial\omega^2}=0.$$

Multiplicirt man die Gleichung mit r^2 und beachtet, dass

$$r^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+r\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{r\left[r\,\partial\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)\partial r\right]}{\partial r}=r\left\{\frac{\partial\left[r\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)\right]}{\partial r}\right\}$$

ist, so verwandelt sie sich in

$$-r\left\{\frac{\partial\left[r\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)\right]}{\partial r}\right\}=\frac{\partial^2 V}{\partial\omega^2}.$$

Laplace nimmt nun vorläufig an, es sei $V=r.F(\omega)$. Dadurch wird offenbar vorausgesetzt, dass bei constantem ω das Potential V dem Radius vector proportional bleibe, dass also die Grösse der Massenanziehung nach seiner Richtung, nämlich

$$R=f\frac{\partial V}{\partial r}=F(\omega)$$

constant sei für irgend eine und dieselbe Richtung des angezogenen Punktes. Diese Annahme ist aber sehr willkürlich und trifft wenigstens bei dem elliptischen Cylinder nicht zu. Bei diesem ist die Function ziemlich complicirt, und zwar ist

$$f\frac{\partial V}{\partial r}=-4\pi f\varrho\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\sqrt{1+\lambda_1^2}}\cdot\frac{\lambda_1^2}{\lambda^2}.r.\frac{\cos\omega^2+\sin\omega^2\sqrt{1+\lambda_1^2}}{1+\sqrt{1+\lambda_1^2}},$$

worin $\sqrt{1+\lambda^2}$ das Axenverhältniss des elliptischen Querschnittes, $\sqrt{1+\lambda_1^2}$ das des homofocalen Cylinders, auf dessen Oberfläche der angezogene Punkt liegt, bezeichnen. Die Anziehung R nimmt also mit wachsendem r ab und nähert sich offenbar der Grenze

$$R=-2f\varrho\frac{Q}{r}=\varphi(r).$$

Die vorläufige Annahme $V=r.F(\omega)$ scheint Laplace übrigens nur gemacht zu haben, um zu einer speciellen Form des Integrals V zu gelangen. Für einen unendlichen Cylinder mit kreisförmigem Querschnitt findet man leicht

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\omega^2}=0,\quad\frac{\partial V}{\partial\omega}=0,\quad f\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{C}{r}.$$

Gemäss der Annahme $V=r\,.\,F(\omega)$ ist nun weiter $V=r\frac{\partial V}{\partial r}$ und folglich der erste Theil der Differentialgleichung in Polarcoordinaten gleich $-V$, woraus dann $V+\frac{\partial^2 V}{\partial \omega^2}=0$ folgt, oder auch

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \omega^2}+F=0.$$

Setzt man $F(\omega)=e^{m\omega}$, also $F'(\omega)=m\,.\,e^{m\omega}$, $F''(\omega)=m^2\,.\,e^{m\omega}$, so geht die Differentialgleichung über in

$$e^{m\omega}(m^2+1)=0,$$

woraus die Bedingungsgleichungen $m=+\sqrt{-1}$ und $m=-\sqrt{-1}$ folgen. Es ist demgemäss

$$V=C_1\,.\,r\,.\,e^{\omega i}+C_2\,.\,r\,.\,e^{-\omega i}.$$

Hierfür substituirt nun Laplace wieder die allgemeine Form des Integrals, nämlich

$$V=f(r\cos\omega+r\sin\omega\,.\sqrt{-1})+\varphi(r\cos\omega-r\sin\omega\sqrt{-1})$$

oder auch

$$V=f(y+xi)+\varphi(y-xi).$$

Dies ist in Wirklichkeit die allgemeinste Form des Integrals für jedes beliebige reelle oder complexe V. Wir werden weiter unten eine directe Ableitung des Integrals für jeden reellen Werth von V geben.

Laplace benutzt dieses Theorem auf eine scharfsinnige Weise zur Berechnung der Componenten der Anziehung eines unendlichen Cylinders mit elliptischem Querschnitt, wobei er die Halbaxen des elliptischen Querschnittes zu Coordinatenaxen wählt. Da in dieser Voraussetzung V denselben Werth behalten muss für gleiche positive und negative Coordinaten, so ist offenbar einfacher

$$V=f(y+xi)+f(y-xi).$$

Dies Integral gilt also schlechterdings für den Fall, wo der Querschnitt des Cylinders aus vier congruenten Quadranten besteht.

Es lässt sich nun leicht nachweisen, dass dies Integral der Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0$$

genügt. Es ist nämlich

$$\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial V}{\partial(y+xi)}\cdot\frac{\partial(y+xi)}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial(y-xi)}\cdot\frac{\partial(y-xi)}{\partial y},$$

und wegen

$$\frac{\partial(y+xi)}{\partial y}=\frac{\partial(y-xi)}{\partial y}=1,$$

$$\frac{\partial(y+xi)}{\partial x}=-\frac{\partial(y-xi)}{\partial x}=\sqrt{-1},$$

$$Y = f\frac{\partial V}{\partial y} = f\frac{\partial V}{\partial(y+xi)} + f\frac{\partial V}{\partial(y-xi)} = f'(y+xi) + f'(y-xi),$$

$$X = f\frac{\partial V}{\partial x} = if\frac{\partial V}{\partial(y+xi)} - if\frac{\partial V}{\partial(y-xi)} = i\{f'(y+xi) - f'(y-xi)\}.$$

Mithin

$$f\frac{\partial V}{\partial(y+xi)} = f'(y+xi) = \tfrac{1}{2}f\left\{\frac{\partial V}{\partial y} - i\frac{\partial V}{\partial x}\right\} = \tfrac{1}{2}\{Y - Xi\},$$

$$f\frac{\partial V}{\partial(y-xi)} = f'(y-xi) = \tfrac{1}{2}f\left\{\frac{\partial V}{\partial y} + i\frac{\partial V}{\partial x}\right\} = \tfrac{1}{2}\{Y + Xi\}.$$

Auf ähnliche Art findet man

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = f''(y+xi) + f''(y-xi),$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = i^2[f''(y+xi) + f''(y-xi)],$$

wodurch die Behauptung bewiesen ist.

Wir wollen zunächst auf eine directe Art beweisen, dass das Integral der Gleichung allgemein die Form

$$V = f(y+xi) + \varphi(y-xi)$$

hat, bei jedem beliebigen Querschnitt des Cylinders, möge derselbe homogen oder heterogen sein.

Es seien ξ und η die Coordinaten eines Cylinderelements vom Querschnitt $\partial\xi\,\partial\eta$, $\varrho = \psi(\xi, \eta)$ die Dichtigkeit, x und y die Coordinaten des angezogenen Punktes. Weil die Anziehung eines unendlichen Cylinderelements dem Abstande des angezogenen Punktes umgekehrt proportional ist, so ist, wenn Punkt und Cylinderelement in demselben Quadranten liegen,

$$Y = f.\int_{b_1}^{b}\int_{\xi}^{\xi}\frac{\eta - y}{(\eta-y)^2 + (\xi-x)^2}\,\psi(\xi, \eta)\,\partial\eta\,\partial\xi,$$

$$-iX = -if\int_{b_1}^{b}\int_{\xi_1}^{\xi}\frac{\xi - x}{(\eta-y)^2 + (\xi-x)^2}\,\psi(\xi, \eta)\,\partial\eta\,\partial\xi.$$

Folglich ist

$$Y - iX = f\int_{-b_1}^{b}\int_{\xi_1}^{\xi}\frac{\psi(\xi, \eta)\,\partial\eta\,\partial\xi}{(\eta+\xi i) - (y+xi)}.$$

Ist also der Querschnitt des Cylinders eine Fläche, bei der die Ordinate ξ irgend eine Function $\varphi(\eta)$ von der Abscisse η ist, so suche man das Integral zu bestimmen, woraus folgt

$$Y - i X = f \frac{2 \partial V}{\partial (y+xi)} = f \int_{b_1}^{b} \int_{\xi_1=\varphi_1(\eta)}^{\xi=\varphi(\eta)} \frac{\psi(\xi,\eta)\,\partial\eta\,\partial\xi}{(\eta+\xi i)-(y+xi)}.$$

Da die Grössen Y und X stets endliche und continuirliche Grössen sind, so bleibt es auch das Integral, welches offenbar eine Function von $y+xi$ ist, also

$$\frac{\partial V}{\partial (y+xi)} = f'(y+xi).$$

Liegt der angezogene Punkt in einem andern Quadranten und geht z. B. x in $-x$ über, so erhält man, wenn man die Ordinate mit x_1 bezeichnet:

$$Y = f \int_{b_1}^{b} \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{\eta - y}{(\eta-y)^2 + (\xi+x_1)^2}\,\psi(\xi,\eta)\,\partial\eta\,\partial\xi,$$

$$iX = if \int_{b_1}^{b} \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{\xi + x_1}{(\eta-y)^2 + (\xi+x_1)^2}\,\psi(\xi,\eta)\,\partial\eta\,\partial\xi.$$

Folglich ist, nachdem $-x$ an die Stelle von x_1 gesetzt worden,

$$Y + iX = f \frac{2 \partial V}{\partial (y-xi)} = f \int_{b_1}^{b} \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{\psi(\xi,\eta)\,\partial\eta\,\partial\xi}{(\eta-\xi i)-(y-xi)},$$

woraus resultirt

$$\frac{\partial V}{\partial (y-xi)} = \varphi'(y-xi).$$

Da V jedenfalls als Potential betrachtet eine reelle Grösse ist, so ist es auch

$$Y = \frac{\partial V}{\partial y} = f'(y+xi) + \varphi'(y-xi).$$

Dieser Ausdruck ist aber immer reell, wenn $f=\varphi$ ist. Ist V dagegen allgemein eine Function complexer Grössen, so ist das allgemeine Integral

$$V = f(y+xi) + \varphi(y-xi).$$

Auf einem etwas kürzeren Wege gelangt man zu diesem Resultat auf folgende Art: Das Potential eines Körpers auf einen Punkt für den Fall, wo die Anziehung in umgekehrtem Verhältniss des Quadrats der Entfernung wirkt, ist

$$V = \int\int\int \frac{\varrho\,\partial\xi\,\partial\eta\,\partial\zeta}{r};$$

in dem Falle, wo die Anziehung im umgekehrten Verhältniss der Entfernungen wirkt, was bei einem Cylinderelement der Fall ist, ist

$$V = \int\int \varrho \log r \, \partial \xi \, \partial \eta.$$

Sind also die Coordinaten des anziehenden Elementes ξ und η, die des angezogenen Punktes x und y, so ist

$$V = \tfrac{1}{2}\int\int \varrho \, \partial \xi \, \partial \eta \log \{(\eta - y)^2 + (\xi - x)^2\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\int\int \varrho \, \partial \xi \, \partial \eta \log \{(\eta + \xi i) - (y + xi)\}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\int\int \varrho \, \partial \xi \, \partial \eta \log \{(\eta - \xi i) - (y - xi)\},$$

woraus ebenfalls das Theorem folgt.

Laplace wendet diese Eigenschaft des Potentials an, um die Anziehung eines unendlichen Cylinders von elliptischem Querschnitt zu bestimmen.

Es ist einleuchtend, dass man zur Kenntniss der Function $f'(y + xi)$ gelangen kann, indem man $f'(y)$ bestimmt und darauf $y + xi$ an die Stelle von y setzt. Laplace bestimmt deshalb die Anziehung eines Punktes $(u, 0)$ in der Verlängerung der y-Axe. Die kürzeste Halbaxe des Querschnitts sei a, die längste b. Für den Umfang des Querschnitts gilt die Gleichung

$$\eta^2 + (1 + \lambda^2) \xi^2 = b^2.$$

Für die Halbaxen u und v einer durch den Punkt $(u, 0)$ gehenden homofocalen Ellipse ist noch $u^2 - v^2 = b^2 - a^2$. Es ist alsdann

$$\frac{\partial V}{\partial u} = U = -f\varrho \int_{-b}^{+b}\int_{-\xi}^{+\xi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\xi^2 + (u - \eta)^2}}{\sqrt{\xi^2 + (u - \eta)^2 + \zeta^2}} \, \partial \eta \, \partial \xi \, \partial \zeta$$

$$= -2 f\varrho \int_{-b}^{+b}\int_{-\xi}^{+\xi} \frac{(u - \eta) \, \partial \eta \, \partial \xi}{\xi^2 + (u - \eta)^2} = -4 f\varrho \int_{-b}^{+b} \operatorname{arctan} \frac{\xi}{u - \eta} \, . \, \partial \eta.$$

Setzt man nun $y + xi$ an die Stelle von u, so wird

$$\frac{2 \, \partial V}{\partial (y + xi)} = Y - iX = -4 f\varrho \int_{-b}^{+b} \operatorname{arctan} \frac{\xi}{y + xi - \eta} \, \partial \eta.$$

Laplace findet nun das bestimmte Integral

$$Y - iX = -4\pi f\varrho \frac{\sqrt{1 + \lambda^2}}{\lambda^2} \left\{ y + xi - \sqrt{(y + xi)^2 - b^2 \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2}} \right\},$$

ohne jedoch anzugeben, welche Integrationsmethode er dabei angewendet hat.

Für irgend einen Punkt der Oberfläche des Cylinders ist nun

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad a^2 = b^2 - \frac{b^2 \lambda^2}{1 + \lambda^2},$$

folglich

$$Y-iX=-4\pi f\varrho\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\left\{y+xi-\sqrt{y^2-x^2+2yxi-b^2\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}\right)}\right\}$$

$$=-4\pi f\varrho\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\left\{y+xi\right.$$

$$\left.-\sqrt{\left(b^2-b^2\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)\frac{y^2}{b^2}-\left(a^2+b^2\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)\frac{x^2}{a^2}+2yxi}\right\}$$

$$=-4\pi f\varrho\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\left\{y+xi-\sqrt{\frac{a^2}{b^2}y^2-\frac{b^2}{a^2}x^2+2yxi}\right\}$$

$$=-4\pi f\varrho\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\left\{y+xi-\left[\frac{a}{b}y+\frac{b}{a}xi\right]\right\}.$$

Hiernach sind die beiden Componenten der Anziehung

$$f\frac{\partial V}{\partial y}=-4\pi f\varrho\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\cdot\frac{b-a}{b}y=-4\pi f\varrho\frac{y}{1+\sqrt{1+\lambda^2}},$$

$$f\frac{\partial V}{\partial x}=-4\pi f\varrho\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\cdot\frac{b-a}{a}x=-4\pi f\varrho\frac{\sqrt{1+\lambda^2}\cdot x}{1+\sqrt{1+\lambda^2}}.$$

Wir wollen nun das Integral auf einem andern Wege bestimmen. Der unendliche Cylinder mit elliptischem Querschnitte ist nämlich die Grenzfigur des dreiaxigen Ellipsoides, bei welchem die Halbaxe C unendlich gross wird. Die Componenten der Anziehung auf einen äussern Punkt sind

$$Z=0,\quad Y=-\tfrac{4}{3}\pi f\varrho\frac{bc}{a^2}y\int_0^{\frac{a}{v}}\frac{\vartheta^2\partial\vartheta}{(1+\lambda^2\vartheta^2)^{3/2}(1+\lambda_1^2\vartheta^2)^{1/2}},$$

$$X=-\tfrac{4}{3}\pi f\varrho\frac{bc}{a^2}x\int_0^{\frac{a}{v}}\frac{\vartheta^2\partial\vartheta}{(1+\lambda^2\vartheta^2)^{1/2}(1+\lambda_1^2\vartheta^2)^{1/2}},$$

wenn $\frac{b^2-a^2}{a^2}$ mit λ^2, $\frac{c^2-a^2}{a^2}$ mit λ_1^2 bezeichnet wird.

Seien v, u, w die Halbaxen eines homofocalen Ellipsoides, welches durch den angezogenen Punkt geht, so ist

$$v^2-a^2=u^2-b^2=w^2-c^2,$$

also

$$w-c=\frac{v^2-a^2}{w+c};$$

da aber $w+c$ unendlich gross ist, so ist $w=c$, und wegen $\vartheta=\frac{a}{v}$,

$$v^2-a^2=a^2\vartheta^{-2}-a^2=w^2-c^2,\quad a\sqrt{\vartheta^{-2}+\lambda_1^2}=w=c.$$

Hierdurch reduciren sich vorstehende Integrale auf die einfacheren Formen:

$$Y = -4\pi f\varrho\sqrt{1+\lambda^2}\,.\,y\int_0^{\frac{a}{v}}\frac{\vartheta\,\partial\vartheta}{\sqrt{1+\lambda^2\vartheta^2}^3},$$

$$X = -4\pi f\varrho\sqrt{1+\lambda^2}\,.\,x\int_0^{\frac{a}{v}}\frac{\vartheta\,\partial\vartheta}{\sqrt{1+\lambda^2\vartheta^2}}.$$

Führt man die Integration zwischen den angegebenen Grenzen aus, so ist

$$Y = -4\pi f\varrho\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\left\{y - \frac{y}{\sqrt{1+\frac{\lambda^2 a^2}{v^2}}}\right\} = -4\pi f\varrho\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\,.\,\frac{u-v}{u}\,y;$$

$$X = -4\pi f\varrho\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\left\{x\sqrt{1+\frac{\lambda^2 a^2}{v^2}} - x\right\} = -4\pi f\varrho\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\,.\,\frac{u-v}{v}\,x,$$

oder wegen $u-v=\lambda^2 a^2:(u+v)$ und $\frac{u^2-v^2}{v^2}=\lambda_1^2=\frac{a^2\lambda^2}{v^2}$:

$$Y = -4\pi f\varrho\frac{ab}{u+v}\,.\,\frac{y}{u} = -4\pi f\varrho\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\sqrt{1+\lambda_1^2}}\,.\,\frac{\lambda_1^2}{\lambda^2}\,.\,\frac{y}{1+\sqrt{1+\lambda_1^2}},$$

$$X = -4\pi f\varrho\frac{ab}{u+v}\,.\,\frac{x}{v} = -4\pi f\varrho\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\sqrt{1+\lambda_1^2}}\,.\,\frac{\lambda_1^2}{\lambda^2}\,.\,\frac{x\sqrt{1+\lambda_1^2}}{1+\sqrt{1+\lambda_1^2}}.$$

Es ist also die Gesammtanziehung auf einen äusseren Punkt

$$P = -4\pi f\varrho\frac{ab}{u+v},$$

$$R = \frac{Yy+Xx}{r} = -4\pi fr\varrho\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\sqrt{1+\lambda_1^2}}\,.\,\frac{\lambda_1^2}{\lambda^2}\,.\,\frac{\cos\omega^2+\sin\omega^2\sqrt{1+\lambda_1^2}}{1+\sqrt{1+\lambda_1^2}}.$$

P ist also für alle Punkte der Oberfläche eines homofocalen Cylinders eine constante Grösse.

Man kann nun auch die beiden Gleichungen der Componenten auf eine einzige reduciren, welche von u und v unabhängig ist. Es ist nämlich

$$Y - Xi = -4\pi f\varrho\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\left\{\frac{u-v}{u}\,y - \frac{u-v}{v}\,xi\right\}$$

$$= -4\pi f\varrho\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\left\{y+xi-\left[\frac{v}{u}\,y+\frac{u}{v}\,xi\right]\right\}$$

$$= -4\pi f\varrho\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\left\{y+xi-\sqrt{\frac{v^2}{u^2}y^2-\frac{u^2}{v^2}x^2+2yxi}\right\}$$

und wegen $v^2=u^2-\frac{b^2\lambda^2}{1+\lambda^2}$, $\frac{y^2}{u^2}+\frac{x^2}{v^2}=1$:

$$Y-Xi=-4\pi f\varrho\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\left\{y+xi-\sqrt{(y+xi)^2-\frac{b^2\lambda^2}{1+\lambda^2}}\right\}.$$

Diese Gleichung stimmt mit dem oben angeführten Integral von Laplace überein. Geht der Querschnitt des Cylinders in einen Kreis über, so wird $\lambda=0$ und

$$Y-Xi=-2\pi f\varrho\frac{a^2}{y+xi}=-2\pi f\varrho\frac{(y-xi)\,a^2}{r^2}.$$

Es ist nun das vollständige Differential von V:

$$\partial V=\frac{\partial V}{\partial(y+xi)}\,\partial(y+xi)+\frac{\partial V}{\partial(y-xi)}\,\partial(y-xi).$$

Ferner ist

$$\frac{\partial V}{\partial(y+xi)}=-2\pi\varrho\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\left\{y+xi-\sqrt{(y+xi)^2-\frac{b^2\lambda^2}{1+\lambda^2}}\right\},$$

$$\frac{\partial V}{\partial(y-xi)}=-2\pi\varrho\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\left\{y-xi-\sqrt{(y-xi)^2-\frac{b^2\lambda^2}{1+\lambda^2}}\right\}.$$

Da also die Veränderlichen getrennt sind, so ist

$$V=-\pi\varrho\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2}\left\{\begin{array}{l}(y+xi)^2-\Big[(y+xi)\sqrt{(y+xi)^2-\frac{b^2\lambda^2}{1+\lambda^2}}\\ \qquad-\frac{b^2\lambda^2}{1+\lambda^2}\log\Big(y+xi+\sqrt{(y+xi)^2-\frac{b^2\lambda^2}{1+\lambda^2}}\Big)\Big]\\ +(y-xi)^2-\Big[(y-xi)\sqrt{(y-xi)^2-\frac{b^2\lambda^2}{1+\lambda^2}}\\ \qquad-\frac{b^2\lambda^2}{1+\lambda^2}\log\Big(y-xi+\sqrt{(y-xi)^2-\frac{b^2\lambda^2}{1+\lambda^2}}\Big)\Big]\end{array}\right\}+C^2$$

oder auch

$$V=-2\pi\varrho ab\left\{\frac{y^2}{u(u+v)}+\frac{x^2}{v(u+v)}\right\}-2\pi\varrho ab\,.\,\mathrm{lognat}\,(u+v)+C$$

$$=\frac{Yy+Xx}{2f}-2\pi\varrho\,ab.\,\mathrm{lognat}\,(u+v)+C.$$

Für unendlich entfernte Punkte wird der zweite Theil unendlich gross, wogegen der erstere immer endlich bleibt. Es wird $u=v$ und

$$V=-\pi\varrho ab-2\pi\varrho ab\,\mathrm{lognat}\,2u+C,$$

also die Anziehung des Cylinders

$$\frac{\partial V}{\partial u}=-\frac{2q\varrho}{u},$$

worin q den Querschnitt bezeichnet. Sie ist umgekehrt proportional der Entfernung des angezogenen Punktes von der Axe; dasselbe Anziehungsgesetz, welches für den runden Cylinder gilt. Für den erwähnten Fall ist nämlich $b=a$, also $u=v$.

Geht endlich u in b, v in a über, so resultirt für einen Punkt der Oberfläche

$$V = -2\pi\varrho \left\{ \frac{y^2 + x^2 \sqrt{1+\lambda^2}}{1+\sqrt{1+\lambda^2}} \right\} - 2\pi\varrho\, ab \,lognat\,(a+b) + C,$$

woraus folgt

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -4\pi\varrho.$$

Wir wollen hieran noch ein paar Bemerkungen über specielle Fälle des Integrals von Laplace anknüpfen. Es ist

$$U = -4f\varrho \int_{-b}^{+b} arctan \frac{\xi}{u-\eta}\, \partial\eta = -4\pi f\varrho \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda^2} \{u - \sqrt{u^2 - a^2\lambda^2}\},$$

also wegen $\eta^2 + (1+\lambda^2)\xi^2 = b^2$ und $u^2 - a^2\lambda^2 = v^2$:

$$\int_{-b}^{+b} arctan \frac{a\sqrt{b^2-\eta^2}}{b(u-\eta)}\, \partial\eta = \pi \frac{ab}{u+v}.$$

Setzt man $u = b$, also $v = a$, so geht das bestimmte Integral über in

$$\int_{-b}^{+b} arctan \frac{a\sqrt{b+\eta}}{b\sqrt{b-\eta}}\, \partial\eta = \frac{ab}{a+b}\pi.$$

Da dieses Integral seinen Werth nicht ändert, wenn man a und b vertauscht, so ist

$$\frac{2}{\pi}\int_{-b}^{+b} arctan \frac{a\sqrt{b+\eta}}{b\sqrt{b-\eta}}\, \partial\eta = \frac{2}{\pi}\int_{-a}^{+a} arctan \frac{b\sqrt{a+\eta}}{a\sqrt{a-\eta}}\, \partial\eta$$

und beide Integrale sind Ausdrücke für das harmonische Mittel zweier Grössen a und b.

Wir fanden die Gesammtanziehung eines Cylinders auf einen äusseren Punkt

$$P = -\sqrt{Y^2 + X^2} = -4\pi f\varrho \frac{ab}{u+v},$$

mithin bei einem Cylinder mit kreisförmigem Querschnitt

$$P = -2\pi f\varrho \frac{a^2}{u}.$$

Geht u in a über, so wird $P_1 = -2\pi f\varrho a$. Diesen Verhältnissen entsprechen die bestimmten Integrale

$$P=-4f\varrho\int_{-a}^{+a} arctan\frac{\sqrt{a^2-\eta^2}}{u-\eta}\,\partial\eta=-2\pi f\varrho\frac{a^2}{u}$$

und

$$P_1=-4f\varrho\int_{-a}^{+a} arctan\frac{\sqrt{a+\eta}}{\sqrt{a-\eta}}\,\partial\eta=-2\pi f\varrho a.$$

Dies Integral wird direct gefunden, indem man

$$arctan\frac{\sqrt{a+\eta}}{\sqrt{a-\eta}}=\frac{\pi}{4}-\tfrac{1}{2}\,arcsin\frac{\eta}{a}$$

setzt.

Das Integral von Laplace:

$$Y-Xi=-4f\varrho\int_{-b}^{+b} arctan\frac{\xi}{y+xi-\eta}\,\partial\eta$$

kann noch auf eine andere Form gebracht werden, indem man die Summe der Anziehungen von je vier homologen Punkten der vier Quadranten sucht, nämlich

$$Y-Xi=f\varrho\int_0^b\int_0^\xi\partial\eta\,\partial\xi\left[\frac{1}{(\eta+\xi i)-(y+xi)}-\frac{1}{(\eta+\xi i)+(y+xi)}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(\eta-\xi i)-(y+xi)}-\frac{1}{(\eta-\xi i)+(y+xi)}\right]$$
$$=-2f\varrho(y+xi)\int_0^b\int_0^\xi\partial\eta\,\partial\xi\left[\frac{1}{(y+xi)^2-(\eta+\xi i)^2}+\frac{1}{(y+xi)^2-(\eta-\xi i)^2}\right].$$

Der erste Theil des bestimmten Integrals ist gleich

$$if\varrho\int_0^b lognat\frac{[y+xi+(\eta+\xi i)]\,[y+xi+\eta]}{[y+xi-(\eta+\xi i)]\,[y+xi-\eta]}\,\partial\eta,$$

der zweite Theil

$$-if\varrho\int_0^b lognat\frac{[y+xi+(\eta-\xi i)]\,[y+xi+\eta]}{[y+xi-(\eta-\xi i)]\,[y+xi-\eta]}\,\partial\eta.$$

Mithin ist

$$\frac{2\,\partial V}{\partial\,(y+xi)} = if\varrho\int_0^b lognat\,\frac{[(y+xi)+(\eta+\xi i)]\,[(y+xi)-(\eta-\xi i)]}{[(y+xi)-(\eta+\xi i)]\,[(y+xi)+(\eta-\xi i)]}\,\partial\eta$$

$$= -2\,f\varrho\int_0^b arctan\,\frac{2\xi\,(y+xi)}{(y+xi)^2-(\eta^2+\xi^2)}\,\partial\eta$$

$$= 2\,f\varrho\int_0^b arctan\,i\,\frac{\eta+\xi i}{y+xi}\,\partial\eta - 2\,f\varrho\int_0^b arctan\,i\,\frac{\eta-\xi i}{y+xi}\,\partial\eta.$$

Diese Integrale sind giltig für jeden unendlichen Cylinder, dessen Querschnitt aus vier congruenten Quadranten besteht.

XI.

Ueber die Erwärmung der Gase durch Zusammendrücken und Erkältung beim Ausdehnen.

Von

Dr. Mohr in Bonn.

Es ist eine bekannte Erfahrung, dass Gase beim Zusammendrücken sich erwärmen und bei der Ausdehnung erkalten. Ueber die Grösse dieser Erwärmung lassen sich keine directen Messungen anstellen, weil die Gase nothwendig von starken, meist metallenen Wänden umgeben sind, deren Wärmeinhalt unverhältnissmässig gross ist gegen das Gewicht des Gases. Selbst das Thermometer allein wird niemals die Temperatur des Gases angeben können, weil es sich mit dem Gase in die Wärme theilt und meistens ein grösseres Gewicht als das Gas selbst hat. Es lässt sich jedoch die Temperaturveränderung aus der zur Raumveränderung nöthigen Kraft berechnen, weil die Erwärmung nothwendig das Aequivalent dieser Kraft ist.

Man denke sich 2 Liter Luft von normalen Constanten (0^0 C. und 760^{mm}) in einem Luftpumpenstiefel, dessen Querschnitt gleich 0,1 Met. Quadr. ist. Es werde nun der Kolben bewegt, so dass die 2 Liter nur mehr den Raum von 1 Liter einnehmen. Von der Kolbenreibung sehen wir hier ganz ab, weil diese durch einen andern Theil der Armeskraft gedeckt wird und als entsprechende Wärme in den Wänden des Stiefels und der Substanz des Kolbens verschwindet.

Da wir innen und aussen des Stiefels gleichen Druck haben, so ist im ersten Augenblick kein Gegendruck vorhanden, der zu überwinden wäre; im Verhältniss aber als der Kolben fortschreitet, nimmt der Gegendruck in demselben Verhältniss zu, als das Volum abnimmt (Mariotte'sches Gesetz).

Wenn die Compression vollendet ist, so hat, abgesehen von der frei werdenden Wärme, die Luft im Stiefel eine Spannung von 2 Atm., aussen von 1 Atm., also innen einen Ueberdruck von 1 Atm. Die zu verwendende Kraft ist in keinem Augenblicke dieselbe, sondern eine von 0 bis 1 Atm.

steigende, und die Summe aller dieser einzelnen Momente ist die aufgewendete Kraft. An jeder Stelle seiner Bewegung ist der Gegendruck in Atmosphären ausgedrückt durch die Länge des Stiefels, dividirt durch den noch zu durchlaufenden Theil desselben, weil Druck und Volum im umgekehrten Verhältnisse stehen. Denkt man sich den disponibeln Theil des Stiefels in 10 gleiche Theile getheilt und einen davon vom Kolben zurückgelegt, so verhält sich der innere Druck zum äussern wie 10:9, nach Durchlaufung von 2 Theilen wie 10:8 u. s. w. Es sind also die einzelnen Drucke in den 10 Momenten entsprechend dem umgekehrten Werthe der Zahlen 9, 8, 7, 6 etc. bis 1. Trägt man diese umgekehrten Werthe senkrecht auf die einzelnen 10 Theile der Stiefellänge auf, so bilden ihre Enden ein Stück einer gleichseitigen Hyperbel ($xy = Const.$), und der hyperbolische Flächenraum zwischen der Hyperbel und den rechtwinkligen Coordinaten ist das Mass der angewendeten Kraft.

Nennt man x denjenigen Theil des Stiefels, auf welchem die Zusammendrückung stattfindet, x' die ganze Länge des Stiefels und y den Druck am Ende der Bewegung, so ist der hyperbolische Flächenraum H ausgedrückt durch

$$H = x \,.\, y \,.\, log\,nat \,.\, \frac{x'}{x}.$$

Wir nehmen an, dass die Compression überall auf die Volumeinheit eines Liters stattfinde, so wird $x = 1$ und $H = y \; log\; nat. x'$, oder in gemeinen Logarithmen

$$H = 2{,}3026 \,.\, y \,.\, log\, brigg \,.\, x'.$$

In dem obigen Falle fängt die Bewegung mit 0 Gegendruck an und endigt mit 1 Atm. Es ist also $y = 1$ und $x' = 2$, weil 2 Raumeinheiten Gas auf 1 comprimirt werden.

Wir haben also

$$H = 2{,}3026 \,.\, log \,.\, 2 = 0{,}693.$$

Durch diese Zahl wird der mittlere Gegendruck während des ganzen Druckes in Atmosphären ausgedrückt. Nun wiegt 1 Atm. auf 1 Quadratdecimeter 103,33 K⁰, also im Ganzen 0,693 . 103,33 = 71,607 K⁰, und da er nur während 0,1 Meters ausgeübt wird, so ist die verwendete Kraft = 7,16 K⁰ Mt.

Ueber das mechanische Aequivalent der Wärme liegen mehrfache Angaben vor. Eine der zuverlässigeren scheint 424 K⁰ Meter = 1 Wärmeeinheit zu sein, welche von Joule aus einer Reihe von Versuchen abgeleitet wurde. Obige 7,16 K⁰ Meter entsprechen also $\frac{7{,}16}{424} = 0{,}0168$ W. E., welche frei werden müssen.

Diese vertheilen sich nun auf die 2 Liter Luft, welche 2,586 Grm. oder hier 0,002586 K⁰ wiegen.

Es steht nun die wirkliche Erwärmung mit dem Gewicht der Substanz und mit der specifischen Wärme (0,2377) im umgekehrten Verhältniss; es

ist also die wirkliche Erwärmung der Luft $= \frac{0{,}0168}{0{,}002586 \,.\, 0{,}2377} = 27{,}4^0$C. Wendet man das mechanische Aequivalent 451 K⁰Meter an, so kommen 25,79⁰C. heraus. Die grösste Unsicherheit liegt also in dem Wärmeäquivalent, da Atmosphärendruck und Gewicht der Luft mit der grössten Schärfe, die specifische Wärme wenigstens mit ziemlicher Schärfe ermittelt ist.

Favre und Silbermann haben diese Grösse durch einen Versuch mittels eines Brequet'schen Thermometers zu bestimmen gesucht und ein Steigen des Thermometers um 13,2⁰C. beobachtet. Man sieht also, dass hier ein grosser Verlust an Wärme stattgefunden hat. Wenn das Brequet'sche Thermometer nur 4 Grm. wog, so sind nicht 2,586 Grm. Gas, sondern 6,256 Grm. Substanz erwärmt worden. Es ist ferner zu bemerken, dass das Mariotte'sche Gesetz nur Platz greift, wenn die durch Compression frei gewordene Wärme entwichen ist. Presst man nun rasch 2 Liter auf 1 zusammen, so ist im letzten Augenblicke die Spannung grösser als 2 Atm., weil die Wärme noch nicht verflogen ist; man hat also auch eine grössere Kraft anwenden müssen, um auf 1 Liter zu comprimiren, als dies bei Ableitung der frei gewordenen Wärme der Fall gewesen sein würde. Der Sinn obiger Berechnung ist also der, dass die Temperatur des Gases um 27,4⁰C. gestiegen sein würde, wenn die zur Ueberwindung des nach dem Mariotte'schen Gesetze berechneten Widerstandes, in Wärme umgesetzt, ganz allein auf die Substanz des Gases übertragen worden wäre. Dieser Fall ist selbstverständlich niemals möglich, daher auch das Experiment ausgeschlossen. Wenn das Mariotte'sche Gesetz und die Gay-Lussac'sche Regel zu gleicher Zeit spielen, so kann man nicht wissen, welcher Theil der Wirkung jedem einzelnen zukommt.

Presst man 3 Liter auf 1 zusammen, so ist $x' = 3$ und $y = 2$, weil bei dem innern Druck von 3 Atm. nur 2 gegen aussen als Gegendruck erscheinen, da die wirkliche Atmosphäre einer das Gleichgewicht hält. Es ist also

$$H = 2{,}3026 . 2 . \log 3 = 4{,}6052 . 0{,}4778213 = 2{,}197 \text{ Atm. Druck},$$

in Kilogramm =221,016 K⁰ und in Arbeit auf 0,2 Meter Höhe =44,202 K⁰ Mtr. Diese entsprechen $\frac{44{,}202}{424} = 0{,}104$ W. E.

Die 3 Liter Luft wiegen 0,003879 K⁰; die Erwärmung ist also

$$\frac{0{,}104}{0{,}003879 \,.\, 0{,}2377} = 112{,}8^0 \text{ C.}$$

mit dem Wärmeäquivalent 451 K⁰Meter = 106,2⁰C.

Bei Compression von 4 auf 1 ist

$$H = 2{,}3026 . 3 . \log 4 = 6{,}907 . 0{,}60206 = 4{,}158 \text{ Atm.} = 429{,}65 \text{ K}^0$$

und die Bewegung auf 0,3 Meter Höhe = 128,89 K⁰ Mtr. = 0,304 W. E., also Erwärmung

$$= \frac{0{,}304}{0{,}001229} = 247^0 \text{ C.}$$

mit dem Wärmeäquivalent 451 = 232,7⁰C.

Für Compression von 6 auf 1 = 562° C.,
„ 7 „ 1 = 743° C.

Es ist bei dieser Berechnung die Annahme zu Grunde gelegt, dass sich die specifische Wärme bei höherem Drucke nicht ändere; sie beruht auf den Versuchen Regnault's,* der sich dabei so ausdrückt: „Bei den Versuchen über atmosphärische Luft, bei denen der Druck von 1 bis 10 Atmosphären schwankte, fand ich keinen merklichen Unterschied zwischen den Wärmemengen, die eine selbe Gasart abgiebt, wenn sie um dieselbe Zahl von Graden erkaltet. Also würde im Widerspruche mit den Versuchen von de la Roche und Bérard die specifische Wärme einer selben Gasart unabhängig sein von der Dichtigkeit."

Allgemein erhält man die Erwärmung eines Gases, wenn man die nach obiger Formel zur Compression nöthige Kraft in Wärmeeinheiten ausdrückt und diese durch das Product von dem Gewicht des Gases und seiner specifischen Wärme dividirt. Da es hierbei nicht auf die absolute Menge der Luft ankommt, sondern nur auf das Verhältniss des Volums vor und nach der Compression, so ist es am bequemsten, die Volumeinheiten auf Liter und die Raumeinheiten auf 0,1 Meter zu stellen, weil dann die absoluten Grössen des Gewichts des Gases und des Luftdrucks durch eine einfache Multiplication erhalten werden. Die Erwärmung ist für alle Gase bei denselben Constanten gleich, weil überall die specifische Wärme des Gases gleich ist der specifischen Wärme der Luft, dividirt durch das specifische Gewicht des Gases. In demselben Verhältniss, als das absolute Gewicht des Gases bei gleichem Volum vermindert ist, erscheint die specifische Wärme erhöht. Die berechneten Temperaturen erscheinen etwas hoch im Vergleich zur Beobachtung. Der Grund davon ist leicht in der kleinen Menge frei werdender Wärme zu finden, die bei der geringen specifischen Wärme der Gase eine hohe Temperatur bedingt.

Frankland (Ann. Chem. Pharm. 130, 380) fand, dass Sauerstoff, auf $\frac{1}{25}$ seines Volums comprimirt, das Schmieröl im Apparate entzündete, und dass sich die Entzündung auf das Eisen fortpflanzte und das kegelförmige Ventil vollkommen verbrannt war.

Es findet überall der schon von Dulong (Pogg. 16, 476) ermittelte Satz seine Anwendung, dass alle Gase, wenn man ihr Volum verändert, ohne Wärme zuzuführen, eine gleiche absolute Wärmemenge entbinden oder binden, wenn man sie um denselben Bruchantheil comprimirt oder ausdehnt.

Comprimirt man 8 Vol. Luft auf 4, so entbinden sie eine bestimmte Wärmemenge, in Wärmeeinheiten ausgedrückt; comprimirt man diese 4 Vol. nochmals um die Hälfte, also auf 2 Vol., so ist der Widerstand doppelt so gross, aber auch der Weg nur halb so gross; es wird also dieselbe

---

* Pogg. 89, 346.

Menge Kraft verbraucht, um die 8 Vol. auf 4, als diese 4 Vol. auf 2 zu comprimiren. Fährt man fort, die 2 Vol. auf 1 zu comprimiren, so hat man den vierfachen Widerstand, aber nur $\frac{1}{4}$ des Weges, wie im ersten Falle, also ebenfalls wieder dieselbe Kraft anzuwenden, und aus demselben Grunde entwickelt sich auch dieselbe Wärmemenge. Es sind also im Ganzen für die Compression auf $\frac{1}{2}$ 1 Wärmemenge, auf $\frac{1}{4}$ 2 Wärmemengen, auf $\frac{1}{8}$ 3 Wärmemengen entwickelt worden.

Wenn demnach ein Gas sein Volum ändert, ohne dass man ihm Wärme zuführt oder wegnimmt, so stehen die entwickelten Wärmemengen in einer arithmetischen, die Volumina in einer geometrischen Reihe.

Die entbundenen Wärmemengen sind das vollkommene Aequivalent der zur Compression verbrauchten Bewegung und stammen nicht aus dem Gase, sondern von jener Bewegung ab, welche die Arbeit leistete. In gleicher Weise erwärmt sich ein auf dem Ambos liegendes Metallstück durch Hammerschläge, und auch hier kommt die Wärme nicht aus dem Metallstück, sondern aus der Bewegung des Hammers.

Ganz dasselbe Verhältniss findet bei der Verdünnung statt und dies giebt Veranlassung, den bekannten Versuch zu besprechen, dass ein Gas, wenn es in ein Vacuum einströmt, keine Temperaturveränderung erleidet. Dieser Versuch wurde zuerst von Gay-Lussac angestellt und von Joule mit Luft von 22facher Pressung mit gleichem Resultate wiederholt.

Von zwei Gefässen, welche von einander durch einen abschliessbaren Hahn getrennt sind, ist das eine mit Luft gefüllt, das andere durch die Luftpumpe ausgeleert, und beide sind in denselben Wassercalorimeter eingesenkt. Oeffnet man den Zwischenhahn, so strömt die Luft in das Vacuum, und wenn durch Ausgleichung der Temperatur Alles im Gleichgewichte ist, zeigt das Calorimeter keine Temperaturveränderung. Der Versuch ist theoretisch besser begründet, als sein experimentaler Beweis. Gesetzt, die beiden Volumina seien 1 Liter und das eine enthalte 2 Liter Luft in 1 comprimirt, so können durch Ausdehnung in das gleiche Volum nur 0,01218 Wärmeeinheiten gebunden werden. Nehmen wir nun das Calorimeter zu 4 Liter an, was zur Untertauchung von 2 Literräumen wohl das Minimum ist, so würde sich die Temperaturerniedrigung als $\frac{0{,}01218}{4} = 0{,}003^{0}$C. zu erkennen geben können. Diese Grösse kann an einem Thermometer nicht wohl abgelesen werden. Es ist also der experimentale Beweis nicht so sicher als der theoretische.

Wenn Luft in ein Gefäss mit festen Wänden einströmt, so kann sie auf die Wände nur einen Druck, aber keine Bewegung ausüben. Aus diesem Grunde kann sie keine Arbeit leisten und also auch keine Wärme verlieren.

Denken wir uns den Stiefel der Luftpumpe als das herzustellende Vacuum in Verbindung mit einem ebenso grossen Volum Luft (1 Liter) von

doppelter Spannung, so sind zwei Fälle möglich: entweder ist der Verbindungshahn geöffnet, oder er ist geschlossen.

Im ersten Falle strömt das Gas frei in den Stiefel nach, vorausgesetzt, dass die Bewegung des Kolbens nicht rascher sei, als die Schallgeschwindigkeit, und dass das Lumen des Hahns nicht zu enge sei. Die auf doppelte Spannung comprimirte Luft fängt an mit einem Ueberdruck von 1 Atm. und endigt mit 0 Ueberdruck, wenn innen und aussen gleiche Dichtigkeit stattfindet. Die Luft hat also beim Bewegen des reibungslosen Kolbens dieselbe Arbeit geleistet, welche früher der Arm leistete, als er die 2 Liter in 1 verdichtete, und wie wir oben berechnet haben, beträgt diese Kraft 7,16 K⁰M.

Im zweiten Falle, wo der Hahn geschlossen ist, muss der Kolben die ganze Last der Atmosphäre heben und ein Vacuum von 1 Liter herstellen, wozu eine Kraft von $103{,}33 . 0{,}1 = 10{,}33$ K⁰Mtr. gehört. Es ist also im Falle des geschlossenen Zwischenhahns 3,17 K⁰ Meter mehr Kraft verwendet worden.

Im ersten Falle hat sich die Luft abgekühlt, weil sie eine Arbeit von 7,16 K⁰Mtr. leistete; im zweiten Falle nicht, weil sie keine Arbeit leisten konnte, sondern diese schon geleistet fand.

Es ist absolut nothwendig, dass, wenn eine comprimirte Luft sich unter dem Kolben oder überhaupt bei nachgiebigen Wänden ausdehnt, ebensoviel Wärme gebunden werde, als im umgekehrten Falle frei wurde, wofür auch einige Versuche von Favre und Silbermann, sowie von Joule sprechen. Nach dem Gesetz der Erhaltung der Kraft ist dies unvermeidlich und bedarf keines Beweises, weil beide Operationen ein vollkommener Kreisprocess sind, der unter denselben Umständen wieder auf derselben Stelle ankommt.

Wir erinnern uns hier eines wissenschaftlichen Streites, welcher seit einiger Zeit in Poggendorff's Annalen zwischen zwei mathematischen Physikern, den Herren Most* und Bolzmann** geführt wird, welche sich mit mathematischen Chassepots bekämpfen, ohne dass einer sich getroffen oder besiegt hat erklären wollen. Herr Most will einen mathematischen Beweis für das zweite Wärmegesetz geben, indem er die Wärme als eine Grösse zweier Dimensionen, Quantität des erwärmten Körpers und Temperatur, aufstellt. Dieser Versuch ist ganz unberechtigt, denn Naturgesetze werden nicht mathematisch, sondern experimentell und logisch bewiesen. Die hierbei vorkommenden Rechnungen sind eine blose Nebensache und rein mechanischer Natur. Herr Most spricht sich für den Kreisprocess aus, d. h. er nimmt an, dass bei jedem Vorgange, welcher umgekehrt werden kann, gleichviel Bewegung, Wärme, im entgegengesetzten Sinne zum Vorschein kommen müsse. Diese Annahme ist logisch ganz

* Pogg. 136, 140; 138, 566.

** Pogg. 137, 495; 140, 254 und 435; 141, 413 und 635.

richtig, denn wenn sie nicht zuträfe, würde das Verhältniss zwischen Ursache und Wirkung einen Stoss erleiden, was unmöglich ist. Herr Bolzmann bespricht nun den Fall, dass eine Zwischenwand zwischen einem lufterfüllten und luftleeren Raume plötzlich weggenommen werde, wo sich dann das Gas in dem leeren Raume ohne Temperaturveränderung verbreite. Es träte nun nach der Anschauung von Most weder Wärme ein, noch aus. Comprimire man nun das Gas auf sein erstes Volum, so fände Wärmeableitung statt, die nach aussen abgeleitet werden könne. Diesen Vorgang könne man beliebig oft mit demselben Gase wiederholen und so aus demselben eine beliebige Menge Wärme herausziehen, ohne dass beim Expandiren ins Vacuum welche ausgetreten sei, und es wäre also der Schluss Most's nicht richtig, dass sich der Körper nur dann in demselben Zustande, wie vorher, befinden könne, wenn die Summe der eingetretenen Wärme gleich der Summe der ausgetretenen sei.

Die Herren streiten sich um Formen des Ausdrucks. Die Wärme, welche in dem comprimirten Gase frei wird, stammt gar nicht aus dem Gase, sondern aus der verbrauchten Bewegung des Armes. So wie man eine eiserne Stange beliebig oft auf einem Ambos warm hämmern und dazwischen wieder diese Wärme nach aussen abführen kann, ebenso kann man dieselbe Menge Luft durch Compression beliebige Male erwärmen, weil die austretende Wärme nur von der jedesmal zugeführten und ausgenutzten Armeskraft abstammt. Es liegt also hier gar keine Erzeugung von Wärme vor, sondern nur eine Umsetzung von Massenbewegung in Wärme. Der Kreisprocess ist vollständig, nur ist die Wärme nicht als solche, sondern als Massenbewegung eingetreten. Ob aber überhaupt ein Kreisprocess möglich ist, kann nur durch den Versuch gefunden werden. Gefrieren und Aufthauen, Verdampfen und Verdichten der Dämpfe, Compression und Expansion unter dem Kolben sind vollkommene Kreisprocesse, dagegen Compression durch den Kolben und Einströmen in ein fertiges Vacuum ist kein Kreisprocess, daher auch das Resultat verschieden.

Massenbewegung wird durch Widerstand vollkommen in Wärme umgesetzt; dagegen können wir durch Erwärmung von Gasen im günstigsten Falle nur 29 Procent der Wärme in Massenbewegung umsetzen und die übrigen 71 Procent bleiben Wärme.

Hier liegt also kein Kreisprocess vor, und dennoch ist die Abrechnung zwischen Soll und Haben ganz in der Ordnung. Die erhaltene Massenbewegung mit den restirenden 71 Procent Wärme sind gleich der zugeführten Wärme. Ueberhaupt können von allen Bewegungen nur zwei gemessen werden, nämlich Massenbewegung als K⁰Meter und Wärme als 1 K⁰ Wasser um 1⁰ C., und lassen sich glücklicherweise auch diese beiden Grössen durch das Wärmeäquivalent auf einander beziehen. Massenbewegung und Wärme sind nämlich die einzigen Bewegungen, welche dauernd bestehen und übertragen werden können, während Licht und elektrischer Strom sich in jedem Augen-

blick in Wärme umsetzen und nur als solche gemessen werden können, und chemische Bewegung ist nicht übertragbar. Es ist also vorauszusehen, dass die Wissenschaft niemals ein anderes Aequivalent von Bewegungen wird entdecken können, als das bereits bekannte Verhältniss zwischen Massenbewegung und Wärme. Die letztere ist aber darum keine Grösse zweier Dimensionen, weil sie nur an ponderablen Stoffen wahrgenommen werden kann, und die Gewichtsbestimmung des erwähnten Körpers ist keine Qualität der Wärme, sondern ihrer Unterlage. Mit demselben Rechte könnte man jedes Gas, jede Flüssigkeit eine Grösse zweier Dimensionen nennen, weil wir sie nur in einem Gefässe besitzen können. Die einheitliche Bestimmung der Wärme ist: Bewegung.

In unmittelbarem Zusammenhange mit obiger Darstellung stehen zwei Erscheinungen, welche sich anfänglich zu widersprechen scheinen. Bei der Wassersäulenmaschine zu Schemnitz in Ungarn entsteht bei dem Ausströmen der Luft eine solche Kälte, dass sich Eiskrusten an vorgehaltene Körper ansetzen; dagegen bei dem Windkessel der Dampfmaschine zu Chaillot bei Paris, wo die Luft unter einem Druck von 2,5 Atm. ausströmt, zeigt das empfindlichste Thermometer keine Temperaturabnahme an. Eine Erklärung konnte man damals (1827) nicht geben, obgleich Hatchette* sagt, dass sich aus dem Gay-Lussac'schen Versuche die Erklärung leicht ergebe.

Bei der Wassersäulenmaschine ist die comprimirte Luft längere Zeit in Berührung mit einer grossen Menge kalten Grubenwassers, und deshalb gekühlt und mit Wasserdampf bei dieser Temperatur gesättigt. Sobald die Luft ausströmt, dehnt sie sich von 6 Atm. Druck auf den vorfindlichen Barometerstand aus und muss durch diese Arbeit, weil sie die Atmosphäre verdrängt und hebt, Wärme verbrauchen, und wenn die Temperatur unter den Gefrierpunkt kommt, so scheidet sich der Wasserdampf als Eis aus. In dem trockenen Cylindergebläse wird die Luft durch Compression erwärmt. und da das Cylindergebläse beständig geht, so nimmt der Kasten allmälig die Temperatur der erwärmten Luft an und die Luft strömt erwärmt aus. Da sie sich aber hierbei wieder auf die gewöhnliche Dichte ausdehnt, so verbraucht sie gerade diese Wärme, um die äussere Atmosphäre zu verdrängen, und wird dann wieder die Temperatur der Umgebung zeigen. Der ganze Unterschied beider Erscheinungen besteht also darin, dass in dem Wassersäulengebläse die Luft nur dann und wann comprimirt wird, und dass sie in der Zwischenzeit ihre entbundene Wärme an das Grubenwasser und die kalten Metallwände abgeben kann. Sie strömt deshalb mit der Temperatur der Umgebung aus und muss sich durch die geleistete Arbeit erkälten; in dem Cylindergebläse behält die Luft wegen andauernder Compression ihre erhöhte Temperatur, strömt mit dieser aus und erkältet sich

* Pogg. 10, 266.

im Augenblick des Ausströmens auf die Temperatur der umgebenden Luft, kann also keine Erkaltung zeigen.

Nehmen wir an, dass beide Ausströmungen in ein Vacuum stattfänden, so würde die Wassersäulenmaschine nach dem Gay Lussac'schen Versuche keine Temperaturveränderung zeigen; dagegen das Cylindergebläse würde gegen die Umgebung als warm erscheinen, ebenfalls weil keine Temperaturveränderung wegen Mangel an Arbeit stattfinden kann.

Vollständig parallel sind zwei Versuche Tyndall's, welche er in seiner bekannten Schrift „Die Wärme als eine Form der Bewegung" beschreibt. Er hält eine mit comprimirter Luft gefüllte Aeolipile gegen eine Thermosäule und öffnet den Hahn. Der ausgehende Luftstrom ist erkaltet, weil die Bewegung von der Luft selbst kommt, welcher die festen Wände der Aeolipile keine Bewegung mittheilen können. Nun bläst er mit einem Handblasebalg gegen die Thermosäule und der Luftstrom ist warm, wenn er nahe an die Thermosäule herangeht, in der Ferne aber nicht kalt. Im ersten Falle hatte die Luft der Aeolipile ihre Compressionswärme bereits verloren und die Temperatur der Umgebung angenommen. Bei dem Ausströmen muss sie erkalten, weil sie Arbeit leistet. Bei dem Blasebalg wird die Luft durch Compression im Augenblick erwärmt und ohne dass sie Zeit hat, ihre Wärme an Holz und Leder abzugeben, warm ausgeblasen. Sie wird also die Thermosäule erwärmen, wenn sie noch nicht ganz die Dichte der Atmosphäre angenommen hat; in einer grösseren Entfernung, wo dies geschehen sein kann, kommt sie nur auf die Temperatur der Umgebung zurück und kann weder Wärme, noch Kälte anzeigen. Der erste Fall, die Aeolipile, ist analog der Wassersäulenmaschine, der Blasebalg dem Cylindergebläse. Die Thermosäule kann nicht unterscheiden, ob die geleistete Arbeit von der Luft oder von dem Arme des Menschen herrührt; sie unterscheidet nur, ob kalte oder warme Luft auf sie geblasen werde. Bei der Aeolipile stammte auch die erste Erwärmung der Luft von dem Arme des den Kolben bewegenden Menschen ab, aber sie war vor dem Versuche entwichen.

Wenn wir die Sache nun sehr genau nehmen, so muss auch bei dem Ausströmen von Luft in ein Vacuum eine kleine Menge Wärme verbraucht werden, denn dies Ausströmen ist mit einer Bewegung verbunden und diese kann niemals von Nichts abstammen. Allein dieser Wärmeverbrauch ist unendlich klein, weil die bewegte Gasmenge unter allen Umständen sehr klein ist. Wir haben oben gesehen, dass in dem Falle, wo sich die Luft mit Ueberwindung des Atmosphärendruckes ausdehnt, die verbrauchte Wärme in einem Calorimeter nur als 0,003^0 C. erscheinen würde; sie wird also in dem Falle, wo sie nicht die Atmosphäre, sondern nur ihr eigenes Gewicht zu bewegen hat, ganz unmerkbar sein, darum aber immer noch eine endliche Grösse bleiben.

Wenn 2 Liter Luft, in 1 Liter comprimirt, sich in ein Vacuum von 1 Liter ausdehnen, so ist 1 Liter Luft um 0,1 Meter bewegt worden, das andere Liter bleibt an seiner Stelle. 1 Liter Luft wiegt 0,001293 K⁰, und um 0,1 Meter bewegt zu werden, bedarf es einer Bewegung von 0,0001293 K⁰ Mt. Diese entsprechen einer Wärmemenge von $\frac{0,0001293}{424} = 0,0000003$ Wärmeeinheiten, und wenn diese aus 2 Liter Luft von der specifischen Wärme 0,2377 entnommen werden, so wird die Abkühlung

$$\frac{0,0000003}{0,002586 \,.\, 0,2377} = 0,00048^0\,C.$$

betragen und in einem Calorimeter von 4 Liter Wasser als $0,00012^0$ C. erscheinen. Es ist also einleuchtend, dass Gay-Lussac und Joule bei ihren Versuchen keine Temperaturveränderung bemerken konnten.

Ich kann hier noch eine Art und Weise, das bekannte Verhältniss $\frac{C}{C'}$ oder die specifische Wärme bei constantem Druck zu jener bei constantem Volum aus der mechanischen Theorie der Wärme abzuleiten, hinzufügen.

Man habe 1 Liter Luft von normalen Constanten und erwärme es bei gleichbleibendem Druck auf 273^0C. Es hat dann sein Volum verdoppelt, aber seine Spannung ist die einfache geblieben.

Denkt man sich das Liter Luft in einem cylindrischen Gefässe von 1 Quadratdecimeter Querschnitt, so nimmt es darin eine Höhe von 0,1 Mtr. ein. Durch Erwärmung auf 273^0 wird der ohne Reibung gedachte Kolben um 0,1 Meter gehoben und übt bei dem Gewichte der Atmosphäre auf 0,1 Quadratdecimeter eine Arbeit von $103,33 . 0,1 = 10,333$ K⁰ Meter aus, und hält man nun das mechanische Aequivalent von 424 K⁰ Meter = 1 W. E. fest, so entsprechen jene 10,333 K⁰ Meter einer Wärmemenge von

$$\frac{10,333}{424} = 0,0244 \text{ W E.}$$

Diese Wärme ist also hinreichend, 1 Liter Luft bei gleichbleibendem Druck auf 2 Liter auszudehnen. Die specifische Wärme der Luft bei gleichbleibendem Druck ist von Regnault zu 0,2377 auf experimentalem Wege festgestellt worden, und wir suchen diejenige bei gleichbleibendem Volum.

Ein Liter Luft wiegt 0,001293 K⁰ und enthält also bei 273^0 eine Wärmemenge von $273 . 0,001293 . 0,2377 = 0,083811$ W. E.

Wäre bei constantem Volum auf 273^0 C. erwärmt worden, so wären jene 0,0244 W. E. weniger verbraucht worden, die auf die Ausdehnung kamen und sich aus der geleisteten Arbeit der Luft berechneten. Es wären also nur $0,083811 - 0,0244 = 0,5941$ W. E. zur Erwärmung in einem nicht nachgebenden Raume zur Wirkung gekommen. Das Verhältniss $\frac{C}{C'}$ ist also

$$= \frac{0,083811}{0,05941} = 1,411,$$

was mit der aus der Schallgeschwindigkeit abgeleiteten Grösse 1,417 sehr gut stimmt.

Behalten wir die specifische Wärme bei constantem Druck = 0,2377, so ergiebt sich die bei constantem Volum, wenn wir sie als x einführen, aus der Gleichung

$$273 . 0{,}01293 . x = 0{,}05941\,,$$

woraus

$$x = 0{,}1683.$$

Wenn man die auf 273° C. erwärmten 2 Liter Luft rasch auf 1 Liter zusammenpresst, so dass keine Wärme entweichen kann, so muss die Temperatur auf 273 . 1,411 = 385,2° C. steigen; man hat alsdann zuletzt eine höhere Spannung als 2 Atm. zu überwinden. Denkt man sich aber die Compression so langsam vor sich gehend, dass der Ueberschuss über 273° C. entweichen kann, so ist zuletzt eine innere Spannung von 2 Atm. vorhanden, die Temperatur um 112,2° C. gesunken und die 0,0244 W. E. sind entwichen. Könnte man die bei der Compression auf 1 Liter ohne Verlust von Wärme stattfindende höhere Spannung bestimmen, was Witte (Pogg. 138, 155) versucht hat, so liesse sich auch daraus das Verhältniss $\frac{C}{C'}$ bestimmen, was aber bei der kleinen Menge der Luft und ihrer geringen specifischen Wärme nicht möglich ist.

So hat auch Witte die Zahl 1,356 gefunden, die erheblich kleiner ist, als die beiden oben angeführten.

Betrachten wir die Wärme überhaupt als eine oscillatorische Bewegung, wobei sich die Theile des Körpers um einen Gleichgewichtspunkt nach den Gesetzen des Pendels hin- und her bewegen, so kann die gleiche Temperatur nicht als eine gleiche Anzahl der Schwingungen angesehen werden, sondern nur als der Zustand der Uebertragung einer gleichen Menge lebendiger Kraft an andere Körper durch Anstoss. Von den Gasen wissen wir mit Bestimmtheit, dass die Geschwindigkeiten der Gasmolecüle bei gleicher Temperatur sich umgekehrt verhalten, wie die Quadratwurzeln ihres specifischen Gewichtes. Bei allen anderen Körpern muss dasselbe Verhältniss stattfinden, weil überall die lebendige Kraft gleich ist der Masse, multiplicirt mit dem Quadrat der Geschwindigkeit.

Gleiche Anzahl von Wärmeschwingungen kann also nur bei Körpern derselben chemischen Natur, Dichte, kurz aller Eigenschaften vorausgesetzt werden.

Hier scheint sich auch ein Uebergang zur Erklärung des Prout'schen Gesetzes zu finden, dass die specifische Wärme eines Elementes, multiplicirt mit seinem Atomgewicht, eine gleiche Grösse bei verschiedenen Elementen giebt. Nehmen wir beispielsweise Blei (Pb = 103,5) und Magnesium (Mg = 12), und setzen wir voraus, dass bei gleichen Temperaturen jedem Elemente eine bestimmte Geschwindigkeit der Wärmemolecularschwingung zukomme, und nennen wir diese bei Blei x und bei Magnesium y, so ist

$$Mg \cdot y^2 = Pb \cdot x^2,$$

also

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{Pb}{Mg} \text{ und } \frac{y}{x} = \sqrt{\frac{Pb}{Mg}} = \sqrt{8,6} = 2,932.$$

Wenn demnach das Magnesiumatom bei gleicher Temperatur 2,932 mal so schnell schwingt, als das Bleiatom, so gebrauchen beide auf 1 Atomgewicht gleichviel lebendige Kraft oder Wärme. Sie erscheinen dann gleich warm. Es liegt also hier dasselbe Gesetz vor, wie bei den Gasen, dass sich die Molecularbewegung umgekehrt verhält, wie die Quadratwurzel aus dem Atomgewicht. Bei den Gasen bezieht sich die gleiche Wärmebewegung auf gleiche Volumina, und da auch bei den Gasen die specifischen Gewichte den Atomgewichten entsprechen, so findet bei beiden ganz genau dasselbe Gesetz seine Anwendung, dass sich die Molecularbewegungen der Wärme umgekehrt verhalten, wie die Quadratwurzeln der Atomgewichte. Ein Gesetz verträgt nun freilich keine Ausahme, und die Beziehungen der specifischen Wärme zum Atomgewicht sind nicht ohne Ausnahme. Dagegen sind der Fälle der Uebereinstimmung doch zu viele, um blos zufällig zu sein, und die Bestimmung der Atomgewichte gründet sich auf analytische Resultate. Man schwebt dadurch zwischen den beiden Fällen, entweder mehrere Gruppen von Elementen anzunehmen, worin das Product des Atomgewichtes mit der specifischen Wärme 1 mal 3,75 oder 2 mal 3,75 beträgt, oder die Atomgewichte so zu massregeln, dass bei allen dasselbe Product zum Vorschein kommt. Die letzte Annahme hat sich den analytischen Resultaten gegenüber als nicht zulässig herausgestellt.

Kleinere Mittheilungen.

IX. Copernicus,

nach dem Urtheile des David Gans, eines jüdischen Astronomen, der mit Tycho de Brahe in Verbindung stand.

Im Jahre 1743 erschien zu Jessnitz ein hebräisches Werk über Astronomie, dessen Verfasser David Gans*, zu Lippstadt 1541 geboren, zu Prag im August 1623 starb.** Er stand mit den astronomischen Celebritäten seiner Zeit, wie Johannes Müller, Kepler, namentlich mit Tycho de Brahe in Verbindung, den er mehrmals auf der Sternwarte zu Benatek besuchte, und für den er astronomische Tafeln aus dem Hebräischen übersetzte.*** Im Jahre 1592 hatte er jedenfalls die Abfassung des Werkes begonnen, um 1598 ausgeführt oder schon eine Umarbeitung gemacht, die sich in der Hamburger Bibliothek befindet; im Jahre 1612 erschien ein Specimen unter dem Titel: „*Magen David*". Im Juli 1613, einen Monat vor seinem Tode, war das Manuscript beendet, welches 130 Jahre später unter dem Titel

---

* Der bekannte Prof. Gans in Berlin soll aus derselben Familie stammen.

** Ueber Gans s. den Artikel von D. Cassel in Ersch und Gruber, Bd. 43 S. 367; vergl. auch Hock zu K. Lieben's Grabsteininschriften u. s. w., Prag 1856, S. 10, meist nach Zunz zu Benjamin v. Tudela ed. Asher, II, S. 278; meinen *Catal. Bodl.* S. 860.

*** Gans (f. 9) spricht von „Alfonsinischen" Tafeln, welche Jakob al-Karschi (oder Karsi) im Jahre 5020 (1260) aus dem Spanischen ins Hebräische übersetzt habe. Offenbar meint er die Handschrift, welche im Catalog der Bücher des Jakob Lewarden (Amsterdam 1797, f. 35b N. 34) verzeichnet ist. Allein Jakob Carsani ist der Bearbeiter der Tafeln Don Pedro's, welche die Pariser Bibliothek besitzt; der Prolog ist in sehr incorrectem lateinischem Texte mitgetheilt im V. Bande der *Libros del saber de astronomia del Rey D. Alfonso X*, S. 63. Correcter ist die hebräische Uebersetzung im Vatican und in Parma, woraus ich mir weitere Mittheilungen über dieses fast unbekannte Werk vorbehalte. (Vergl. vorläufig mein *Jewish Literature*. London 1857, S. 360; Zeitschr. der D. M. Gesellschaft, XVIII, 123.)

„*Nechmad Wenaïm*“ herausgegeben ist.* Die historische Einleitung ist von Joh. Christian Hebenstreit in einer lateinischen Exposition des Werkes übersetzt und einigen Exemplaren beigebunden; in dem meinigen fehlt sie. Ich übersetze die nachfolgende Stelle aus dem hebräischen Original (f. 9):

„Nicolaus Copernicus, aus Preussen, [war] ein grosser, ausgezeichneter Astronom, übertreffend alle Männer seiner Zeit. Auch die Gelehrten unserer Zeit bezeugen einstimmig die Schärfe seines Verstandes und die Gründlichkeit seiner Kenntniss in der Astronomie. Man sagt, dass seit Ptolemäus seinesgleichen nicht existirt habe. Dieser Mann unternahm es, bei der Gründlichkeit seines Wissens und der ausgezeichneten Schärfe seines Verstandes, zu beweisen, dass der Erdball sich um sich selbst drehe. Das ist nichts Neues; denn auch den Alten vor 2000 Jahren kam dergleichen in den Sinn. Ich fand nämlich im Buche „„vom Himmel und der Welt““ [Aristoteles] im 2. Cap. des IV. Abschnittes [Kelal], dass dies die Ansicht des ausgezeichneten Weisen Pythagoras und seiner Anhänger war. Copernicus hat darüber ein wundervolles, weitläufiges [oder wohlgeordnetes?] sehr gründliches Werk verfasst und dies ausgezeichnete Werk im Jahre 1538 [so ist zu lesen] nach christlicher Zeitrechnung, das ist 5298 der Schöpfung, beendet. Dieser Gelehrte starb in seinem Vaterlande, der Provinz Preussen, im Jahre 1543 der christlichen Zeitrechnung, das ist 5303 der Schöpfung.“

Diese Beurtheilung ist um so beachtenswerther, als Gans sich nicht zur neuen Theorie unbedingt bekennt und auch die Theorie Tycho's erwähnt.

Berlin. M. STEINSCHNEIDER.

X. Nachtrag zu S. 58—60 (XVI. Jahrg. 1. Heft).

Durch die Güte des Herrn Fürsten Boncompagni habe ich die Abschriften der Präfatio des Victorius zu seinem Calculus erhalten, wie sie in dem *codex Vatic. Reg. Svecor. N.* 1281 *f.* 28ᵛ Zeile 1—30 und *f.* 52ʳ u. 52ᵛ, ferner in dem *codex Vatic. Reg. Svecor. N.* 1569 *f.* 1—2ʳ enthalten ist. Erstere beiden Texte sind nahezu identisch und bieten keine nennenswerthen Varianten; aber der letztere enthält vier Stellen, die wahrscheinlich den ursprünglichen Ausdruck enthalten.

Für S. 58 Z. 13 „*omnis dividen***da** *integritas*“ findet sich dort „*omnis dividen***di** *integritas*“, wobei „*dividendum*“ als Substantivum gebraucht und der Ausdruck gewählter wird. Das Wort „*iabus*“, S. 59 Z. 5, ist dort geschrieben „*Iab*ᵘˢ“, was vielleicht noch einmal mit Glück so gedeutet wird, dass

* Die Nachweisung dieses bisher unbekannten Verhältnisses s. im *Catal. Bodl., l. c.* — Das Buch ist leider sehr incorrect edirt, auch in der mitzutheilenden Stelle

jenes räthselhafte Wort verständlich wird. Die anderen beiden Texte haben „*labus*“. Für S. 59 Z. 23 „*continentibus*“ ist „*continens*“ geschrieben, was auf *calculus* als Subject bezogen erscheint. Für S. 59 Z. 24 „*ad milium summam*“ findet sich „*ad miliarii summam*“, welche Lesart auch durch „*miliaru*“ in B_1 und B_2 unterstützt wird.

Dass der Cod. 1569 die bessere Handschrift ist, ergiebt sich auch daraus, dass statt „*ad* .$\overline{\text{II}}$., *ad* .$\overline{\text{III}}$., *ad* .$\overline{\text{IIII}}$.“ S. 59 Z. 26 und S. 60 Z. 1 u. 2 geschrieben ist: „*ad* .$\overline{\text{II}}$. *milia*, *ad* .$\overline{\text{III}}$. *milia*, *ad quattuor milia*“.

Bei dieser Gelegenheit bitte ich, den Druckfehler in „*notis*“, S. 59 Z. 2, in „*notio*“ zu verbessern.

Hof. FRIEDLEIN.

XI. Note zur Integration des Differentials

$$\frac{a+bx+cx^2+\ldots+px^n}{A+Bx+Cx^2+\ldots+Px^N}\,\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}.$$

Zerlegt man den Factor von $\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}$ in seine Theilbrüche, so wird vorgelegtes Integral zurückgeführt auf Integrale der Formen

$$\int\frac{x^n dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}},\quad \int\frac{dx}{(x-p)\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}},\quad \int\frac{dx}{(x-p)^n\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}},$$

$$\int\frac{Px+Q}{[(x-p)^2+q^2]}\,\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}},\quad \int\frac{Px+Q}{[(x-p)^2+q^2]^n}\,\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}.$$

Wie die vier ersten dieser Fälle zu behandeln sind, ist allgemein bekannt. Das fünfte Integral dagegen wird auch in den modernsten und vollständigsten Lehrbüchern der höheren Mathematik kaum erwähnt. Minding zeigt allerdings in seiner Integraltafel auch die Reduction dieses letzten Falles, jedoch unter zuvoriger Zuziehung des Imaginären, wodurch 5 mit 3 zusammen fällt. Die spätere Beseitigung des Imaginären erfordert so weitschweifige Rechnungen, dass ohne Frage die folgende Reductionsformel praktischer ist.

Setzt man zunächst $x-p=y$, so hat man statt des betreffenden Integrals zunächst

$$\int\frac{ry+s}{(y^2+q^2)^n}\,\frac{dy}{\sqrt{A+By+Cy^2}};$$

dieses kann auf die Form gebracht werden:

$$1)\quad \int\frac{ry+s}{(y^2+q^2)^n}\,\frac{dy}{\sqrt{A+By+Cy^2}}=\frac{\sqrt{A+By+Cy^2}\,(\alpha+\beta y)}{(y^2+q^2)^{n-1}}$$
$$+\int\frac{\gamma y+\delta}{(y^2+q^2)^{n-1}}\,\frac{dy}{\sqrt{A+By+Cy^2}}$$
$$+\varepsilon\int\frac{dy}{(y^2+q^2)^{n-2}\sqrt{A+By+Cy^2}}.$$

Für die Constanten α, β, γ, δ, ε erhält man durch Differentiation letzter Gleichung:

$$\begin{aligned}
&2C\beta(2-n)+\varepsilon=0,\\
&B\beta(\tfrac{7}{2}-2n)+C\alpha(3-2n)+\gamma=0,\\
&\beta[A(3-2n)+2Cq^2]+B\alpha(\tfrac{5}{2}-2n)+\delta+2\varepsilon q^2=0,\\
&\tfrac{3}{2}Bq^2\beta+\alpha[Cq^2-2A(n-1)]+\gamma q^2=r,\\
&A\beta+\frac{B}{2}\alpha+\delta+\varepsilon q^2=\frac{s}{q^2}.
\end{aligned}$$

Die Auflösungen sind:

$$\alpha=\frac{1}{2(n-1)}\,\frac{Bs-r(A-Cq^2)}{(A-Cq^2)^2+B^2q^2},$$

$$\beta=\frac{1}{2(n-1)}\,\frac{\frac{s}{q^2}(A-Cq^2)+Br}{(A-Cq^2)^2+B^2q^2},$$

$$\gamma=\frac{-(2n-3)rC(A-Cq^2)+(2n-\tfrac{7}{2})B\left(\frac{As}{q^2}+rB\right)+\tfrac{1}{2}BCs}{2(n-1)[(A-Cq^2)^2+B^2q^2]},$$

$$\delta=\frac{(2n-3)(A-2Cq^2)\left[\frac{s}{q^2}(A-Cq^2)+rB\right]+B(2n-\tfrac{5}{2})[Bs-r(A-Cq^2)]}{2(n-1)[(A-Cq^2)^2+B^2q^2]},$$

$$\varepsilon=C\frac{n-2}{n-1}\,\frac{\frac{s}{q^2}(A-Cq^2)+Br}{(A-Cq^2)^2+B^2q^2}.$$

Mittels 1) wird demnach jedes Integral von der fünften Form zurückgeführt auf solche von der vierten.

Bei dieser Gelegenheit sei es vergönnt, noch auf eine andere Lücke unserer Lehrbücher aufmerksam zu machen.

Zerlegt man den Bruch $\frac{a+bx+\ldots+px^n}{A+Bx+\ldots+Px^N}$ in Theilbrüche, so kommt man bekanntlich in dem Falle, dass der Nenner für complexe Werthe der Variabelen ein oder mehrere Male verschwindet, auf Brüche von der Form

$$\frac{\alpha}{x-(p+qi)}+\frac{\beta}{x-(p+qi)};$$

$$\frac{\alpha_t}{[x-(p+qi)]^t}+\frac{\alpha_{t-1}}{[x-(p+qi)]^{t-1}}+\ldots+\frac{\alpha_1}{x-(p+qi)}$$
$$+\frac{\beta_t}{[x-(p-qi)]^t}+\frac{\beta_{t-1}}{[x-(p-qi)]^{t-1}}+\ldots+\frac{\beta_1}{x-(p-qi)}.$$

Indem nun die beiden ersten Brüche sich vereinigen zu $\frac{rx+s}{(x-p)^2+q^2}$, wo r und s reelle Zahlen sind, scheint man es als selbstverständlich zu erachten, dass sich je zwei und zwei Brüche der letzten Art (Fall gleicher

Wurzeln) zu $\frac{rx+s}{[(x-p)^2+q^2]^t}$ zusammenziehen. Und doch ist dem nicht so. Die Vereinigungen liefern allerdings Brüche reeller, nicht aber immer — und darauf kommt es an — linearer Zähler. So hat man z. B.

$$\frac{x^2-1}{(x^2+1)^3}=\frac{-\frac{i}{4}}{(x-i)^3}+\frac{\frac{1}{8}}{(x-i)^2}+\frac{\frac{i}{8}}{x-i}$$

$$+\frac{\frac{i}{4}}{(x+i)^3}+\frac{\frac{1}{8}}{(x+i)^2}+\frac{-\frac{i}{8}}{x+i}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}}{(x^2+1)^3}+\frac{1}{4}\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{x^2+1}.$$

Die bekannte Art der Zerlegung von $\frac{f(x)}{F(x)}$ für den Fall, dass $F(x)=0$ n mal die Wurzeln $p\pm qi$ hat, lässt sich folgendermassen erweisen. Unter jener Annahme ist

$$2)\qquad \frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f(x)}{[x-(p+qi)]^n\,[x-(p+qi)]^n.\psi(x)}.$$

Sei nun

$$\left(\frac{f(x)}{\psi(x)}\right)_{x=p+qi}=A,\quad \text{d. i. } [f(x)-A\psi(x)]_{x=p+qi}=0,$$

so muss bekanntlich

$$3)\qquad f(x)-A\psi(x)=[x-(p+qi)]\,\varphi(x),$$

folglich

$$4)\qquad \frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{[x-(p+qi)]^n\,[x-(p-qi)]^n}$$

$$+\frac{\varphi(x)}{[x-(p+qi)]^{n-1}\,[x-(p-qi)]^n.\psi(x)}$$

sein. Ist ferner

$$\left(\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right)_{x=p-qi}=B,\quad \text{d. i. } [\varphi(x)-B\psi(x)]_{x=p-qi}=0,$$

demnach auch

$$\varphi(x)-B\psi(x)=[x-(p-qi)]\,\omega(x),$$

so erhält man aus 4):

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{[x-(p+qi)^n\,(x-(p-qi)]^n}+\frac{B}{[x-(p+qi)]^{n-1}\,[x-(p-qi)]^n}$$

$$+\frac{\omega(x)}{[x-(p+qi)]^{n-1}\,[x-(p-qi)]^{n-1}\,\psi(x)},$$

oder wenn man $A-B(p+qi)=C$ setzt:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{Bx+C}{[(x-p)^2+q^2]^n}+\frac{\omega(x)}{[(x-p)^2+q^2]^{n-1}\,\psi(x)}.$$

B und C sind stets reell; denn es ist

$$A=\frac{f(p+qi)}{\psi(p+qi)},\quad B=\frac{\varphi(p-qi)}{\psi(p-qi)},$$

$$\varphi(p-qi)=\frac{f(p-qi)-A\,\psi(p-qi)}{-2qi}\quad\text{(wegen 3)},$$

also auch

$$B=\frac{1}{2qi}\left\{\frac{f(p+qi)}{\psi(p+qi)}-\frac{f(p-qi)}{\psi(p-qi)}\right\},$$

$$C=\frac{p+qi}{2qi}\,\frac{f(p-qi)}{\psi(p-qi)}-\frac{p-qi}{2qi}\,\frac{f(p+qi)}{\psi(p+qi)},$$

oder wenn man

$$f(p+qi)=a+bi,\quad \psi(p+qi)=c+di,$$

also

$$f(p-qi)=a-bi,\quad \psi(p-qi)=c-di$$

setzt:

$$B=\frac{bc-ad}{q(c^2+d^2)},$$

$$C=\frac{q(ac+bd)-p(bc-ad)}{q(c^2+d^2)}.$$

Hannover, im April 1871. Prof. Dr. Fr. Grelle.

XII. Ueber die Bedingung, dass sich drei Kreise in einem Punkte schneiden.

Seien a, b; a', b'; a'', b'' die Mittelpunkte dreier Kreise mit den Radien r, r', r''. Sind p, p', p'' die Distanzen der Mittelpunkte, so erhält man auf folgende Weise die Gleichung zwischen p, p', p'' und r, r', r'', welche ausdrückt, dass sich die Kreise in einem Punkte schneiden.

Man setze

$$1)\quad \left\{\begin{aligned}(a''-a')^2+(b''-b')^2&=p^2,\\ (a''-a)^2+(b''-b)^2&=p'^2,\\ (a'-a)^2+(b'-b)^2&=p''^2.\end{aligned}\right.$$

Die gesuchte Bedingung ergiebt sich durch Elimination von x und y zwischen den Gleichungen

$$2)\quad \left\{\begin{aligned}(x-a)^2+(y-b)^2&=r^2,\\ (x-a')^2+(y-b')^2&=r'^2,\\ (x-a'')^2+(y-b'')^2&=r''^2.\end{aligned}\right.$$

Infolge der Gleichungen 1) und 2) ist

$$2(x-a)(x-a')+2(y-b)(y-b')=(x-a)^2+(y-b)^2$$
$$+(x-a')^2+(y-b')^2-(a-a')^2-(b-b)'^2=r^2+r'^2-p''^2,$$

also

$$3)\quad \begin{aligned}(x-a)(x-a')+(y-b)(y-b')&=\tfrac{1}{2}(r^2+r'^2-p''^2),\\(x-a)(x-a'')+(y-b)(y-b'')&=\tfrac{1}{2}(r^2+r''^2-p'^2),\\(x-a')(x-a'')+(y-b')(y-b'')&=\tfrac{1}{2}(r'^2+r''^2-p^2).\end{aligned}$$

Es ist identisch

$$\begin{vmatrix}0, & 0, & i, & 0\\ x-a, & y-b, & ri, & 1\\ x-a', & y-b', & r'i, & 1\\ x-a'', & y-b'', & r''i, & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a, & b, & 1\\ a', & b', & 1\\ a'', & b'', & 1\end{vmatrix}i.$$

Nimmt man in der vorstehenden Gleichung $i=\sqrt{-1}$, bildet die Quadrate beider Seiten, so folgt nach 1) und 3):

$$\begin{vmatrix}-1, & -r, & -r', & -r'',\\ -r, & 1, & \tfrac{1}{2}(r^2+r'^2-p''^2)+1-rr', & \tfrac{1}{2}(r^2+r''^2-p'^2)+1-rr''\\ -r', & \tfrac{1}{2}(r^2+r'^2-p''^2)+1-rr', & 1, & \tfrac{1}{2}(r'^2+r''^2-p^2)+1-r'r''\\ -r'', & \tfrac{1}{2}(r^2+r''^2-p'^2)+1-rr'', & \tfrac{1}{2}(r'^2+r''^2-p^2)+1-r'r'', & 1\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}a, & b, & 1\\ a', & b', & 1\\ a'', & b'', & 1\end{vmatrix}^2.$$

In der Determinante links multiplicire man die Elemente der ersten Verticalreihe mit r, ziehe die Producte von den Elementen der zweiten Verticalreihe ab. Verfährt man ebenso mit den Factoren r' und r'' in Beziehung auf die dritte und vierte Verticalreihe, so folgt

$$\begin{vmatrix}1+r^2, & \tfrac{1}{2}(r^2+r'^2-p''^2)+1, & \tfrac{1}{2}(r^2+r''^2-p'^2)+1\\ \tfrac{1}{2}(r^2+r'^2-p''^2)+1, & 1+r'^2, & \tfrac{1}{2}(r'^2+r''^2-p^2)+1\\ \tfrac{1}{2}(r^2+r''^2-p'^2)+1, & \tfrac{1}{2}(r'^2+r''^2-p^2)+1, & 1+r''^2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a, & b, & 1\\ a', & b', & 1\\ a'', & b'', & 1\end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix}a'-a, & b'-b\\ a''-a, & b''-b\end{vmatrix}$$

$$=\tfrac{1}{4}(-p^4-p'^4-p''^4+2p^2p'^2+2p^2p''^2+2p'^2p''^2).$$

Durch Entwickelung der links stehenden Determinante folgt

$$1)\quad \begin{aligned}&(p^2-r'^2-r''^2)(p'^2-r^2-r''^2)(p''^2-r^2-r'^2)-4r^2r'^2r''^2\\&+r^2(p^2-r'^2-r''^2)^2+r'^2(p'^2-r^2-r''^2)^2+r''^2(p''^2-r^2-r'^2)=0\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{vmatrix}2r^2, & r^2+r'^2-p''^2, & r^2+r''^2-p'^2\\ r^2+r'^2-p''^2, & 2r'^2, & r'^2+r''^2-p^2\\ r^2+r''^2-p'^2, & r'^2+r''^2-p^2, & 2r''^2\end{vmatrix}=0,$$

was die gesuchte Bedingungsgleichung ist.

Nimmt man in 1) $r=r'=r''$, so folgt

$$(pp'p'')^2=r^2(-p^4-p'^4-p''^4+2p^2p'^2+2p^2p''^2+2p'^2p''^2)$$

oder auch

$$(pp'p'')^2=r^2\begin{vmatrix}a, & b, & 1\\ a', & b', & 1\\ a'', & b'', & 1\end{vmatrix}^2.$$

Sieht man p, p' und p'' als gegeben an, so folgt:

Sind die Ecken eines Dreiecks die Mittelpunkte dreier Kreise von gleichen Radien, sollen sich diese Kreise in einem Punkte schneiden, so ist der Radius gleich dem Radius des Kreises, welcher durch die Eckpunkte geht.

Wenn $p=p'=p''$, so ist nach 1):

$$(2p^2-r^2-r'^2-r''^2)^2=3(-r^4-r'^4-r''^4+2r^2r'^2+2r^2r''^2+2r'^2r''^2)$$
$$=3(2\Delta)^2,$$

wo Δ der Inhalt des Dreiecks ist, dessen Seiten gleich den Radien r, r', r'' sind.

Nimmt man $p=p'=p''$ und $r=r'=r''$, so erhält man $p^2=3r^2$.

Berühren sich zwei Kreise ausserhalb oder innerhalb, nimmt man

$$p^2=(r''\pm r')^2,$$

so ist

$$r'(p'^2-r^2-r''^2)\pm r''(p''^2-r^2-r'^2)=0.$$

Eine rein geometrische Herleitung der Gleichung 1) scheint nicht ohne Weitläufigkeiten zu sein. A. Enneper.

XIII. Ueber den Kettenbruch für *tan z*.

Die Kettenbruchentwickelung von $tan\, z$ ist bekanntlich ein specieller Fall des Gauss'schen Satzes, dass sich der Quotient zweier hypergeometrischen Reihen in einen Kettenbruch verwandeln lässt; will man sie aber unabhängig von diesem Theoreme ausführen, so kann man folgenden sehr einfachen Weg gehen.

Bezeichnet man die Function $cos(\sqrt{x})$ kurz mit $f(x)$ und differentiirt die Gleichung

$$f(x)=cos(\sqrt{x}), \tag{1}$$

so erhält man

$$2\sqrt{x}\,.\,f'(x)=-sin(\sqrt{x}) \tag{2}$$

und durch nochmalige Differentiation

$$4x\,f''(x)+2x\,f'(x)=-f(x),$$

sowie endlich, wenn diese Gleichung n mal differentiirt wird,

$$4x\,f^{(n+2)}(x)+(4n+2)\,f^{(n+1)}(x)=-f^{(n)}(x),\quad n\geqq 0. \tag{3}$$

Sei nun

$$\frac{f^{(m+1)}(x)}{f^{(m)}(x)}=Q_m;$$

aus Nr. 2) folgt dann durch Division mit $f(x)=cos(\sqrt{x})$

$$Q_1=-\frac{1}{2\sqrt{x}}\,tan(\sqrt{x}) \tag{4}$$

und aus Nr. 3 durch Division mit $f^{(n+1)}(x)$

$$4x\,\varrho_{n+2}+4n+2=-\frac{1}{\varrho_{n+1}}$$

oder

$$\varrho_{n+1}=-\frac{\frac{1}{2}}{2n+1+2x\,\varrho_{n+2}}.$$

Nimmt man hier der Reihe nach $n=0, 1, 2 \ldots m-1$ und substituirt jede Gleichung in die vorhergehende, so entsteht

$$\varrho_1=-\cfrac{\frac{1}{2}}{1-\cfrac{x}{3-\cfrac{x}{5-\cdots-\cfrac{x}{2m-1+2x\,\varrho_{m+1}}}}}.$$

Um den Rest $2x\,\varrho_{m+1}$ zu discutiren, benutzen wir die Formel

$$\cos(\sqrt{x})=1-\frac{x}{1.2}+\frac{x^2}{1.2.3.4}-\ldots$$

und erhalten

$$\varrho_{m+1}=\frac{f^{(m+1)}(x)}{f^{(m)}(x)}$$

$$=-\frac{1}{2(2m+1)}\cdot\frac{1-\dfrac{x}{2(2m+3)}+\dfrac{x^2}{2.4(2m+3)(2m+5)}-\ldots}{1-\dfrac{x}{2(2m+1)}+\dfrac{x^2}{2.4(2m+1)(2m+3)}-\ldots}.$$

Daraus geht unmittelbar hervor, dass für $m=\infty$

$$Lim\,\varrho_{m+1}=0$$

ist, dass mithin der vorige Kettenbruch ins Unendliche fortgesetzt werden darf. Es ist demnach für $m=\infty$ und zufolge des in Nr. 4) angegebenen Werthes von ϱ_1

$$\frac{\tan(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}=\cfrac{\frac{1}{2}}{1-\cfrac{x}{3-\cfrac{x}{5-\cfrac{x}{7-\text{etc.}}}}}$$

oder für $x=z^2$

$$\tan z=\cfrac{z}{1-\cfrac{z^2}{3-\cfrac{z^2}{5-\cfrac{z^2}{7-\text{etc.}}}}},$$

was mit dem von Gauss gefundenen Resultate übereinstimmt.

Schlömilch.

XIV. Ueber eine Kettenbruchentwickelung für unvollständige Gammafunctionen.

Setzt man zur Abkürzung

$$1)\qquad f(x) = x^{-\mu}\, e^{x} \int_0^x t^{\mu-1}\, e^{-t}\, dt, \quad x > 0, \quad \mu > 0,$$

wobei das Integral nach Legendre's Vorgange mit $\Gamma(x, \mu)$ bezeichnet werden könnte, so erhält man durch Differentiation

$$f'(x) = f(x) + \frac{1 - \mu\, f(x)}{x}$$

oder

$$2)\qquad x\, f'(x) + (\mu - x)\, f(x) = 1,$$

und durch n weitere Differentiationen

$$3)\qquad x\, f^{(n+1)}(x) + (n + \mu - x)\, f^{(n)}(x) = n\, f^{(n-1)}(x).$$

Es sei ferner

$$\frac{f^{(m)}(x)}{f^{(m-1)}(x)} = Q_m;$$

die Gleichungen 2) und 3) lassen sich dann folgendermassen darstellen:

$$f(x) = \frac{1}{\mu - x + x\, Q_1},$$

$$Q_n = \frac{n}{n + \mu - x + x\, Q_{n+1}}.$$

Setzt man hier $n = 1, 2, 3 \ldots n$ und substituirt jede Gleichung in die vorhergehende, so gelangt man zu dem Kettenbruche

$$4)\qquad f(x) = \cfrac{1}{x - x + \cfrac{1x}{1 + \mu - x + \cfrac{2x}{2 + \mu - x + \cdots + \cfrac{nx}{n + \mu - x + x\, Q_{n+1}}}}}.$$

Um den Rest $x\, Q_{n+1}$ beurtheilen zu können, bringen wir $f(x)$ durch Substitution von $t = xu$ auf die Form

$$f(x) = \int_0^1 u^{\mu-1}\, e^{x(1-u)}\, du,$$

woraus folgt

$$f^{(n)}(x) = \int_0^1 u^{\mu-1} (1-u)^n\, e^{x(1-u)}\, du.$$

Verwandelt man e^{-xu} in die bekannte Reihe und integrirt die einzelnen Glieder, so erhält man ferner

$$f^{(n)}(x)=\frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(\mu+n+1)}\,e^x\left\{1-\frac{\mu}{\mu+n+1}\cdot\frac{x}{1}+\frac{\mu(\mu+1)}{(\mu+n+1)(\mu+n+2)}\cdot\frac{x^2}{1.2}-\ldots\right\},$$

mithin

$$Q_{n+1}=\frac{F^{(n+1)}(x)}{f^{(n)}(x)}=\frac{n+1}{\mu+n+1}\cdot\frac{1-\frac{\mu}{\mu+n+2}\cdot\frac{x}{1}+\ldots}{1-\frac{\mu}{\mu+n+1}\cdot\frac{x}{1}+\ldots}.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass bei unendlich wachsenden n

$$Lim\ Q_{n+1}=1$$

wird, was wiederum zur Folge hat, dass der in Nr. 4) angedeutete Kettenbruch gegen dieselbe Grenze convergirt, wie der Kettenbruch

$$\cfrac{1}{\mu-x+\cfrac{1x}{1+\mu-x+\cfrac{2x}{2+\mu-x+\cdots+\cfrac{nx}{n+\mu-x}}}}.$$

Man erhält demnach für $n=\infty$ und zufolge der Bedeutung von $f(x)$

$$\int_0^x t^{\mu-1}e^{-t}\,dt=\cfrac{x^\mu e^{-x}}{\mu-x+\cfrac{1x}{1+\mu-x+\cfrac{2x}{2+\mu-x+\cfrac{3x}{3+\mu-x+\text{ etc.}}}}}.$$

In dem speciellen Falle $\mu=\frac{1}{2}$ ergiebt sich, wenn man x und t durch x^2 und t^2 ersetzt,

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt=\cfrac{x\,e^{-x^2}}{1-2x^2+\cfrac{4x^2}{3-2x^2+\cfrac{8x^2}{5-2x^2+\cfrac{12x^2}{7-2x^2+\text{ etc.}}}}}.$$

Dieses Resultat bildet gewissermassen den Pendant zu der Kettenbruchentwickelung, welche Laplace für das Integral

$$\int_x^\infty e^{-t^2}\,dt$$

gegeben hat und die nachher von Jacobi ergänzt wurde. Schlömilch.

XV. Bemerkung über eine gewisse Gattung von Differentialgleichungen.

Im 24. Bande von Crelle's Journal f. Math. stellt Jacobi sich die Aufgabe, die Differentialgleichung

$$(A + A'x + A''y)(x\,dy - y\,dx) - (B + B'x + B''y)\,dy + (C + C'x + C''y)\,dx = 0,$$

welche als Verallgemeinerung einer speciellen, bei Euler (*Inst. calc. int.*, Bd. I S. 207 Probl. 55) vorkommenden sich betrachten lässt, zu integriren. Jacobi gelangt daselbst zu einer direct integrirbaren Form, indem er drei Linearfunctionen p, q, r so zu bestimmen sucht, dass der Factor $\frac{1}{p.q.r}$ die linke Seite der auf Null reducirten Gleichung zu einem exacten Differentiale macht. — Minding, welcher demselben Gegenstande eine Arbeit widmete*, benutzte zu diesem Zwecke den Umstand, dass offenbar drei particuläre lineare Integrale ($p=0$, $q=0$, $r=0$) existiren, die er durch ein Verfahren ermittelt, welches dem bei der Auffindung der Durchschnittssehnen zweier Kegelschnitte üblichen analog ist.

Bei Gelegenheit einer Untersuchung über algebraische Differentialgleichungen erster Ordnung, welche im III. Bande der „Mathematischen Annalen" veröffentlicht ist, kam ich auf eine allgemeine Betrachtung, welche für den besondern Fall der Jacobi'schen Gleichung die Integrabilität von vorneherein erkennen lässt.

Ich gehe von der Differentialgleichung

$$A\,dx + B\,dy = 0$$

aus, worin A, B ganze rationale Functionen n^{ten} Grades in x, y bezeichnen.

Es soll der Einfluss einer linearen Substitution auf den Grad der mit den Differentialien multiplicirten Functionen untersucht werden.

Es sei die einzuführende Substitution von der Form

$$1)\qquad x = \frac{a\xi + b\eta + c}{a_2\xi + b_2\eta + c_2}, \quad y = \frac{a_1\xi + b_1\eta + c_1}{a_2\xi + b_2\eta + c_2}$$

und deren Umkehrung

$$2)\qquad \xi = \frac{\alpha x + \alpha_1 y + \alpha_2}{\gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2}, \quad \eta = \frac{\beta x + \beta_1 y + \beta_2}{\gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2},$$

so dass, wenn man

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \Delta$$

setzt, die bekannten Relationen stattfinden:

---

* Crelle's Journal, Bd. 40 S. 361 flgg.

$$\alpha = \frac{\partial \Delta}{\partial a}, \quad \alpha_1 = \frac{\partial \Delta}{\partial a_1}, \quad \alpha_2 = \frac{\partial \Delta}{\partial a_2} \text{ etc.},$$

$$3) \quad \begin{array}{lll} a\alpha + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 = \Delta, & a\beta + a_1\beta_1 + a_2\beta_2 = 0, & a\gamma + a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 = 0, \\ b\alpha + b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 = 0, & b\beta + b_1\beta_1 + b_2\beta_2 = \Delta, & b\gamma + b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 = 0, \\ c\alpha + c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = 0, & c\beta + c_1\beta_1 + c_2\beta_2 = 0, & c\gamma + c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 = \Delta. \end{array}$$

Die Differentiation der Gleichungen 1) liefert

$$(a_2\xi + b_2\eta + c_2)^2\, dx = d\xi\,(-\gamma_1\eta + \beta_1) + d\eta\,(\gamma_1\xi - \alpha_1),$$
$$(a_2\xi + b_2\eta + c_2)^2\, dy = d\xi\,(\gamma\eta - \beta) + d\eta\,(-\gamma\xi + \alpha).$$

Führt man nun die Bezeichnungen ein:

$$4) \left\{ \begin{array}{ll} (a_2\xi + b_2\eta + c_2)^n A = A', & (a_2\xi + b_2\eta + c_2)^n B = B', \\ A'(-\gamma_1\eta + \beta_1) + B'(\gamma\eta - \beta) = \mathfrak{A}, & A'(\gamma_1\xi - \alpha_1) + B'(-\gamma\xi + \alpha) = \mathfrak{B}, \end{array} \right.$$

so werden A', B' ganze Functionen n^{ter}, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ ganze Functionen $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades in ξ, η, und es ist identisch

$$(a_2\xi + b_2\eta + c_2)^{n+2}\,(A\,dx + B\,dy) = \mathfrak{A}\,d\xi + \mathfrak{B}\,d\eta.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass der Grad der mit den Differentialien multiplicirten Functionen im Allgemeinen durch eine lineare Substitution um Eins erhöht wird, doch sicher niemals um mehr. Er kann folglich auf diese Weise auch niemals um mehr als Eins erniedrigt werden.

Unverändert kann der Grad erstens dadurch bleiben, dass in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Glieder $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden; zweitens auch dadurch, dass $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ einen linearen Factor gemein haben. Es sollen nun diese beiden Möglichkeiten getrennt untersucht werden.

I. Die Bedingung dafür, dass in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Glieder höchster Dimension sich zerstören, ist

$$\gamma_1\overline{A'} - \gamma\overline{B'} = 0,$$

worin durch den wagrechten Strich angedeutet werden soll, dass nur die Glieder n^{ter} Dimension zu nehmen sind. Um diese Bedingung interpretiren zu können, beachte man, dass alsdann der Ausdruck $\gamma_1 A' - \gamma B'$ nur noch von $(n-1)^{\text{tem}}$ Grade und somit

$$(\gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2)^{n-1}\,(\gamma_1 A' - \gamma B')$$

eine ganze Function von x, y ist. Hieraus folgt, dass

$$(\gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2)^n\,(\gamma_1 A' - \gamma B') = \Delta^n\,(\gamma_1 A - \gamma B)$$

durch $\gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2$ algebraisch theilbar ist, oder, was dasselbe bedeutet: die Gleichung

$$\gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2 = 0$$

repräsentirt ein particuläres Integral der Differntialgleichung

$$A\,dx + B\,dy = 0.$$

Dass dies Letztere in der That mit der Gleichung $\gamma_1\overline{A'} - \gamma\overline{B'} = 0$ identisch ist, lässt sich auch folgendermassen erkennen, wenn man sich des geo-

metrischen Ausdruckes bedient. Bedeuten nämlich a, a_1, a_2; b, b_1, b_2 die homogenen Coordinaten zweier Punkte P, Q, so lassen sich die Coordinaten eines variabeln Punktes der Geraden (P, Q), wie bekannt, durch drei Grössen von der Form

$$a\xi + b\eta, \quad a_1\xi + b_1\eta, \quad a_2\xi + b_2\eta$$

darstellen. Die Schnittpunkte dieser Geraden mit einer Curve, deren Gleichung

$$S(x, y, z) = 0,$$

sind gegeben durch die Wurzeln $\frac{\xi}{\eta}$ der Gleichung

$$S(a\xi + b\eta, \ a_1\xi + b_1\eta, \ a_2\xi + b_2\eta) = 0.$$

Ist dieses Polynom identisch Null, unabhängig von ξ, η, so ist die Gerade (P, Q) ein Theil der Curve $S = 0$, und umgekehrt. Denkt man sich nun A, B als homogene Functionen dreier Variabeln geschrieben und setzt

$$S = \gamma_1 A - \gamma B,$$

so ist die zu erfüllende Bedingung

$$\gamma_1 \overline{A'} - \gamma \overline{B'} = S(a\xi + b\eta, \ a_1\xi + b_1\eta, \ a_2\xi + b_2\eta) = 0.$$

Dies bedeutet somit, dass $S = \gamma_1 A - \gamma B = 0$ durch $\gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2$ theilbar ist.

II. Wenn die Ausdrücke

$$\mathfrak{A} = A'(-\gamma_1\eta + \beta_1) + B'(\gamma\eta - \beta),$$
$$\mathfrak{B} = A'(\gamma_1\xi - \alpha_1) + B'(-\gamma\xi + \alpha)$$

einen linearen Factor gemein haben, so kann derselbe, da ein gemeinschaftlicher Theiler von A', B' auszuschliessen ist, nur gleich

$$\begin{vmatrix} -\gamma_1\eta + \beta_1 & \gamma\eta - \beta \\ \gamma_1\xi - \alpha_1 & -\gamma\xi + \alpha \end{vmatrix} = (a_2\xi + b_2\eta + c_2) \cdot \Delta$$

sein. In diesem Falle denken wir uns in $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ wieder die Grössen x, y an Stelle von ξ, η eingeführt und zur Fortschaffung des Nenners mit

$$(\gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2)^{n+1}$$

multiplicirt. Dann sind

$$\mathfrak{A} \cdot (\gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2)^{n+1}, \quad \mathfrak{B} \cdot (\gamma x + \gamma_2 y + \gamma_2)^{n+1}$$

ganze Functionen von x, y, in denen jedoch die Glieder $(n+1)^{\text{ter}}$ Dimension zerstört sind.

In der That, da $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ den Factor $(a_2\xi + b_2\eta + c_2)$ enthalten, so können wir setzen:

$$\mathfrak{A} = (a_2\xi + b_2\eta + c_2) \cdot \mathfrak{A}', \quad \mathfrak{B} = (a_2\xi + b_2\eta + c_2) \cdot \mathfrak{B}',$$

so dass $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}'$ ganze Functionen n^{ten} Grades sind. Führt man x, y für ξ, η ein, so hat man

$$\mathfrak{A} \cdot (\gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2)^{n+1}$$
$$= (a_2\xi + b_2\eta + c_2)(\gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2)\{\mathfrak{A}' \cdot (\gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2)^n\},$$
$$\mathfrak{B} \cdot (\gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2)^{n+1}$$
$$= (a_2\xi + b_2\eta + c_2)(\gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2)\{\mathfrak{B}' \cdot (\gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2)^n\}.$$

In den rechts stehenden Ausdrücken ist aber, wie sich aus 3) ergiebt,

$$5)\qquad (a_2\xi+b_2\eta+c_2)(\gamma x+\gamma_1 y+\gamma_2)=\Delta$$

eine Constante; die linken Seiten reduciren sich somit wirklich auf Ausdrücke n^{ten} Grades in x, y.

Da vermöge 5)

$$A'(\gamma x+\gamma_1 y+\gamma_2)^n=A\,.\,\Delta^n,\quad B'(\gamma x+\gamma_1 y+\gamma_2)^n=B\,.\,\Delta^n$$

ist, so ist die Forderung darauf zurückgeführt, dass

$$\mathfrak{A}\,.\,(\gamma x+\gamma_2 y+\gamma_2)^{n+1}=\Delta^{n+1}\{A\,.\,(-a_2 x+a)+B\,.\,(-a_2 y+a_1)\},$$
$$\mathfrak{B}\,.\,(\gamma x+\gamma_2 y+\gamma_2)^{n+1}=\Delta^{n+1}\{A\,.\,(-b_2 x+b)+B\,.\,(-b_2 y+b_1)\}$$

von der n^{ten} Ordnung seien. Dafür ist offenbar die nothwendige und auch hinreichende Bedingung

$$6)\qquad x\bar{A}+y\bar{B}=0,$$

wo ebenfalls $\bar{A}$, $\bar{B}$ die Glieder n^{ter} Dimension in A, B bezeichnen.

Die Bedingung dafür, dass $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ einen linearen Factor gemein haben, ist also, wie die Gleichung 6) zeigt, von den Coefficienten der anzuwendenden Substitution ganz unabhängig.

Stellt man sich nun die Frage, in welcher Weise es möglich ist, dass der Grad der Coefficienten der Differentialien von $n+1$ auf $n-1$ sinkt, so ist zunächst klar, dass dies nicht dadurch eintreten kann, dass in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Glieder $(n+1)^{ter}$ und n^{ter} Dimension zugleich verschwinden. Denn aus den identischen Gleichungen

$$A'\,.\,(a_2\xi+b_2\eta+c_2)\,.\,\Delta=\mathfrak{A}\,.\,(-\gamma\xi+\alpha)-\mathfrak{B}\,.\,(\gamma\eta-\beta),$$
$$B'\,.\,(a_2\xi+b_2\eta+c_2)\,.\,\Delta=\mathfrak{A}\,.\,(-\gamma_1\xi+\alpha_1)-\mathfrak{B}\,.\,(\gamma_1\eta-\beta_1),$$

welche man durch Auflösung der Gleichungen 4) erhält, würde dann folgen, dass auch A', B' vom Grade $(n-1)$ sind. Ebenso wenig kann aber ein Factor zweiten Grades $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gemein sein; denn aus der Herstellung des allein möglichen gemeinsamen linearen Factors ist ersichtlich, dass diese Annahme einen gemeinschaftlichen Factor auch für A', B' nach sich ziehen würde, was gegen die Voraussetzung wäre.

Hiernach kann eine Herabsetzung des Grades auf $(n-1)$ nur dadurch erfolgen, dass die Glieder $(n+1)^{ter}$ Dimension in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sich zerstören und gleichzeitig ein linearer Factor herausgeht; dies liefert in Verbindung mit dem Gefundenen den Satz:

Damit es möglich sei, die Differentialgleichung

$$A\,dx+B\,dy=0,$$

wo A, B ganze Functionen n^{ten} Grades seien, durch eine lineare Substitution so zu transformiren, dass die Coefficienten der Differentialien von einem um Eins niederen Grade als A und B (resp. der höhere beider) werden, ist es nothwendig und hin-

reichend, dass $xA+yB$ ein Ausdruck n^{ten} Grades sei und dass $\gamma x+\gamma_1 y+\gamma_2$ sich so bestimmen lasse, dass

$$\frac{\gamma_1 A-\gamma B}{\gamma x+\gamma_1 y+\gamma_2}$$

eine ganze Function sei (d. h., dass ein lineares particuläres Integral

$$\gamma x+\gamma_1 y+\gamma_2=0$$

existire).

Es soll nun dieser allgemeine Satz auf den besondern Fall $n=2$ angewandt werden. Wenn $n=1$, d. h. wenn A und B lineare Functionen in x, y sind, so ist das vollständige Integral nach bekannten Methoden herstellbar und hat die Form

$$e \log E+f \log F=Const.,$$

worin e, f constante Grössen, E, F lineare Functionen von der Form $\lambda A+\mu B$ sind. $\frac{e}{f}$ und $\frac{\lambda}{\mu}$ ergeben sich als Wurzeln zweier quadratischer Gleichungen, so dass $\frac{e}{f}$ rational mit $\frac{\lambda}{\mu}$ zusammenhängt. (Hat die Gleichung für $\frac{\lambda}{\mu}$ gleiche Wurzeln, so geht das Integral über in

$$\frac{L}{E}+e \log E=Const.,$$

wo L ebenfalls linear ist. In einem besondern Falle kann das Integral auch die Form

$$L+e \log E=Const.$$

annehmen.)

Wendet man auf die eben discutirte Gleichung eine lineare Substitution an, so erhält man eine neue, in welcher die Coefficienten der Differentialien vom n^{ten} Grade sind und der Gleichung

$$x\bar{A}+y\bar{B}=0$$

genügen.

Umgekehrt, jede Differentialgleichung dieser Art, d. h. von der Form der Jacobi'schen

$$(yL+M)\,dx+(-xL+N)\,dy=0, \tag{7}$$

wo L, M, N beliebige lineare Functionen sind, lässt sich durch eine passende lineare Substitution auf den Fall $n=1$ reduciren und ist mithin in derselben Einfachheit integrirbar.

Ist in der That $\gamma x+\gamma_1 y+\gamma_2=0$ die Gleichung einer der (zu $L=0$ nicht parallelen) Durchschnittssehnen der Curven

$$A=yL+M=0, \quad B=-xL+N=0,$$

so kann man setzen:

$$(\gamma x+\gamma_1 y+\gamma_2)(L+l)=\delta_1 A-\delta B=(\delta x+\delta_1 y)L+(\delta_1 M-\delta N),$$

worin l, δ, δ_1 constante Grössen bedeuten. Die Vergleichung der Glieder höchster Dimension rechts und links zeigt, dass $\gamma x+\gamma_1 y$ identisch mit

$\delta x + \delta_1 y$ ist und dass somit $\delta = \gamma$, $\delta_1 = \gamma_1$ gesetzt werden kann. Somit sind hier jene beiden Bedingungen erfüllt, welche sich oben zur Erniedrigung des Grades auf $(n-1)$ als nothwendig und hinreichend erwiesen haben. Wendet man nun auf 7) eine lineare Substitution von der Form der Gleichungen 2) an, so dass

$$\gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2 = 0$$

die obige Bedeutung einer Durchschnittssehne hat, so erhält man

$$P\,d\xi + Q\,d\eta = 0, \tag{8}$$

wo P und Q linear in ξ, η sind. Das Integral von 8) ist nun im Allgemeinen

$$e \log(\lambda P + \mu Q) + f \log(\lambda_1 P + \mu_1 Q) = Const.,$$

und wir haben somit nach Wiedereinführung von x, y das Integral von 7) Form

$$e \log E + f \log F + g \log G = Const., \quad (e + f + g = 0).$$

E, F, G sind lineare Functionen von x, y und bedeuten, gleich Null gesetzt, die drei mit $L = 0$ nicht parallelen Durchschnittssehnen von $A = 0$, $B = 0$.

In besonderen Fällen treten die Formen auf:

$$\frac{L}{E} + e \log E + f \log F = Const., \quad \frac{L}{K^2} = Const. \quad (K = \text{Function 2. Grades.})$$

Breslau, Januar 1871. Dr. J. Rosanes.

XII.

Ueber die logarithmische Abbildung und die aus ihr entspringenden orthogonalen Curvensysteme.

Von

Dr. G. Holzmüller,

Ordentl. Lehrer am Domgymnasium zu Magdeburg.

(Hierzu Tafel II, Fig. 1.)

§ 1. Allgemeiner Charakter der logarithmischen Abbildung.

Man denke sich eine Ebene, in welcher nach der bekannten Vorstellungsweise sämmtliche complexe Grössen $z = x + yi$ enthalten sind, bilde zu jeder Zahl den natürlichen Logarithmus und fixire ihn in einer andern Ebene, welche ebenfalls alle complexen Zahlen $Z = X + Yi$ enthält, so dass jedem Punkte der z-Ebene ein oder mehrere Punkte der Z-Ebene entsprechen. Man erhält auf diese Weise, wie durch jede Abbildung mittels einer Function complexen Arguments, eine in den kleinsten Theilen ähnliche Uebertragung der einen Ebene auf die andere. Das Wesen dieser Abbildung soll untersucht werden.

Wir haben zunächst die Gleichungen

$$1)\qquad Z = X + Yi = lg\, z = lg\,(x + yi),$$

$$2)\qquad z = x + yi = e^Z = e^{X+Yi} = e^X (\cos Y + i \sin Y),$$

also

$$x = e^X \cos Y, \quad y = e^X \sin Y,$$

woraus sich ergiebt

$$\mathrm{I})\qquad e^X = r = +\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos Y = \frac{x}{r}, \quad \sin Y = \frac{y}{r}$$

oder

$$\mathrm{II})\qquad X = lg\, r, \quad Y \pm 2n\pi = arc\cos\frac{x}{r} = arc\sin\frac{y}{r} = arc\tan\frac{y}{x} = \vartheta,$$

wo ϑ ein bestimmter Winkel zwischen 0 und 2π ist.

Die Linie $X=a$ entspricht demnach der Curve $r=e^a$, d. h. die Parallelen zur Y-Axe sind die Abbildungen concentrischer Kreise um den Nullpunkt mit den entsprechenden Radien.

Speciell entspricht also die Linie $X=-\infty$ dem Nullpunkte, die Linie $X=0$ dem Einheitskreise, die Linie $X=+\infty$ einem Kreise um den Nullpunkt mit unendlich grossem Radius.

Sämmtliche Linien $Y=b\pm 2n\pi$ entsprechen der einen Linie $\vartheta=b$, also:

Die Parallelen zur X-Axe sind die Abbildungen der durch den Nullpunkt gehenden Radien mit den entsprechenden Abweichungen, und zwar entsprechen speciell die Linien

$$Y=\pm 2n\pi$$

der positiven reellen Axe, die Linien

$$Y=\pm(2n+1)\pi$$

der negativen reellen Axe, die Linien

$$Y=\frac{\pi}{2}\pm 2n\pi=\frac{(1\pm 4n)\pi}{2}.$$

der positiven imaginären Axe, die Linien

$$Y=-\frac{\pi}{2}\pm 2n\pi$$

der negativen imaginären Axe.

Geht man also in der Z-Ebene auf einer Linie parallel der reellen Axe von $X=-\infty$ über $X=0$ nach $X=+\infty$, so geht man in der z-Ebene auf einer Geraden von bestimmter Neigung von $r=0$ über $r=1$ nach $r=+\infty$. Geht man hingegen in der Z-Ebene auf einer Parallelen zur Y-Axe von $Y=0$ bis $Y=2\pi$, so geht man in der z Ebene von dem entsprechenden Punkte der positiven reellen Axe aus in einem vollen Kreise um den Nullpunkt herum, und zwar im positiven Sinne. Geht man aber in der Z Ebene auf der Geraden weiter, sei es nach $+\infty$ oder $-\infty$ hin, so wiederholt sich in der z-Ebene das Umkreisen des Nullpunktes im positiven oder negativen Sinne. Jedem Intervalle 2π entspricht dabei ein voller Kreis.

Daraus geht hervor, dass jedem unendlich langen Flächenstreifen der Z-Ebene, der parallel der reellen Axe und von der Breite 2π ist, die ganze z-Ebene entspricht, jedem Flächenstreifen parallel der imaginären Axe hingegen ein Kreisring von bestimmter Breite in der z-Ebene, den man jedoch unendlichfach über sich selbst gewunden denken muss. Jedem Punkte der Z-Ebene entspricht ein und nur ein Punkt der z-Ebene; jedem Punkte der z-Ebene entsprechen unendlich viele Punkte der Z-Ebene, die sämmtlich auf einer Parallelen zur Y-Axe liegen und im Intervalle 2π auf einander folgen. Dies ist die geometrische Bedeutung der Vieldeutigkeit des Logarithmus und der Periodicität der Exponentialfunction.

Um die n-Deutigkeit irgend einer Function in eine Eindeutigkeit des Ortes zu verwandeln, denke man sich nach Riemann (vergl. Durège, Abschnitt III) die Ebene des Arguments $n$fach mit „Blättern" bedeckt. Es liegen also hier unendlich viele „Riemann'sche Blätter" übereinander.

Da dem Nullpunkte der z-Ebene nur ein Punkt, der „unendliche Punkt" der Z-Ebene entspricht, so ist er aufzufassen als ein „Verzweigungspunkt", in dem sämmtliche Riemann'sche Blätter zusammenhängen, d. h. als ein Windungspunkt unendlicher Ordnung, nach dessen Umkreisen in dem einen Sinne man stets in ein tiefer liegendes, im andern Sinne in ein höher liegendes Blatt gelangt. Dasselbe ist aber auch mit dem unendlichen Punkte der Fall. Denken wir uns beide durch einen „Schnitt" verbunden, bei dessen Ueberschreiten man in ein neues Blatt gelangt und den wir am bequemsten mit der positiven reellen Axe zusammenfallen lassen, so ist in jedem „Blatte", welches einem unendlichen Streifen der Z-Ebene entspricht, der Logarithmus eindeutig definirt; man bleibt in demselben Blatte und demselben Flächenstreifen, so lange man es vermeidet, den Schnitt zu überschreiten.

Es gehört zum wesentlichen Charakter der Function complexen Arguments, dass der Werth ihres Differentialquotienten für einen bestimmten Werth des Arguments unabhängig ist von der Richtung der Aenderung des Arguments. Der „absolute Betrag" des Differentialquotienten giebt das Verhältniss an, in welchem die unmittelbare Umgebung des Punktes, der dem Functionswerthe entspricht, vergrössert oder verkleinert ist gegen die unmittelbare Umgebung des Punktes, der dem Werthe des Arguments entspricht. Seine „Abweichung" hingegen zeigt an, um welchen Winkel die Zeichnung an der entsprechenden Stelle der Z-Ebene gedreht werden muss, um in die Lage der Zeichnung in der unmittelbaren Umgebung des ersten Punktes zu gelangen. Nun ist bei uns

$$\frac{d\, lg\, z}{dz} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r}[\cos(-\vartheta) + i \sin(-\vartheta)].$$

Der absolute Betrag ist $\frac{1}{r}$; folglich wird die Umgebung des Nullpunktes der z-Ebene in der Z-Ebene unendlichfach vergrössert dargestellt, die des unendlichen Punktes der z-Ebene hingegen unendlichfach verkleinert. In diesen beiden Punkten hört also die Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen auf.

Für die unmittelbare Umgebung sämmtlicher Punkte, die auf einem Kreise um den Nullpunkt der z-Ebene mit dem Radius $r = c$ liegen, ist das Vergrösserungsverhältniss $\frac{1}{c}$; für den Einheitskreis ist es der Einheit gleich.

Die Abweichung $(-\vartheta)$ endlich zeigt an, dass das Bild an jeder Stelle der Z-Ebene um $(+\vartheta)$ gedreht werden muss, wenn es in der Lage über-

einstimmen soll mit der entsprechenden Stelle der z-Ebene. Die Abweichung ist constant für die Linien $\vartheta = b$ und die entsprechenden $Y = b \pm 2n\pi$.

Specielleres über alle diese Verhältnisse findet man in Neumann's „Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale" und in Durège's „Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse".

Wir gehen jetzt genauer auf das gegenseitige Entsprechen der beiden Ebenen ein.

Der Geraden in der Z-Ebene

$$\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} = 1$$

entspricht in der z-Ebene die Curve

$$\frac{lg\, r}{a} + \frac{\vartheta \pm 2n\pi}{b} = 1,$$

oder, da die Abweichungen $\vartheta \pm 2n\pi$ geometrisch mit einander übereinstimmen, die Curve

$$\frac{lg\, r}{a} + \frac{\vartheta}{b} = 1 \text{ oder } r = e^{a\left(1 - \frac{\vartheta}{b}\right)}.$$

Setzt man $e^a = c$ und $e^{-\frac{a}{b}} = k$, so geht die Gleichung über in

$$r = c k^{\vartheta}.$$

Den Geraden in der Z-Ebene entsprechen also in der z-Ebene logarithmische Spiralen, deren Centrum der Nullpunkt ist. k müssen wir als Parameter der letzteren betrachten.

Umgekehrt entspricht jeder dieser logarithmischen Spiralen eine unendliche Anzahl paralleler Geraden, welche die imaginäre Axe der Z-Ebene in aufeinanderfolgenden Intervallen von der Grösse 2π schneiden.

Ueberhaupt entsprechen jeder Curve der z-Ebene unendlich viele congruente Curven der Z-Ebene, welche um Intervalle $2n\pi$ in der Richtung der imaginären Axe gegen einander verschoben sind, so dass also die Zeichnung in dem einen Flächenstreifen congruent ist der Zeichnung in sämmtlichen anderen.

Unter den Gebilden der Z-Ebene interessiren uns nur diejenigen, deren Abbildungen in der z-Ebene sich decken, so dass wir nur nöthig haben, die Beziehungen eines Flächenstreifens zur z Ebene zu untersuchen.

Theilt man einen Flächenstreifen der Z-Ebene durch Parallele zur X-Axe in eine beliebige Anzahl congruenter Flächenstreifen ein, so entspricht denselben eine Reihe congruenter Flächenräume der z-Ebene, welche durch Radien begrenzt werden, die unter gleichen Winkeln aufeinander folgen. Setzt man die erstere Eintheilung über die ganze Z-Ebene fort, so decken sich die Zeichnungen in den verschiedenen Riemann-schen Blättern.

Wie gegen jede der Parallelen in der Z-Ebene, so findet auch gegen jeden Radius der z-Ebene Symmetrie statt. Man theile jetzt die Z-Ebene durch Gerade parallel der Y-Axe in congruente Flächenstreifen ein; dieser Eintheilung entspricht die der z-Ebene in ähnliche, concentrische Kreisringe. Ist nämlich die allgemeine Gleichung der Linien in der Z-Ebene $X = a + nb$, so ist die Grösse der einzelnen Radien durch die Gleichung $r = e^{a+nb}$ gegeben. Da aber

$$e^{a+nb} : e^{a+(n+1)b} = e^{a+(n+1)b} : e^{a+(n+2)b},$$

so folgt, dass die aufeinanderfolgenden Kreisringe ähnlich sind. Setze ich den Radius eines dieser Kreise gleich der Einheit, so ist die Figur ausserhalb dieses Kreises das Reciproke der Figur innerhalb desselben. Diese Reciprocität gegen jeden der Kreise entspricht der Symmetrie, welche gegen jede der Geraden $X = a + nb$ stattfindet.

Vereinigt man die beiden besprochenen Eintheilungen, so wird jeder Flächenstreifen der Z-Ebene in congruente Rechtecke zerlegt, während die z-Ebene in ein System ähnlicher rechtwinkliger Flächenstücke zerlegt wird, die von Radien und concentrischen Kreisen begrenzt werden. Vergrössert man die Anzahl der Theile, so werden die rechtwinkligen Flächenstücken der z-Ebene kleinen Rechtecken zustreben, welche denen der Z-Ebene ähnlich sind. Wir können sie deshalb als „Rechtecke" bezeichnen. Ist eins derselben gegeben, so folgen alle anderen durch einfache Construction.

Nach diesen Vorbereitungen lassen sich die wesentlichsten Eigenschaften der logarithmischen Spiralen, welche allgemein den Geraden der Z-Ebene entsprechen, mit einem Schlage entwickeln. Denn da die Eckpunkte der in der Z-Ebene diagonal aufeinanderfolgenden Rechtecke auf Geraden liegen, so lässt sich die logarithmische Spirale definiren als die Curve, welche durch die Eckpunkte der diagonal aufeinanderfolgenden „Rechtecke" der z-Ebene bestimmt ist.

§ 2. Die Eigenschaften der logarithmischen Spirale.

Die Eigenschaften der Geraden übertragen sich auf die logarithmischen Spirale in folgender Weise:

Die Gerade schneidet sämmtliche Linien parallel der X Axe und Y-Axe unter constantem Winkel; folglich:

1. Die logarithmische Spirale schneidet sämmtliche Radien und sämmtliche concentrischen Kreise unter demselben Winkel.

Im speciellen Falle ist dieser Winkel gleich 0° oder 90°, dann sind die Spiralen Gerade oder Kreise. Die Tangente des Winkels ist $\frac{b}{a}$ oder $\frac{a}{b}$,

wenn a und b die Rechteckseiten in der Z-Ebene sind. Der Winkel bestimmt die specielle Gestalt der Spirale.

Da die Gerade im Allgemeinen durch sämmtliche Flächenstreifen geht, so folgt:

2. Die logarithmische Spirale schneidet jeden Radius unendlich oft und macht unendlich viele Windungen um den Nullpunkt.

Markirt man Punkte auf der Geraden, deren Abscissen in arithmetischem Verhältniss aufeinander folgen, so nehmen auch die Ordinaten derselben in arithmetischem Verhältniss zu oder ab. Daraus folgt:

3. Folgen die Abweichungen von gewissen Punkten der Spirale in arithmetischem Verhältniss aufeinander, so nehmen die entsprechenden Radien in geometrischem Verhältniss zu oder ab.

Durch jeden Punkt geht eine und nur eine Gerade von gegebener Richtung; dieselbe schneidet sich selbst nie und trifft im Allgemeinen niemals congruent gelegene Punkte der verschiedenen Flächenstreifen. Folglich:

4. Durch jeden Punkt geht eine und nur eine logarithmische Spirale von gegebenem Centrum, welche die Radien unter gegebenem Winkel schneidet. Dieselbe schneidet sich selbst nie wieder.

Nennt man die durch die Eckpunkte der Rechtecke bestimmten Theile der Geraden und der Spirale „correspondirende“ Theile, so sind dieselben für die Gerade congruent. Hingegen:

5. Die correspondirenden Theile der logarithmischen Spirale sind ähnlich, und zwar sind ihre Längen proportional den Radii vectores ihrer Anfangs- oder Endpunkte.

Parallele Gerade schneiden sich im Endlichen nie; folglich:

6. Gleichwinklige logarithmische Spiralen schneiden sich nie, ausgenommen im Nullpunkte und dem unendlichen Punkte.

Verschiebt man eine Gerade von gegebener Richtung parallel zu sich selbst so, dass jeder Punkt derselben sich auf einer Parallelen zur Y-Axe bewegt, so erhält man sämmtliche Geraden von derselben Richtung.

7. Dreht man demnach eine logarithmische Spirale um das Centrum, so dass jeder Punkt sich auf einem Kreise um dasselbe bewegt, und zwar sämmtliche Punkte mit gleicher Winkelgeschwindigkeit, so erhält man sämmtliche gleichwinkligen logarithmischen Spiralen desselben Centrums. Diese sind also sämmtlich congruent.

Ebenso erhält man sämmtliche Geraden gegebener Richtung durch Verschiebung einer solchen parallel der X-Axe, also:

8. Vergrössert man alle Radii vectores einer logarithmischen Spirale in demselben Verhältniss, so erhält man eine ähnliche, folglich auch congruente Spirale.

Wie man unter 7 nur die Drehung von 0 bis 2π nöthig hat, um alle logarithmischen Spiralen gleichen Winkels und desselben Centrums zu erzeugen, so sind unter 8 nur diejenigen Werthe des Vergrösserungsverhältnisses nöthig, welche einen Punkt der Spirale auf seinem Radius vector bis zu einem der beiden benachbarten Punkte der Spirale sich bewegen lassen.

Diejenigen Curven, welche eine Schaar paralleler Geraden unter constantem Winkel schneiden, sind wiederum parallele Gerade. Daraus folgt:

9. Diejenigen Curven, welche eine Schaar gleichwinkliger logarithmischer Spiralen unter constantem Winkel schneiden, sind ebenfalls logarithmische Spiralen.

Im speciellen Falle erhält man das orthogonale System. Durch parallele Gerade und ihre Orthogonalen kann man die Ebenen, resp. den Flächenstreifen in ein System congruenter Rechtecke eintheilen. Hieraus folgt mit Hilfe von Satz 5:

10. Durch gleichwinklige logarithmische Spiralen und ihre Orthogonalen kann man die Ebene in ein System ähnlicher „Rechtecke" eintheilen. (Dies gilt zunächst nur von der Gesammtheit der Riemann'schen Blätter; man kann jedoch durch gewisse Kunstgriffe erreichen, dass die Zeichnungen in den verschiedenen Blättern sich decken, also die Ebene in der verlangten Weise eingetheilt ist.)

Das System gleichwinkliger logarithmischer Spiralen desselben Centrums gehört also unter die sogenannten isothermischen Curvensysteme.

Aus der Symmetrie des Rechtecks und seiner Diagonalen ergiebt sich Folgendes:

11. Setzt man den Radius irgend eines der concentrischen Kreise gleich der Einheit, und transformirt man vom Nullpunkte aus durch reciproke Radii vectores, so verwandelt sich jede logarithmische Spirale in eine congruente, welche symmetrisch liegt gegen den Radius vector des Durchschnittspunktes der Spirale und des Kreises.

Schneidet eine Gerade irgend eine andere, so schneidet sie sämmtliche Parallelen des letzteren, also auch die in den oben genannten Intervallen aufeinanderfolgenden. Also:

12. Schneiden sich zwei logarithmische Spiralen einmal, so schneiden sie sich unendlich oft und stets unter demselben Winkel. Dabei folgen die Radii vectores der Durchschnittspunkte in gleichen Winkelabständen aufeinander.

Die logarithmische Spirale ist schon von Jacob Bernoulli mit grosser Vorliebe behandelt. Wir wollen daher einige Eigenschaften derselben

welche sich auf die folgenden Paragraphen beziehen, nur flüchtig andeuten. Sie lassen sich sämmtlich elementar beweisen, wenn man die oben gegebene Definition der logarithmischen Spirale zu Grunde legt.

13. Zieht man in den aufeinanderfolgenden Punkten einer logarithmischen Spirale Gerade, welche gleiche Neigung gegen den jedesmaligen Radius vector haben, so ist die Enveloppe derselben eine gleichwinklige logarithmische Spirale.

Ein specieller Fall dieses Satzes ist folgender:

Die Evolute einer logarithmischen Spirale ist eine gleichwinklige logarithmische Spirale.

Aus letzterem folgt, dass der Durchschnitt der Normalen in einem Punkte der Spirale und des Lothes im Anfangspunkte des Radius vector den Krümmungsmittelpunkt giebt.

Mit Hilfe des Satzes 11 erhält man folgendes Resultat:

14. Construirt man Kreise, welche durch den Nullpunkt gehen und die logarithmische Spirale in aufeinanderfolgenden Punkten unter constantem Winkel schneiden, so ist die Enveloppe dieser Kreise eine gleichwinklige Spirale.

In dem speciellen Falle, wo die Kreise rechtwinklig schneiden, bilden die Linien vom Nullpunkte nach dem Berührungspunkte und dem entsprechenden Durchschnittspunkte einen rechten Winkel.

Von den Krümmungskreisen der logarithmischen Spirale, die für das Spätere von Wichtigkeit sind, geben wir folgende Sätze an:

15. Der Krümmungskreis der logarithmischen Spirale umschliesst stets den Nullpunkt. Sein Radius ist für endliche Punkte endlich und wächst proportional dem Radius vector. Der Krümmungskreis schneidet die logarithmische Spirale nur einmal; der eine Theil der Spirale liegt innerhalb, der andere ausserhalb desselben.

16. Jeder Krümmungskreis der logarithmischen Spirale umschliesst sämmtliche kleineren und wird von allen grösseren umschlossen. Durch jeden Punkt der Ebene geht demnach ein und nur ein Krümmungskreis der logarithmischen Spirale.

17. Durch einen Punkt A geht für jede Spirale des gleichwinkligen Systems ein und nur ein Krümmungskreis. Die Berührungspunkte derselben mit ihren entsprechenden Spiralen liegen sämmtlich auf einem Kreise, nämlich auf dem Krümmungskreise der durch A gehenden Spirale für den Punkt A.

Beweis. O sei der Mittelpunkt des Krümmungkreises der durch A gehenden Spirale für den Punkt A; P sei der Krümmungsmittelpunkt für

einen Punkt C einer andern Spirale; vorausgesetzt wird, dass dieser zweite Krümmungskreis auch durch A geht. Dann ist zu beweisen, dass $OA = OC$ ist. Offenbar sind die rechtwinkligen Dreiecke MPC und MAO ähnlich. Es lässt sich aber leicht folgender Satz beweisen: Liegen zwei rechtwinklige und ähnliche Dreiecke gleichstimmig und so, dass die Scheitel der rechten Winkel zusammenfallen, so schneiden sich die Verbindungslinien der anderen entsprechenden Ecken rechtwinklig; also stehen OP und AC in D senkrecht aufeinander. PD halbirt die Sehne AC, folglich ist auch $OC = OA$. Damit ist der Satz bewiesen.

Er giebt uns eine Methode, den durch einen Punkt A gehenden Krümmungskreis für eine beliebige logarithmische Spirale zu construiren:

Man construire den Krümmungskreis für den Punkt A der durch A gehenden gleichwinkligen Spirale. Wo derselbe die gegebene Spirale schneidet, ist der Berührungspunkt des gesuchten Kreises.

Schliesslich sei noch folgender Satz erwähnt:

18. Die von irgend einem Punkte an sämmtliche gleichwinklige logarithmische Spiralen desselben Centrums gelegten Tangenten berühren jene in Punkten, die auf einem Kreise liegen, welcher durch den gegebenen Punkt, den Nullpunkt und den Krümmungsmittelpunkt für den gegebenen Punkt der durch denselben gehenden Spirale geht.

Specieller Fall: Parallele Tangenten berühren das System gleichwinliger Spiralen in Punkten, die auf einer Geraden durch den Nullpunkt liegen.

§ 3. Cartographische Bedeutung der logarithmischen Abbildung.

Legt man auf den Nullpunkt der z-Ebene eine Kugel und verbindet man jeden Punkt der Ebene durch eine Gerade mit dem Pole, d. h. mit dem Diametralpunkte des Berührungspunktes, so wird bekanntlich die Ebene in den kleinsten Theilen ähnlich und eindeutig auf die Kugel übertragen. Die umgekehrte Operation ist die stereographische Projection des Ptolemäus, und zwar ein specieller Fall derselben, den man als Polarprojection bezeichnen könnte. Dabei entsprechen den Geraden in der z-Ebene, welche durch den Nullpunkt gehen, die Meridiane der Kugel, den concentrischen Kreisen um den Mittelpunkt die Parallelkreise derselben. Auf Grund der Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen entsprechen den logarithmischen Spiralen um den Nullpunkt Kugelcurven, welche die Meridiane unter gleichen Winkeln schneiden, die sogenannten „loxodromischen Linien“, d. h. die Wege von Punkten, welche sich auf der Kugeloberfläche stets nach derselben „Himmelsgegend“ bewegen, die Linien also, welche ein Schiff beschreiben würde, so lange es denselben Cours beibehält.

Eine andere gebräuchliche Projection, bei welcher Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen stattfindet, ist die Mercatorprojection. Sie beruht auf folgender Vorstellung: Man construire einen Kreiscylinder, welcher die Kugel im Aequator berührt, und übertrage die Kugeloberfläche auf den Cylinder so, dass jedem Meridian die denselben berührende Seite des Cylinders entspricht, jedem Parallelkreise hingegen ein Parallelschnitt zum Aequator. Dazu kommt noch die nähere Bestimmung, dass die Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen bewahrt werden soll. Schneidet man jetzt den Cylinder längs einer Seite auf und breitet man ihn in die Ebene aus, so hat man einen unendlich langen Flächenstreifen, auf den die Kugeloberfläche conform übertragen ist.

Vergleicht man beide Projectionen, so erkennt man, dass beide in den kleinsten Theilen ähnlich sind und dass die eine die conforme Uebertragung der ganzen Ebene auf einen unendlichen Flächenstreifen ist. Dasselbe Resultat erhielten wir durch die logarithmische Abbildung. Dieselbe giebt also, wie man bereits weiss, den analytischen Zusammenhang zwischen der Mercatorprojection und der Polarprojection des Ptolemäus.

Diese praktische Bedeutung veranlasst uns, eine neue geometrische Verwandtschaft in den Bereich der Betrachtung zu ziehen. Da bei der stereographischen Projection Kreisen auf der Kugel Kreise in der Ebene entsprechen, so müssen bei der Projection von einem beliebigen Punkte der Kugeloberfläche aus auf die Antipodenebene die Meridiane in eine durch zwei feste Punkte gehende Kreisschaar übergehen, während den Parallelkreisen die Orthogonalschaar jener entspricht.

Sämmtliche durch die allgemeine stereographische Projection erhaltenen Abbildungen stehen in sogenannter Kreisverwandtschaft, und demnach erhält man durch Transformation der Polarprojection mittels reciproker Radii vectores von einem Punkte der Ebene aus dasselbe Bild, als wenn man von dem entsprechenden Punkte der Kugeloberfläche aus stereographisch projicirt.

Die allgemeine Transformation durch reciproke Radii vectores geschieht aber analytisch durch die Function

$$z = \frac{au+b}{cu+d},$$

wo u das complexe Argument bedeutet, während a, b, c, d Constante sind. Daraus folgt:

Die Transformation

$$Z = lg\,\frac{au+b}{cu+d}$$

giebt eine geometrische Verwandtschaft, in welcher den Parallelen zur X- und Y-Axe in der Z-Ebene Kreise der u-Ebene entsprechen, welche durch zwei feste Punkte gehen, und

solche, welche diese Kreisschaar orthogonal schneiden. Allgemein aber entsprechen den Geraden der Z-Ebene Curven in der u-Ebene, welche sämmtliche Kreise jeder Schaar unter constantem Winkel schneiden.

Die letzteren Curven sind die allgemeinen stereographischen Projectionen der loxodromischen Linien, sie werden also unendlich viele Windungen um jeden der beiden Punkte machen, welche den Polen der Kugel entsprechen, so dass man sie logarithmische Doppelspiralen oder kürzer Doppelspiralen nennen könnte (vergl. Zeichnung). Man erhält sie natürlich auch durch Transformation logarithmischer Spiralen durch reciproke Radii vectores von irgend einem Punkte der Ebene aus.

Elementar kann man diese Curven construiren aus den diagonal aufeinanderfolgenden „Rechtecken“, in welche man die Ebene durch die beiden orthogonalen Kreisschaaren eintheilen kann.

Die correspondirenden Theile der logarithmischen Spirale sind einander ähnlich; projicirt man also von Punkten aus, die auf einer gleichwinkligen logarithmischen Spirale liegen, so erhält man stets ähnliche Gebilde. Folglich erhält man die ganze Mannichfaltigkeit der Formen unserer gleichwinkligen Doppelspiralen, wenn man eine logarithmische Spirale von sämmtlichen Punkten der reellen Axe aus durch reciproke Radii vectores projicirt, oder, was dasselbe ist, wenn man von einem festen Punkte aus sämmtliche gleichwinkligen logarithmischen Spiralen transformirt. Man kann also eine einfachere, als die oben genannte Transformation anwenden, um das Wesen der in Rede stehenden Curven zu untersuchen.

Analytisch giebt sich diese folgendermassen. Es ist

$$\frac{au+b}{cu+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cu+d)}=\gamma+\frac{\alpha}{\beta u+\delta}.$$

Setzt man $\frac{\alpha}{\beta u+\delta}=\frac{1}{z}$, was bekanntlich der Verwandtschaft der vollkommenen Aehnlichkeit entspricht, so hat man im Wesentlichen die Form $\gamma+\frac{1}{z}$. Wir untersuchen also die einfachere Abbildung

$$Z=lg\left(\gamma+\frac{1}{z}\right),$$

welche den analytischen Zusammenhang zwischen der allgemeinen stereographischen und der Mercatorprojection giebt.

§ 4. Allgemeiner Charakter der Abbildung $Z=lg\left(\gamma+\frac{1}{z}\right)$.

$$Z=lg\left(\gamma+\frac{1}{z}\right)=X+Yi=lg\left(\gamma+\frac{1}{x+yi}\right)=lg\left(\gamma+\frac{x-yi}{x^2+y^2}\right)$$

oder

$$e^{X+Yi}=e^X(\cos Y+i\sin Y)=\left(\gamma+\frac{x}{x^2+y^2}\right)-i\frac{y}{x^2+y^2},$$

folglich

$$e^X \cos Y = \gamma + \frac{x}{x^2+y^2}, \quad e^X \sin Y = \frac{-y}{x^2+y^2},$$

also

$$\left\{ \begin{aligned} e^{2X} &= \frac{1+2\gamma x+\gamma^2(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{1+2\gamma r\cos\vartheta+\gamma^2 r^2}{r^2} \\ \tan Y &= \frac{-y}{\gamma(x^2+y^2)+x} = -\frac{\sin\vartheta}{\gamma r+\cos\vartheta}. \end{aligned} \right.$$

An Stelle der Geraden in der Z-Ebene

$$\frac{X}{a}+\frac{Y}{b}=1$$

tritt also in der z-Ebene die Curve

$$1) \qquad \frac{1}{2a} lg\left(\gamma^2+\frac{1+2\gamma x}{x^2+y^2}\right) - \frac{1}{b} arc.tan \frac{y}{\gamma(x^2+y^2)+x} = 1,$$

oder in Polarcoordinaten

$$2) \qquad \frac{1}{2a} lg \frac{1+2\gamma r\cos\vartheta+\gamma^2 r^2}{r^2} - \frac{1}{b} arc.tan \frac{\sin\vartheta}{\gamma r+\cos\vartheta} = 1.$$

Setzt man, wie in § 1, $e^a = c$ und $e^{-\frac{a}{b}} = k$, so geht die letztere Gleichung, anders geschrieben, in folgende über:

$$3) \qquad \frac{1+2\gamma r\cos\vartheta+\gamma^2 r^2}{r^2} = c^2 k^{-arc.tan\frac{\sin\vartheta}{\gamma r+\cos\vartheta}}.$$

Man erkennt leicht, dass diese Gleichung durch Transformation mittels reciproker Radii vectores aus der Gleichung der logarithmischen Spirale $r = ck^\vartheta$ entsteht. Die allgemeinste Gestalt der Gleichung unserer Doppelspiralen ist weit complicirter.

Ohne Weiteres erkennt man, dass im speciellen Falle den Linien $Y = b$ und $X = a$ Kreise gleicher Potenzlinie entsprechen, den ersteren die durch zwei feste Punkte gehende, den andern die orthogonale Kreisschaar.

Die interessantesten Eigenschaften der logarithmischen Doppelspiralen wollen wir auf elementarem Wege ermitteln, indem wir das in § 1 und § 2 von den logarithmischen Doppelspiralen Gesagte benutzen und Einiges über die beiden Kreisschaaren gleicher Potenzlinie vorausschicken.

Theilt man, wie oben, die Ebene durch Gerade, welche durch einen Punkt gehen und sich am bequemsten (der Schliessung wegen) unter Winkeln $\frac{\pi}{n}$ schneiden, und durch concentrische Kreise, deren Radien in geometrischem Verhältniss aufeinander folgen, in ähnliche „Rechtecke" ein, so findet gegen jede Gerade Symmetrie statt, und das Gebilde ausserhalb jedes Kreises ist reciprok dem Gebilde innerhalb desselben, wenn man den Radius des Kreises als Einheit, seinen Mittelpunkt aber als Centrum der Transformation betrachtet.

Transformiren wir von einem Punkte aus durch reciproke Radii vectores, wodurch wir die Eintheilung der Ebene durch zwei Kreisschaaren gleicher Potenzlinie in kleine „Rechtecke“ erhalten, welche mit zunehmender Kleinheit der Aehnlichkeit zustreben, so stehen die einzelnen Flächenstreifen wie die einzelnen Rechtecke in Kreisverwandtschaft, und namentlich findet folgende Beziehung statt: Das Gebilde ausserhalb eines Kreises ist ebenso, wie oben, reciprok dem Gebilde innerhalb desselben (Symmetrie ist specieller Fall der Reciprocität), und zwar entspricht jeder Kreis der einen Schaar sich selbst, während jeder der andern Schaar einem andern Kreise seiner Gruppe entspricht. Das Centrum des zu Grunde gelegten Kreises ist dabei der innere Aehnlichkeitspunkt für je zwei sich entsprechende Kreise.

Sind je zwei aufeinanderfolgende Kreise der beiden Gruppen gegeben, so lassen sich sämmtliche construiren, und zwar dient zur Vereinfachung der Constructionen der Satz, dass, wenn Kreise gleicher Potenzlinie durch einen dritten geschnitten werden, die neuen Potenzlinien sämmtlich durch einen Punkt der ersteren gehen. Gewisse Vereinfachungen treten ferner auf, wenn die Eintheilung so gewählt wird, dass die Potenzlinien der beiden Schaaren mit zu derselben gehören, denn gegen beide findet dann Symmetrie statt.

Transformirt man das ganze Gebilde noch einmal von irgend einem Punkte aus durch reciproke Radii vectores, so bleibt sein wesentlicher Charakter ungeändert.

§ 5. Eigenschaften der logarithmischen Doppelspirale.

1. Die logarithmische Doppelspirale schneidet sämmtliche Kreise jeder Schaar unter constantem Winkel. Jeder Kreis der sich schneidenden Schaar wird unendlich oft, jeder der andern Schaar nur einmal getroffen.

2. Die Doppelspirale macht um beide Pole unendlich viele Windungen, und zwar um beide in entgegengesetztem Sinne.

3. Durch jeden Punkt der Ebene geht eine und nur eine Doppelspirale mit gegebenen Polen, welche die Kreise unter bestimmtem Winkel schneidet. Sich selbst schneidet die Doppelspirale nie.

4. Gleichwinklige Doppelspiralen schneiden sich, abgesehen von den beiden Polen, nie.

5. Betrachte ich den Mittelpunkt eines Kreises der beiden Schaaren als Centrum der Transformation $Z=\frac{1}{z}$, und seinen Radius als Einheit, so geht jede Doppelspirale in eine andere über, welche den

Kreis unter dem Supplementwinkel schneidet. Wiederholt man diese Transformation mittels irgend eines andern Kreises, so geht die neue Doppelspirale in eine der ersteren gleichwinklige über, woraus sich folgern lässt:

6. Sämmtliche gleichwinkligen Doppelspiralen stehen in Kreisverwandtschaft, und ebenso die correspondirenden Stücke derselben.

Sind also die Pole und zwei Punkte einer Doppelspirale gegeben, so lassen sich beliebig viele Punkte derselben construiren.

Sind die beiden unter 5 gewählten Kreise die Potenzlinien der beiden Kreisschaaren, so geht die Reciprocität jedesmal in Symmetrie über. Klappe ich also eine Doppelspirale erst um die eine, dann um die andere Potenzlinie, so erhalte ich eine der ersten congruente Doppelspirale.

Im Allgemeinen gilt also der Satz:

7. Zu jeder Doppelspirale giebt es in der Schaar der gleichwinkligen eine congruente.

Den Kreis, welchen die Verbindungslinie der beiden Pole zum Durchmesser hat, wollen wir den Centralkreis nennen. Setzt man seinen Radius der Einheit gleich und transformirt man von seinem Centrum aus mit Hilfe der Function $Z = \frac{1}{z}$, so geht das System gleichwinkliger Doppelspiralen wieder in ein solches über. Daraus schliessen wir:

8. Unter allen gleichwinkligen Doppelspiralen desselben Systems geht eine und nur eine durch den unendlichen Punkt, und diese hat eine Asymptote, welche durch das Centrum des Centralkreises geht und die Verbindungslinie beider Pole unter entgegengesetztem Winkel schneidet, als die durch das Centrum gehende Doppelspirale.

Dies ist die einzige der gleichwinkligen Doppelspiralen, welche scheinbar aus zwei getrennten Stücken besteht; sie sowohl, als auch die durch das Centrum gehende erzeugen durch Umklappen um die beiden Potenzlinien sich selbst wieder, sind also alleinstehend.

9. Die Curvenschaar, welche ein System gleichwinkliger Doppelspiralen unter constantem Winkel schneidet, ist wieder ein System gleichwinkliger Doppelspiralen.

Im speciellen Falle erhalten wir die orthogonale Schaar, und da man, wie aus der Transformation hervorgeht, durch beide zunächst sämmtliche „Blätter" und unter Anwendung gewisser Kunstgriffe die einfache Ebene in ein System von „Rechtecken" eintheilen kann, welche der Aehnlichkeit zustreben, so haben wir wiederum mit isothermischen Curvensystemen zu thun. Die einzelnen „Rechtecke" stehen übrigens in Kreisverwandtschaft. (In der Figur ist die Eintheilung in kleine „Quadrate" gegeben.)

10. Schneiden sich zwei Doppelspiralen verschiedenen Winkels, die jedoch dieselben Pole haben, einmal, so schneiden sie sich unendlich oft, und zwar stets unter demselben Winkel.

11. Die Transformation durch reciproke Radii vectores von irgend einem Punkte der Ebene aus verwandelt das System gleichwinkliger Doppelspiralen in ein System desselben Winkels.

Da bei der Transformation durch reciproke Radii vectores Kreise wiederum in Kreise übergehen, so verwandeln sich die entsprechenden Sätze des § 2 in folgende:

12. Construirt man Kreise, welche durch den einen Pol der Doppelspirale gehen und sie selbst in aufeinanderfolgenden Punkten unter demselben Winkel schneiden, so ist die Enveloppe dieser Kreise eine gleichwinklige Doppelspirale.

Im speciellen Falle mögen diese Kreise rechtwinklig schneiden. Construirt man dann noch Kreise, welche durch den andern Pol gehen und die zweite Doppelspirale rechtwinklig schneiden, so ist die Enveloppe derselben die erste Doppelspirale.

Diese gegenseitige Beziehung geht noch weiter: Schneidet ein Kreis der ersteren Gruppe die erste Doppelspirale in A, und berührt er die zweite in A_1, so berührt der Kreis der zweiten Schaar, welcher die zweite Doppelspirale in A_1 schneidet, die erste in A. Die beiden Punkte A und A_1 liegen dabei so, dass der Kreis durch A und die beiden Pole den durch A_1 und die beiden Pole gehenden rechtwinklig schneidet.

Transformirt man die zu Satz 18 des § 2 gehörende Figur von dem Ausgangspunkte der Tangenten als Mittelpunkt durch reciproke Radii vectores, so ergiebt sich folgender Satz:

13. Zieht man von dem einen Pole aus sämmtliche Tangenten an die Schaar der gleichwinkligen Doppelspiralen, so liegen die Berührungspunkte derselben auf einer Geraden durch den andern Pol, welche der Asymptote der durch den unendlichen Punkt gehenden Doppelspirale parallel ist.

Diese Tangenten sind die Normalen der orthogonalen Schaar, für diese lässt sich also ein analoger Satz aussprechen:

14. Zieht man durch den einen Pol eines Systems gleichwinkliger Doppelspiralen eine Senkrechte zur Asymptote, und bildet man die Normalen in den Durchschnittspunkten derselben mit den Doppelspiralen, so gehen diese sämmtlich durch den andern Pol.

Bei der Transformation durch reciproke Radii vectores entspricht einem Kreise durch drei bestimmte Punkte ein Kreis durch die drei entsprechenden Punkte, dem durch drei aufeinanderfolgende Punkte einer

Curve gehenden Kreise also entspricht der durch drei entsprechende aufeinanderfolgende Punkte der entsprechenden Curve gehende Kreis, d. h. für die Grenze: Der Krümmungskreis für einen bestimmten Punkt einer Curve geht über in den Krümmungskreis für den entsprechenden Punkt der entsprechenden Curve.

Aus den entsprechenden Sätzen des § 2 ergeben sich also folgende:

15. Die Krümmungskreise der Doppelspirale umschliessen stets den einen Pol, nie aber den andern. Ein jeder schneidet die Doppelspirale nur einmal, so dass der eine Theil derselben ausserhalb, der andere innerhalb des Krümmungskreises bleibt. Die Krümmungskreise der Doppelspirale umschliessen sich; durch jeden Punkt der Ebene geht ein und nur ein Krümmungskreis.

Da durch Transformation mittels reciproker Radii vectores von einem Punkte der Peripherie aus ein Kreis sich in eine Gerade verwandelt, so folgt der Satz:

16. Jede Doppelspirale hat einen und nur einen Wendepunkt. Für die durch das Centrum gehende ist das Centrum, für die durch den unendlichen Punkt gehende dieser der Wendepunkt.

17. Durch jeden Punkt der Ebene geht für jede Doppelspirale des gleichwinkligen Systems ein und nur ein Krümmungskreis. Die Berührungspunkte sämmtlicher dieser Krümmungskreise liegen auf einem Kreise, dem Krümmungskreise der durch jenen Punkt gehenden Doppelspirale für denselben.

Der Satz folgt unmittelbar aus Satz 17 des § 2. Er geht durch eine specielle Transformation in folgenden über:

18. Die Wendepunkte des Systems gleichwinkliger Doppelspiralen liegen sämmtlich auf einer Geraden, der Asymptote der durch den unendlichen Punkt gehenden Doppelspirale.

Die Construction des Krümmungskreises für einen Punkt einer Doppelspirale bietet nach dem in § 2 Gesagten keine Schwierigkeiten; ebenso leicht ist nach den dortigen Angaben für eine Doppelspirale der durch einen beliebigen Punkt der Ebene gehende Krümmungskreis zu construiren.

Transformirt man eine logarithmische Spirale durch reciproke Radii vectores von allen Punkten eines Krümmungskreises aus, so lernt man, da derselbe den ganzen Ring durchschneidet, die ganze Mannichfaltigkeit der Formen des Systems gleichwinkliger Doppelspiralen kennen, wobei sich noch mancherlei interessante Sätze ergeben; z. B.:

19*a*. Denkt man sich in dem Ringe zwischen zwei gleichwinkligen logarithmischen Spiralen Kreise construirt, welche sich selbst und die beiden Spiralen berühren, ohne letztere zu schneiden, so liegen die Punkte, in denen sich die

Kreise berühren, auf einer gleichwinkligen Spirale, welche gegen die beiden ersten um gleichen Winkel gedreht ist.

Durch zwei logarithmische Spiralen sind zwei solche Ringe gegeben, man kann also zwei Gruppen von Berührungskreisen construiren. Die durch die Berührungspunkte beider Gruppen gegebenen Spiralen sind um den Winkel π gegen einander gedreht.

Durch Transformation geht Satz 19a in folgenden über:

19b. Denkt man sich in dem Ringe zwischen zwei gleichwinkligen Doppelspiralen Kreise construirt, welche sich selbst und die Doppelspiralen berühren, ohne sie zu schneiden, so liegen die Berührungspunkte der Kreise auf einer gleichwinkligen Doppelspirale, welche den Ring in zwei „correspondirende“ zerlegt.

Unter den speciellen Fällen, die sich aus letzterem Satze ergeben, heben wir folgenden hervor: Die beiden Doppelspiralen mögen zu einer zusammenfallen; für die durch das Centrum gehende Doppelspirale liegen dann die Berührungspunkte der Kreisschaar auf der durch den unendlichen Punkt gehenden Doppelspirale; für die letztere liegen sie auf der ersteren.

Durch Rotation sämmtlicher Kreise, welche in einem Ringe zwischen zwei gleichwinkligen Doppelspiralen liegen und die letzteren, ohne sie zu schneiden, berühren, ergiebt sich als Enveloppe der entstehenden Kugeln eine transscendente Fläche, welche eine gewisse Analogie mit der von Dupin behandelten Cyclide hat und eine Reihe interessanter Eigenschaften besitzt.

Alle Eigenschaften der behandelten Curven, welche bei der Transformation $Z=\frac{au+b}{cu+d}$ erhalten bleiben, lassen sich ohne Weiteres auf die loxodromischen Linien und die aus ihnen durch Transformation mittels reciproker Radii vectores entstehenden Kugelcurven übertragen, d. h. auf diejenigen Curvensysteme, welche ein System von Kreisen auf der Kugel, die durch zwei beliebige Punkte derselben gehen, unter constantem Winkel schneiden.

§ 6. Cartographische Anmerkungen.

Im Obigen kamen zwei conforme Fundamentalabbildungen der Kugeloberfläche zur Sprache, die steroographische Projection des Ptolemäus, welche die Kugel auf die ganze Ebene überträgt, und die Mercatorprojection, welche sie auf einem unendlich langen Parallelstreifen abbildet. Der Zusammenhang beider Abbildungen ist, wie gezeigt wurde, durch die einfach periodische Exponentialfunction oder ihre Umkehrung, den Logarithmus, gegeben.

Eine dritte Fundamentalabbildung würde die der Kugeloberfläche auf das Rechteck sein. Der Zusammenhang dieser Darstellung mit der erst-

genannten wird in analoger Weise in dem Wesen einer doppeltperiodischen Function oder ihrer Umkehrung begründet sein.

Schering hat in einer Preisschrift: „Ueber die conforme Abbildung des Ellipsoids auf die Ebene" (Göttingen 1858) nach Andeutungen Jacobi's die allgemeinere und mit ihr unsere speciellere Aufgabe gelöst. *

Er widmet derjenigen Abbidung, bei welcher jeder Octant des Ellipsoids auf ein bestimmtes Rechteck übertragen wird, so dass den Endpunkten der drei Axen und dem zugehörigen Nabelpunkte die Ecken des Rechtecks entsprechen, eine besondere Betrachtung und zeigt, dass den Krümmungslinien des Ellipsoids die Parallelen zu den Seiten des Rechtecks entsprechen. Auf das Wesen der Curvenschaaren, welche bei der Abbildung des Ellipsoids auf die ganze Ebene den Krümmungslinien entsprechen, geht er nicht ein. Dasselbe lässt sich durch folgende leichte Betrachtung entwickeln:

Betrachtet man die Kugel als speciellen Fall des Ellipsoids, so kann man zwei beliebige Punkte ihrer Oberfläche und ihre Diametralpunkte zu Nabelpunkten wählen; dann gehen die Krümmungslinien des Ellipsoids in sphärische Kegelschnitte über. Wie das Ellipsoid, so lässt sich auch die Kugel so auf die Ebene übertragen, dass jedem Octanten ihrer Oberfläche ein bestimmtes Rechteck entspricht. Da hier die Wahl der Nabelpunkte freigestellt ist, so kann das Rechteck jede beliebige Gestalt annehmen. Eine bestimmte Schaar sphärischer Kegelschnitte wird den Parallelen zu den Seiten des Rechtecks entsprechen.

So hat man zugleich, wenn man das Rechteck als Durchgang betrachtet, eine in den kleinsten Theilen ähnliche Uebertragung der Oberfläche des Ellipsoids auf die Kugel.

Mit derselben sind alle Uebertragungen auf die Kugel gegeben; der Zusammenhang sämmtlicher ergiebt sich aus der Theorie der reciproken Radii vectores.

Da aber die stereographische Projection die Kugel conform auf die ganze Ebene überträgt, so erhalten wir folgenden Satz:

Bei der Abbildung des ungleichaxigen Ellipsoids auf die ganze Ebene entspricht dem System der Krümmungslinien eine Curvenschaar, welche durch stereographische Projection eines bestimmten Systems confocaler sphärischer Kegelschnitte entsteht. **

---

* Vergl. auch: „Ueber die Abbildung eines ungleichaxigen Ellipsoids etc." Aus den hinterlassenen Papieren Jacobi's mitgetheilt durch L. Cohn. — Crelle's Journal, Bd. 59.

** Herr Prof. Dr. Schwarz am Polytechnikum zu Zürich, dem ich Anfang dieses Jahres Mittheilung von diesem Satze machte, antwortete mir, dass ihm derselbe bereits bekannt sei, und verwies unter Anderem auf zwei seiner Abhandlungen im

Welche specielle Projection es sein soll, hängt davon ab, welcher Punkt des Ellipsoids dem unendlichen Punkte entsprechen soll.

Die Curvenschaaren, welche man durch stereographische Projection sphärischer Kegelschnitte erhält, führen uns noch auf folgende interessante Beziehung: In dem Systeme confocaler Ellipsoide ist die doppelt zu denkende Focalellipse die eine Grenze. Für diese sind als Nabelpunkte die Brennpunkte aufzufassen. Es lässt sich also die Doppelellipse auf die Kugeloberfläche, die einfache Ellipse zunächst auf die Halbkugel übertragen, und da letztere durch jede stereographische Projection auf das Innere oder Aeussere eines Kreises übertragen wird, so erhalten wir den Satz:

Bei der Abbildung der Ellipse auf das Innere oder das Aeussere eines Kreises entsprechen den confocalen Ellipsen und Hyperbeln die stereographischen Projectionen der sphärischen Kegelschnitte.

Dieselbe Abbildungsaufgabe hat Herr Prof. Dr. Schwarz in Bd. 70 des Crelle'schen Journals und in Bd. 3 Ser. II der „*Annali di matematica*" von einem andern Gesichtspunkte aus gelöst. Die specielle Abbildung, bei welcher dem Mittelpunkte der Ellipse das Centrum des Kreises entspricht, führte ihn auf die eine Gruppe der von Siebeck im 57. und 59. Bande des Crelle'schen Journals behandelten Curven vierten Grades, deren vier Brennpunkte auf einer geraden Linie liegen. Daraus folgt:

Projicirt man zwei Schaaren sphärischer Kegelschnitte stereographisch von dem Halbirungspunkte der sphärischen Entfernung der zusammengehörigen Brennpunkte aus, so erhält man die genannten Siebeck'schen Curvenschaaren.

Wir wollen dies, um das Obige zu verificiren, wirklich nachweisen: Die Projection geschehe nach der zu dem Projectionspunkte gehörigen Aequatorialebene. Der Durchschnitt der letzteren mit der Ebene der Brennpunkte sei die X-Axe, das Centrum der Kugel der Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinaten. Ist r der Radius der Kugel, $2g$ die sphärische Entfernung der Nabelpunkte, und sind u und u_1 die sphärischen Entfernungen eines Punktes der Kugel von den beiden zusammengehörigen Brennpunkten, so finden folgende Relationen statt:

$$\cos u = \frac{\cos g \,.\, (r^2 - x^2 - y^2) + 2xr \sin g}{r^2 + x^2 + y^2},$$

---

70. Bande des Crelle'schen Journals. In einer derselben wird allerdings ausgesprochen, „dass bei der Abbildung des Ellipsoids auf die Kugel den beiden Schaaren von Krümmungslinien zwei Schaaren von Curven vierter Ordnung auf der Kugel entsprechen". Die briefliche Mittheilung verbreitete sich specieller über diesen Zusammenhang. Die Anregung zu den vorliegenden Untersuchungen verdanke ich, wie ich gern bemerke, einer Vorlesung des Herrn Prof. Dr. Schwarz über complexe Grössen, in welcher auch der logarithmischen Abbildung in ähnlicher Weise, wie in dem einleitenden Paragraphen dieser Abhandlung, gedacht wurde.

$$\cos u_1 = \frac{\cos g\,.\,(r^2 - x^2 - y^2) - 2xr\,\sin g}{r^2 + x^2 + y^2};$$

setzt man also

$$u \pm u_1 = c,$$

folglich

$$\cos u_1 = \cos c \cos u \pm \sin c \sqrt{1 - \cos^2 u},$$

so folgt:

$$\cos c\,.\,\frac{\cos g\,(r^2 - x^2 - y^2) + 2xr\,\sin g}{r^2 + x^2 + y^2}$$

$$\pm \sin c \sqrt{1 - \left(\frac{\cos g\,(r^2 - x^2 - y^2) + 2xr\,\sin g}{r^2 + x^2 + y^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\cos g\,(r^2 - x^2 - y^2) - 2xr\,\sin g}{r^2 + x^2 + y^2},$$

woraus sich für die gesuchte Curvenschaar folgende Gleichung ergiebt:

$$2\cos^2 g\,(x^2 + y^2 - r^2)^2\,(1 - \cos c) + 8\sin^2 g\, x^2 . r^2\,(1 + \cos c)$$
$$- \sin^2 c\,(x^2 + y^2 + r^2)^2 = 0,$$

oder wenn man $\frac{c}{2}$ einführt:

$$(x^2 + y^2 - r^2)^2 - (x^2 + y^2 + r^2)^2 \frac{\cos^2 \frac{c}{2}}{\cos^2 g} + 4x^2r^2 . \frac{\tan^2 g}{\tan^2 \frac{c}{2}} = 0.$$

Setzt man hier

$$\cos\frac{c}{2} = a, \quad \cos g = b,$$

so geht die Gleichung über in

$$1)\quad (x^2 + y^2)^2 + r^4 - r^2\,(x^2 + y^2)\,2\,\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - 4\,x^2r^2 . \frac{a^2}{b^2 - a^2} . \frac{1 - b^2}{1 - a^2} = 0.$$

Die Gleichung der von Siebeck behandelten Curven ist

$$\left[(x^2 + y^2) - \varrho^2 . \frac{1 - m}{m}\right] . \left[(x^2 + y^2) - \varrho^2 . \frac{1 - n}{n}\right] + x^2 \varrho^2 . \frac{(m - n)^2}{m.n} = 0$$

oder

$$2)\quad (x^2 + y^2)^2 + \varrho^4 . \frac{1 - m\,.\,1 - n}{m\,.\,n} - \varrho^2 . (x^2 + y^2)\,\frac{m + n - 2mn}{m\,.\,n} + \frac{(m - n)^2}{m\,.\,n}\,x^2\varrho^2 = 0.$$

Sollen die Gleichungen 1) und 2) identisch sein, so müssen zunächst die absoluten Glieder übereinstimmen, also:

$$\alpha)\qquad r^4 = \varrho^4 . \frac{1 - m\,.\,1 - n}{m\,.\,n}.$$

Bestimmt man dann a und b aus den Gleichungen

$$\beta)\qquad 2 . \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} . \sqrt{\frac{1 - m\,.\,1 - n}{m\,.\,n}} = \frac{m + n - 2mn}{m\,.\,n},$$

$$\gamma) \qquad \frac{4a^2}{b^2-a^2} \cdot \frac{1-b^2}{1-a^2} \cdot \sqrt{\frac{1-m \cdot 1-n}{m \cdot n}} = \frac{(m-n)^2}{m \cdot n},$$

so ist die Identität wirklich herbeigeführt.

Unsere Aufgabe ist hiermit gelöst.

Nach Siebeck ist die Function *sinam* $(u+vi)$ der Ausdruck für den Zusammenhang der in Rede stehenden Curvenschaaren vierten Grades mit dem System orthogonaler Parallelen. Demnach ist wirklich, wie oben behauptet, der Zusammenhang zwischen der stereographischen Projection der Kugeloberfläche und der Abbildung derselben auf das Rechteck durch eine doppeltperiodische Function gegeben.

Alle anderen Abbildungen der Kugeloberfläche auf die Ebene lassen sich auf die genannten drei Fundamentalabbildungen reduciren.

Ein Theil der Eigenschaften der Siebeck'schen Curvenschaaren, welche auch von Dr. Jochmann in dieser Zeitschrift (XIV, 6) behandelt wurden, ergiebt sich aus dem Zusammenhange mit den sphärischen Kegelschnitten mit einem Schlage. Von besonderem Interesse werden diejenigen Eigenschaften derselben sein, welche bei der Transformation $Z=\frac{au+b}{cu+d}$ erhalten bleiben.



XIII.

Ueber die Gesetze der Bewegung und Abplattung im Gleichgewichte befindlicher homogener Ellipsoide und die Veränderung derselben durch Expansion und Condensation.

Von

Dr. Ludwig Matthiessen
in Husum.

(Hierzu Tafel II, Fig. 2.)

D'Alembert hat gezeigt, dass für die Oberfläche einer Flüssigkeitsmasse, welche mit gleichförmiger Geschwindigkeit ω um eine feste Axe rotirt und deren Theilchen sich nach dem Verhältnisse ihrer Masse und dem umgekehrten Verhältnisse des Quadrates ihrer Entfernungen anziehen, allgemein die Differentialgleichung

$$1) \qquad X\partial x + Y\partial y + Z\partial z + \omega^2 (y\partial y + z\partial z) = 0$$

giltig sei, worin x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der Oberfläche sind, wenn die Masse sich um die x-Axe dreht, und worin X, Y, Z die Componenten der Massenanziehung bezeichnen.

Das allgemeine Integral dieser Gleichung würde zugleich die Oberflächengleichung aller Gleichgewichtsfiguren sein. Da aber die Componenten der Anziehung nur aus der Oberflächengleichung hergeleitet werden können, so erscheint die allgemeine Lösung des Problems als unmöglich. Der Schwierigkeit des Problems kann man offenbar nur dadurch begegnen, dass man synthetisch verfährt und empirisch eine Reihe von Einzelfiguren aufsucht, welche den Bedingungen des Gleichgewichts genügen. Die theils continuirlichen, theils discontinuirlichen Gleichgewichtsfiguren, welche bis jetzt in eingehender Weise dem Calcul unterworfen sind, mögen hier Erwähnung finden. Es sind

a) die Rotationsellipsoide (von Maclaurin * und Laplace **);
b) das dreiaxige Ellipsoid (von Jacobi***);
c) die Ringfiguren ohne Centralkörper†;
d) die cylindrischen Gleichgewichtsfiguren ††;
e) die satellitischen Ringe (von Laplace †††);
f) die concentrischen Ringsysteme *†;
g) die coaxialen Hohlcylinder **†;
h) die Mondfiguren (von Roche ***† und Vaughan †*).

Bei fast allen früheren Untersuchungen ist vorausgesetzt, dass die Dichtigkeit ϱ unveränderlich sei. In Anbetracht kosmogonischer Fragen dürfte es indess von besonderem Interesse sein, die Verhältnisse der Abplattung und Winkelgeschwindigkeit bei constanter Summe der Momente der Bewegungsquantität als Functionen einer variabeln Dichtigkeit zu betrachten. Die vorliegende Abhandlung hat nun hauptsächlich den Zweck, zu untersuchen, wie jene Verhältnisse durch Expansion oder Condensation der Masse sich verändern müssen. Bezüglich der freien Ringe ist diese Untersuchung bereits früher in der sub † angeführten Abhandlung der Mailändischen Annalen von mir geführt worden. Ich beschränke mich hier auf die ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren.

In dem von mir 1859 in den Schriften der Kieler Universität publicirten Aufsatze ist gezeigt worden, dass die Relation

2) $$Rr = Xx + Yy + Zz + \omega^2 (y^2 + z^2) = Aa - 2p$$

die Gleichung sämmtlicher Gleichgewichtsfiguren ist, deren Niveauflächen ähnlich und homothetisch sind. Dieser Gleichung genügen auch die Ellipsoide.

---

* Maclaurin, *De causa physica fluxus et refluxus maris.* (*Pièces de prix de l'acad. T. IV.* 1740.)

** Laplace, *Méc. cél., liv. I cap.* 4 *et liv. II cap.* 1—4.

*** Jacobi, Ueber die Figur des Gleichgewichts. Pogg. Ann. XXXIII (1834), S. 229—233.

† L. Matthiessen, Neue Untersuchungen über frei rotirende Flüssigkeiten. Schriften der Kieler Universität, 1859, § 15, und: *De aequilibrii figuris et revolutione homogeneorum annulorum sidereorum sine corpore centrali. Ann. di matem. pura ed appl. Tom III° da pag.* 84 *a pag.* 111 (1869).

†† ——, Neue Untersuchen etc., § 9.

††† Laplace, *Sur la figure des anneaux de Saturne. Méc. cél., liv. III* § 41.

*† L. Matthiessen, Ueber Systeme kosmischer Ringe von gleicher Umlaufszeit als discontinuirliche Gleichgewichtsformen einer frei rotirenden Flüssigkeitsmasse. Zeitschr. f. Math. u. Phys X, S. 59 (1865).

**† ——, Neue Untersuchungen etc., § 11.

***† Roche, *Mém. sur les figures ellipsoidales, qui conviennent à l'équilibre d'une masse fluide sans mouvement de rotation, attirée par un point fixe très eloigné. L'institut. Paris* (1849), *p.* 187 *et* 193; (1850), *pag.* 117 *et* 321.

†* Vaughan, *On the form of satellites revolving at small distances from their primaries. Phil. Mag. XX, pag.* 409; *XXI, pag.* 263.

Bedeuten a, b, c die drei Halbaxen, A, B, C die Schwerkräfte an ihren Polen, so ist offenbar in der Gleichung

$$Rr = Aa = (B + \omega^2 b)\, b = (C + \omega^2 c)\, c \tag{3}$$

die Bedingung enthalten, wodurch das Axenverhältniss bestimmt wird. Das Product Rr bedeutet dabei die Gesammtanziehung in der Richtung des Schwerpunktes, multiplicirt in den Radius vector.

Wir wollen zunächst das Wichtigste über die Axenverhältnisse der im Gleichgewichte befindlichen Ellipsoide vorausschicken. Es wird im Folgenden überall vorausgesetzt, dass die Masse homogen sei.

I. Das wenig abgeplattete Rotationsellipsoid. (Ell. α.)

Bezeichnet f die Gravitationsconstante, so sind die Componenten der Massenanziehung an den Polen und einem Punkte des Aequators eines abgeplatteten Ellipsoides

$$A = -4\pi f \varrho \frac{b^2}{a^2}\, a \int_0^1 \frac{u^2\,\partial u}{(1+\lambda^2 u^2)},$$

$$B = -4\pi f \varrho \frac{b^2}{a^2}\, b \int_0^1 \frac{u^2\,\partial u}{(1+\lambda^2 u^2)^2}.$$

Mit Berücksichtigung der Gleichung 3) ist weiter, wenn man

$$\omega^2 : 2\pi f \varrho = V$$

setzt:

$$V = 2\int_0^1 \frac{\lambda^2 u^2 (1-u^2)\,\partial u}{(1+\lambda^2 u^2)^2} = \frac{3+\lambda^2}{\lambda^3}\, arctan\, \lambda - \frac{3\lambda}{\lambda^3}, \tag{4}$$

also

$$\frac{3\lambda + V\lambda^3}{3+\lambda^2} - arctan\, \lambda = 0$$

die Gleichung, woraus sich für gegebene Werthe von V das Axenverhältniss $b : a = \sqrt{1+\lambda^2}$ berechnen lässt. Für den in Ruhe befindlichen Gleichgewichtskörper ist $V = 0$. Um die Grenzen von V zu bestimmen, differentiiren wir die Gleichung 4) nach λ und setzen $\frac{\partial V}{\partial \lambda}$ gleich 0 oder ∞. Man erhält

$$-\frac{\partial V}{2\lambda\,\partial\lambda} = \frac{9+\lambda^2}{\lambda^4}\left\{\frac{9+7\lambda^2}{(1+\lambda^2)(9+\lambda^2)} - arctan\, \lambda\right\}. \tag{5}$$

Mittels der bekannten Methoden ergiebt diese Relation für ein Minimum von V die Werthe $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$, für ein Maximum den Werth $\lambda_1 = 2{,}5293$. Die beiden Minima von V haben den Werth Null. Das Maximum von V erhält man durch Combination von 4) und 5), woraus sich

$$V = \frac{4\lambda^2}{(1+\lambda^2)(9+\lambda^2)}$$

und $V_1 = 0{,}2246657$ ergiebt. Für wachsende Werthe von λ nimmt also V wieder ab.

Zwischen den Grenzen $V_0 = 0$ und $V_1 = 0{,}22466$ giebt es stets zwei verschiedene Werthe von λ, einen grösseren und einen kleineren als $\lambda_1 = 2{,}5293$. Dem Werthe λ_1 entspricht das Axenverhältniss $b : a = \sqrt{1+\lambda^2} = 2{,}7198$. Für $V = 0$ sind die Kugel und der unendliche Discus die Grenzfiguren.

Da für sehr kleine Werthe von V auch λ sehr klein wird, so kann man in diesem Falle annähernd die Formel $V = \frac{4}{15}\lambda^2$ zur Berechnung concreter Fälle benutzen. Dann ist

6) $$\sqrt{1+\lambda^2} = 1 + \tfrac{15}{8} V.$$

Zu dem Werthe $V_e = 0{,}00229971$, welcher dem Erdsphäroid entspricht, findet man aus der etwas genaueren Formel

7) $$V = \tfrac{4}{5}\lambda^2 \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{7}\lambda^2\right)$$

das Axenverhältniss $\sqrt{1+\lambda^2} = b : a = 1{,}00433441$.

II. Das stark abgeplattete Rotationsellipsoid. (Ell. β.)

Laplace hat gezeigt, dass zwischen den Grenzen $V = 0$ und $V_1 = 0{,}22466$ die Gleichung 4) stets zwei reelle Werthe von λ gäbe, und zwar den einen kleiner, den andern grösser, als λ_1; dass über V_1 hinaus die Werthe von λ nicht mehr reell bleiben. Es geht aus diesem Umstande hervor, dass bei unveränderlicher Dichtigkeit die Rotationsgeschwindigkeit ω über den Grenzwerth $\omega_1 = \sqrt{2\pi f\varrho \,.\, 0{,}22466}$ hinaus überhaupt nicht vermehrt werden kann. Jedoch hat ein neuer Impuls der Drehung keineswegs eine Zerstreuung der Masse zur Folge; er bewirkt nur eine Vergrösserung der Abplattung, eine Abnahme der Rotationsgeschwindigkeit; es geht das Maclaurin'sche Ellipsoid über in das Laplace'sche in continuirlicher Veränderung. Die beträchtliche Zunahme von λ gestattet, aus 4) eine algebraische Näherungsformel abzuleiten, welche zur Berechnung der Coordinaten V und λ benutzt werden kann. Verwandelt man die Transcendente in eine Reihe, so ist näherungsweise

8) $$V = \frac{\operatorname{arctan}\lambda}{\lambda} = \frac{\pi}{2\lambda} - \frac{4}{\lambda^2},$$

so dass V sich der Grenze $\frac{\pi}{2\lambda}$ nähert und das Axenverhältniss $b : a$ übergeht in

9) $$\sqrt{1+\lambda^2} = \frac{\pi}{2V}.$$

Hiernach würde dem Werthe $V_e = 0{,}0023$ entsprechen

$$\sqrt{1+\lambda^2} = b : a = 680{,}49.$$

Die Grenzfigur für $V=0$ ist der unbegrenzte Discus mit dem Axenverhältniss

$$a:b:c=1:\infty:\infty.$$

III. Das ungleichaxige Ellipsoid. (Ell. γ.)

Bei einer von 0 an wachsenden Rotationsgeschwindigkeit nimmt zunächst die als flüssig gedachte Kugel die Gestalt des Ell. (α) an. Dasselbe kann aber auch noch an einem gewissen, zwischen V_0 und V_1 liegenden Punkte in ein ungleichaxiges Ellipsoid mit wiederum stetig abnehmender Rotationsgeschwindigkeit übergehen, nämlich bei $V=0{,}18692$ (Ivory) (genauer 0,18711) und dem Axenverhältniss $\sqrt{1+\lambda^2}=1{,}7161$. Diese schöne Entdeckung verdanken wir Jacobi. Die Componenten der Anziehung des ungleichaxigen Ellipsoids sind

$$X=-4\pi f\varrho\frac{bc}{a^2}x\int_0^1\frac{u^2\,\partial u}{(1+\lambda^2u^2)^{1/2}\,(1+\lambda_1{}^2u^2)^{1/2}},$$

$$Y=-4\pi f\varrho\frac{bc}{a^2}y\int_0^1\frac{u^2\,\partial u}{(1+\lambda^2u^2)^{3/2}\,(1+\lambda_1{}^2u^2)^{1/2}},$$

$$Z=-4\pi f\varrho\frac{bc}{a^2}z\int_0^1\frac{u^2\,\partial u}{(1+\lambda^2u^2)^{1/2}\,(1+\lambda_1{}^2u^2)^{3/2}}.$$

Substituiren wir die Werthe derselben, die sie an den drei Polen der Hauptaxen erhalten, in die Gleichung 3), so muss zwischen V, λ und λ_1 die Relation stattfinden:

$$\text{9 a)}\quad\left\{\begin{aligned}V&=2\sqrt{1+\lambda^2}\,.\,\sqrt{1+\lambda_1{}^2}\int_0^1\frac{u^2(1-u^2)\,\partial u}{(1+\lambda^2u^2)^{3/2}\,(1+\lambda_1{}^2u^2)^{3/2}}\\&=2\lambda_1{}^2\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\sqrt{1+\lambda_1{}^2}}\int_0^1\frac{(1+\lambda^2u^2)\,u^2\,(1-u^2)\,\partial u}{(1+\lambda^2u^2)^{3/2}\,(1+\lambda_1{}^2u^2)^{3/2}}\\&=2\lambda^2\frac{\sqrt{1+\lambda_1{}^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}}\int_0^1\frac{(1+\lambda_1{}^2u^2)\,u^2\,(1-u^2)\,\partial u}{(1+\lambda^2u^2)^{3/2}\,(1+\lambda_1{}^2u^2)^{3/2}}.\end{aligned}\right.$$

Setzen wir weiter

$$2\sqrt{1+\lambda^2}\,.\,\sqrt{1+\lambda_1{}^2}\int_0^1\frac{u^2\,\partial u}{(1+\lambda^2u^2)^{1/2}\,(1+\lambda_1{}^2u^2)^{1/2}}=L,$$

so ist gemäss der vorhergehenden Gleichungen 9a)

$$V = \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)\lambda = \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}\right)\lambda_1.$$

Setzt man ferner $\lambda\lambda_1 = y$, $(\lambda - \lambda_1)^2 = \tau^2$ und differentiirt partiell nach y und τ, so ist

$$V = \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)\lambda = \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)y + \left(\frac{\partial L}{\partial \tau}\right)\frac{(\lambda - \lambda_1)\lambda}{\tau},$$

$$V = \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}\right)\lambda_1 = \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)y + \left(\frac{\partial L}{\partial \tau}\right)\frac{(\lambda_1 - \lambda)\lambda}{\tau}.$$

Für $\lambda - \lambda_1 = 0$ wachsen also beide Werthe von V zugleich, für alle übrigen Fälle muss

$$V = \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)y \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial L}{\partial \tau}\right)\cdot\frac{1}{\tau} = 0$$

sein. Der zweiten Bedingung entspricht die Gleichung

$$\text{10)} \qquad \int_0^1 \frac{(1 - \lambda^2\lambda_1^2 u^2)\, u^2\, (1 - u^2)\, \partial u}{\{(1 + \lambda\lambda_1 u^2)^2 + (\lambda - \lambda_1)^2 u^2\}^{5/2}} = 0,$$

welche auch aus dem System 9a) unmittelbar abgeleitet werden kann.

Die Gleichung 10) lässt sich in folgender Form schreiben:

$$\text{11)} \qquad \frac{1}{\lambda^2\lambda_1^2}\int_0^1 \frac{u^2\,(1 - u^2)\,\partial u}{(1 + \lambda^2 u^2)^{5/2}\,(1 + \lambda_1^2 u^2)^{5/2}} = \int_0^1 \frac{u^4\,(1 - u^2)\,\partial u}{(1 + \lambda^2 u^2)^{5/2}\,(1 + \lambda_1^2 u^2)^{5/2}},$$

woraus sogleich folgt, dass λ abnehmen muss, wenn λ_1 wächst, und dass $\lambda\lambda_1 > 1$ bleibt. Es entspricht also jedem Werthe von λ_1 nur ein einziger von λ und es kann nur einmal $\lambda = \lambda_1$ werden. Die Gleichung 10) liefert denjenigen Werth von λ, bei welchem der Uebergang des Ell. (γ) in das Rotationsellipsoid erfolgen kann. Für diesen Punkt hat man in 10) $\lambda_1 = \lambda$ zu setzen. Substituirt man noch $\lambda u = z$, so geht sie über in das exacte Integral

$$\text{12)} \qquad \int_0^\lambda \frac{[\lambda^2 z^2 - (1 + \lambda^4)\, z^4 + \lambda^2 z^6]\,\partial z}{(1 + z^2)^5} = 0$$

oder

$$\text{13)} \qquad \frac{3\lambda + 13\lambda^3}{3 + 14\lambda^2 + 3\lambda^4} - \operatorname{arctan}\lambda = 0.$$

Diese Gleichung liefert für λ in der That einen positiven reellen Wurzelwerth, nämlich $\lambda = 1{,}3946$ und $\sqrt{1 + \lambda^2} = 1{,}7161$. Das Ell. ($\gamma$) geht also in das Ell. (α) über. Mit $\lambda_1 = \lambda$ geht die Gleichung 9a) über in 4) und ergiebt durch Combination mit 13) den zugehörigen Werth von V, der für das Ell. (γ) hier zugleich seinen grössten Werth erreicht, nämlich

14)
$$V = \frac{4\lambda^2}{3 + 14\lambda^2 + 3\lambda^4} = 0{,}18711.$$

Es ist nun weiter zu untersuchen, zwischen welchen Grenzen V liegt und welches der grösste und kleinste Werth von $\lambda\lambda_1$ ist. Zu dem Ende substituiren wir in dem System der Componenten X, Y, Z

$$u = \cos\psi \text{ und } a^2 \tan\psi^2 = \vartheta,$$

also

$$a^2 \frac{1-u^2}{u^2} = \vartheta, \quad u^2 = \frac{a^2}{a^2+\vartheta}.$$

Ferner sei

$$\left(1+\frac{\vartheta}{a^2}\right)\left(1+\frac{\vartheta}{b^2}\right)\left(1+\frac{\vartheta}{c^2}\right) = R^2.$$

Dadurch werden die drei Componenten der Massenattraction auf folgende Form gebracht:

$$X = -2\pi f\varrho \frac{x}{a^2}\int_0^\infty \frac{\partial\vartheta}{\left(1+\frac{\vartheta}{a^2}\right)R},$$

$$Y = -2\pi f\varrho \frac{y}{b^2}\int_0^\infty \frac{\partial\vartheta}{\left(1+\frac{\vartheta}{b^2}\right)R},$$

$$Z = -2\pi f\varrho \frac{z}{c^2}\int_0^\infty \frac{\partial\vartheta}{\left(1+\frac{\vartheta}{c^2}\right)R}.$$

Die Bedingung des Gleichgewichts ist also

15)
$$-\int_0^\infty \frac{\partial\vartheta}{\left(1+\frac{\vartheta}{a^2}\right)R} = -\int_0^\infty \frac{\partial\vartheta}{\left(1+\frac{\vartheta}{b^2}\right)R} + Vb^2 = -\int_0^\infty \frac{\partial\vartheta}{\left(1+\frac{\vartheta}{c^2}\right)R} + Vc^2.$$

und

16)
$$V = \frac{c^2-a^2}{c^4 a^2}\int_0^\infty \frac{\vartheta\,\partial\vartheta}{\left(1+\frac{\vartheta}{a^2}\right)\left(1+\frac{\vartheta}{c^2}\right)R} = \frac{b^2-a^2}{b^4 a^2}\int_0^\infty \frac{\vartheta\,\partial\vartheta}{\left(1+\frac{\vartheta}{a^2}\right)\left(1+\frac{\vartheta}{b^2}\right)R}$$

$$= \frac{1}{b^2 c^2}\int_0^\infty \frac{\vartheta\,\partial\vartheta}{\left(1+\frac{\vartheta}{b^2}\right)\left(1+\frac{\vartheta}{c^2}\right)R}.$$

Da nach der Voraussetzung sowohl b als $c > a$ sind, ebenso ϑ stets positiv ist, so folgt hieraus, dass für V stets positive Werthe sich ergeben müssen. Von dem System 16) berücksichtigen wir nur die Relation

$$V = \frac{1}{b^2 c^2} \int_0^\infty \frac{\vartheta\, \partial \vartheta}{\left(1 + \frac{\vartheta}{b^2}\right)\left(1 + \frac{\vartheta}{c^2}\right) R}. \tag{17}$$

Ferner ergiebt sich aus 15)

$$V + \frac{1}{b^2} \left\{ \int_0^\infty \frac{\partial \vartheta}{\left(1 + \frac{\vartheta}{a^2}\right) R} - \int_0^\infty \frac{\partial \vartheta}{\left(1 + \frac{\vartheta}{b^2}\right) R} \right\} = 0,$$

$$V + \frac{1}{c^2} \left\{ \int_0^\infty \frac{\partial \vartheta}{\left(1 + \frac{\vartheta}{a^2}\right) R} - \int_0^\infty \frac{\partial \vartheta}{\left(1 + \frac{\vartheta}{c^2}\right) R} \right\} = 0.$$

Subtrahirt man beide Gleichungen von einander, so wird, nachdem $a^2 : b^2 = \beta$, $a^2 : c^2 = \gamma$ gesetzt ist:

$$(1 - \beta - \gamma) \int_0^\infty \frac{\vartheta\, \partial \vartheta}{R^3} - \beta\gamma \int_0^\infty \frac{\vartheta\, \partial \vartheta}{R^3} = 0. \tag{18}$$

Mithin ist $\beta + \gamma < 1$, indem diese Integrale continuirliche positive Functionen sind. Setzt man noch $\vartheta = a^2 p$, so nehmen die Relationen 17) und 18) folgende Gestalt an:

$$V = \beta\gamma \int_0^\infty \frac{p\, \partial p}{(1 + \beta p)(1 + \gamma p) R}, \tag{19}$$

$$F = (1 - \beta - \gamma) \int_0^\infty \frac{p\, \partial p}{R^3} - \beta\gamma \int_0^\infty \frac{p^2\, \partial p}{R^3} = 0. \tag{20}$$

Prof. Meyer in Königsberg hat untersucht, welche und wieviel Wurzelpaare (β, γ) die Gleichung 19) bei gegebenem V liefert, die zugleich der Gleichung 20) genügen.* Es ist

$$\frac{\partial V}{\partial \gamma} = \left(\frac{\partial V}{\partial \gamma}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial \beta}\right) \frac{\partial \beta}{\partial \gamma},$$

und wenn man für $\frac{\partial \beta}{\partial \gamma}$ seinen Werth

---

* Vergl. Crelle's Journal, Bd. XXIV (1842), Nr. 6.

$$\frac{\partial\beta}{\partial\gamma} = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial\gamma}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial\beta}\right)}$$

einsetzt, so geht das totale Differential $\frac{\partial V}{\partial\gamma}$ über in

$$21)\qquad \frac{\partial V}{\partial\gamma} = \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial\gamma}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial\beta}\right) - \left(\frac{\partial V}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial\gamma}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial\beta}\right)} = \frac{M}{\left(\frac{\partial F}{\partial\beta}\right)}.$$

Dabei ist nun

$$\left(\frac{\partial F}{\partial\beta}\right) = -\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{p\,(1+p)\,(1+\gamma p)\,\{2+(3-\beta-\gamma)\,p-\beta\gamma p^2\}}{R^5}\,.\,\partial p,$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial\gamma}\right) = -\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{p\,(1+p)\,(1+\beta p)\,\{2+(3-\beta-\gamma)\,p-\beta\gamma p^2\}}{R^5}\,.\,\partial p.$$

Setzt man

$$22)\qquad \int_0^\infty \frac{p\,(1+p)\,\{2+(3-\beta-\gamma)\,p-\beta\gamma p^2\}}{R^5}\,\partial p = 2A_0,$$

$$23)\qquad \int_0^\infty \frac{p^2\,(1+p)\,\{2+(3-\beta-\gamma)\,p-\beta\gamma p^2\}}{R^5}\,\partial p = 2A_1,$$

so wird

$$24)\qquad \left(\frac{\partial F}{\partial\beta}\right) = -A_0-\gamma A_1 = -(1-\gamma)\,A_0-\gamma\,(A_0+A_1),$$

$$25)\qquad \left(\frac{\partial F}{\partial\gamma}\right) = -A_0-\beta A_1 = -(1-\beta)\,A_0-\beta\,(A_0+A_1).$$

Ferner ergiebt sich durch partielles Differentiiren von V

$$\left(\frac{\partial V}{\partial\beta}\right) = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{p\,(1+p)^2\,\{\gamma\,(2-\beta\gamma p^2)+\gamma\,(2\gamma-\beta)\,p\}}{R^5}\,\partial p,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial\gamma}\right) = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{p\,(1+p)^2\,\{\beta\,(2-\beta\gamma p^2)+\beta\,(2\beta-\gamma)\,p\}}{R^5}\,\partial p.$$

Setzt man hierin

$$26)\qquad \int_0^\infty \frac{p\,(1+p)^2\,(2-\beta\gamma p^2)\,\partial p}{R^5} = 2B_0,$$

$$27)\qquad \int_0^\infty \frac{p^2(1+p)^2\,\partial p}{R^5} = 2\,B_1,$$

so wird

$$28)\qquad \left(\frac{\partial V}{\partial \beta}\right) = \gamma\,B_0 + \gamma\,(2\gamma-\beta)\,B_1,$$

$$29)\qquad \left(\frac{\partial V}{\partial \gamma}\right) = \beta\,B_0 + \beta\,(2\beta-\gamma)\,B_1.$$

Um über das Vorzeichen von A_0 und (A_0+A_1) zu entscheiden, differentiire man nach p den Ausdruck

$$P = \frac{p^2}{(1+\beta p)\,(1+\gamma p)\,R},$$

welcher für $p=0$ und $p=\infty$ verschwindet. Man erhält

$$\frac{\partial P}{\partial p} = \frac{p\,(1+p)\,\{4+(3+\beta+\gamma)\,p - 2\,\beta\gamma\,p^2 - 3\,\beta\gamma\,p^3\}}{R^5}.$$

Dividirt man durch 2 und integrirt zwischen den Grenzen 0 und ∞, so ist offenbar

$$30)\qquad \int_0^\infty \frac{p\,(1+p)\,\{2+\tfrac{1}{2}\,(3+\beta+\gamma)\,p - \beta\,\gamma\,p^2 - \tfrac{3}{2}\,\beta\gamma\,p^3\}}{R^5}\,\partial p = 0.$$

Subtrahirt man diese Relation von 22), so resultirt

$$31)\qquad 2\,A_0 = \tfrac{3}{2}\int_0^\infty \frac{p^2\,(1+p)\,(1-\beta-\gamma+\beta\gamma\,p^2)}{R^5}\,\partial p.$$

In Verbindung mit 23) giebt vorstehende Gleichung die folgende:

$$32)\qquad 2\,A_0 + 3\,A_1 = \tfrac{3}{2}\,(3-\beta-\gamma)\int_0^\infty \frac{p^2\,(1+p)^2}{R^5}\,\partial p.$$

Durch Addition von 23) und 31) erhält man noch

$$33)\quad 2\,(A_0+A_1) = \int_0^\infty \frac{p^2\,(1+p)\,\{2+\tfrac{3}{2}\,(1-\beta-\gamma)+(3-\beta-\gamma)\,p+\tfrac{1}{2}\beta\gamma p^2\}}{R^5}\,\partial p.$$

Da nun gemäss 18) $\beta+\gamma<1$, welche Ungleichung auch aus $\lambda^2\lambda_1^2>1$ hervorgeht, so sind A_0 und (A_0+A_1) stets positiv und sowohl $\left(\frac{\partial F}{\partial \beta}\right)$ und $\left(\frac{\partial F}{\partial \gamma}\right)$, als auch $\frac{\partial \beta}{\partial \gamma}$ stets negativ. Während also γ abnimmt, wächst β, d. h. jedem Werthe von γ entspricht nur ein einziger von β und nur einmal kann $\beta=\gamma$ werden, oder was dasselbe ist, $\lambda=\lambda_1$. Da sich für diesen Fall aus 13) der Wurzelwerth $\lambda=1{,}3946$ ergiebt, so muss für jedes zusammen-

gehörige Wurzelpaar λ und λ_1 gleichzeitig der eine λ kleiner, der andere λ_1 grösser werden als 1,3946, indem wir annehmen, dass $c > b$ sei, was die Allgemeinheit der Betrachtungen nicht beeinträchtigt.

Subtrahirt man 30) von 26), so resultirt

$$34)\qquad 2B_0 = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{p^2(1+p)(1-\beta-\gamma+\beta\gamma p^2)}{R^5}\,\partial p,$$

so dass nun auch noch B_0 und gemäss 27) B_1 stets positiv sind. Um über das Vorzeichen von M in 21) entscheiden zu können, bilde man die Producte

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \gamma}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial \beta}\right) \text{ und } \left(\frac{\partial V}{\partial \beta}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial \gamma}\right)$$

nach den in 24), 25), 28) und 29) ermittelten Werthen ihrer Factoren. Dies giebt

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \gamma}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial \beta}\right) = -\beta A_0 B_0 - \beta\gamma A_1 B_0 - \beta(2\beta-\gamma)A_0 B_1 - \beta\gamma(2\beta-\gamma)A_1 B_1,$$

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial \beta}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial \gamma}\right) = \gamma A_0 B_0 + \beta\gamma A_1 B_0 + \gamma(2\gamma-\beta)A_0 B_1 + \beta\gamma(2\gamma-\beta)A_1 B_1.$$

Es ist also

$$35)\quad M = (\gamma-\beta)\{A_0 B_0 + (2\beta+2\gamma-3\beta\gamma)A_0 B_1 + 3\beta\gamma(A_0+A_1)B_1\}.$$

Da vorausgesetzt, dass $\gamma < \beta$ und weil ferner $\beta < 1$, so wird

$$2\beta + 2\gamma - 3\beta\gamma = 2\beta(1-\tfrac{3}{4}\gamma) + 2\gamma(1-\tfrac{3}{4}\beta)$$

stets positiv sein, also M negativ. Mithin ist $\frac{\partial V}{\partial \gamma}$ stets positiv, oder was dasselbe ist, $\left(\frac{\partial V}{\partial \lambda_1}\right)$ negativ. V nimmt ab, wenn λ_1 anfängt, zu wachsen, was von $\lambda = \lambda_1 = 1,3946$ an geschieht. Dem grössten Werthe von λ_1 entspricht der kleinste von V und umgekehrt. Coordinirte Werthe sind also

$$36)\qquad max\, V = 0,18711,\quad \lambda = \lambda_1 = 1,3946.$$

Mit Berücksichtigung der Gleichungen 9) und 11)

$$37)\qquad min\, V = 0,00000,\quad \lambda = 0,\quad \lambda_1 = \infty.$$

Es ist oben gezeigt, dass $\lambda\lambda_1 > 1$ sein müsse. Wir wollen jetzt noch nachweisen, dass das Minimum von $\lambda\lambda_1$ bei $\lambda = \lambda_1$ eintritt, mithin stets $\lambda\lambda_1 > 1,3946^2$ ist. Dieselbe Function hat ein Maximum bei $\lambda = 0$, $\lambda_1 = \infty$, und zwar nähert sie sich dem Werthe ∞. Zum Zweck dieses Nachweises sei $\lambda\lambda_1 = y$, so muss für einen Grenzwerth von y genommen werden

$$38)\qquad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \lambda\frac{\partial \lambda_1}{\partial \lambda} + \lambda_1 = 0.$$

Differentiirt man die Gleichung 10) nach λ und λ_1 und dividirt durch $\partial\lambda$, so erhält man

$$0 = 2\lambda\lambda_1 \int_0^1 \frac{\left(\lambda \frac{\partial \lambda_1}{\partial \lambda} + \lambda_1\right) u^2 (1-u^2)\,\partial u}{(1+\lambda^2 u^2)^{3/2}(1+\lambda_1^2 u^2)^{3/2}}$$

$$+ 3\int_0^1 \frac{(1-\lambda^2\lambda_1^2 u^2)\left\{(1+\lambda_1^2 u^2)\lambda + (1+\lambda^2 u^2)\lambda_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial \lambda}\right\} u^4 (1-u^2)\,\partial u}{(1+\lambda^2 u^2)^{5/2}(1+\lambda_1^2 u^2)^{5/2}}.$$

Das erste Integral ist gleich Null, weil der Factor $\left(\lambda \frac{\partial \lambda_1}{\partial \lambda} + \lambda_1\right)$ gleich Null ist. Mithin ist auch das zweite Integral der Null gleich. Dasselbe lässt sich auf folgende Form bringen:

$$0 = \int_0^1 \frac{(1-\lambda^2\lambda_1^2 u^2)\left\{\left(\lambda + \lambda_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial \lambda}\right) + \lambda\lambda_1 u^2\left(\lambda_1 + \lambda \frac{\partial \lambda_1}{\partial \lambda}\right)\right\} u^4 (1-u^2)\,\partial u}{(1+\lambda^2 u^2)^{5/2}(1+\lambda_1^2 u^2)^{5/2}}.$$

Dieser Ausdruck reducirt sich endlich auf

$$39) \qquad \left(\lambda + \lambda_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial \lambda}\right) \int_0^1 \frac{(1-\lambda^2\lambda_1^2 u^2)\, u^4 (1-u^2)\,\partial u}{(1+\lambda^2 u^2)^{5/2}(1+\lambda_1^2 u^2)^{5/2}} = 0,$$

welcher nur dann verschwindet, wenn entweder

$$41) \qquad \lambda + \lambda_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial \lambda} = 0$$

oder auch

$$40) \qquad \int_0^1 \frac{(1-\lambda^2\lambda_1^2 u^2)\, u^4 (1-u^2)\,\partial u}{(1+\lambda^2 u^2)^{5/2}(1+\lambda_1^2 u^2)^{5/2}} = 0 = J'$$

ist. Die erstere Relation liefert in Verbindung mit 38) die Werthe von λ und λ_1, für welche y ein Minimum ist; die zweite in Verbindung mit 10) diejenigen Werthe, wofür y sein Maximum erreicht. Im ersteren Falle coexistiren also die Gleichungen

$$\lambda \frac{\partial \lambda_1}{\partial \lambda} + \lambda_1 = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial \lambda} + \lambda = 0,$$

woraus man erhält

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial \lambda} = -\frac{\lambda_1}{\lambda} = -\frac{\lambda}{\lambda_1}, \quad \text{d. i. } \lambda = \lambda_1.$$

Es ist also an dieser Stelle zugleich $\frac{\partial \lambda_1}{\partial \lambda} = -1$. Der Werth von $\lambda\lambda_1$ erreicht hier sein Minimum und es bleibt also $\lambda^2\lambda_1^2$ stets $> 1{,}3946^4$ oder $3{,}7827$.

Auf einem etwas kürzeren Wege gelangt man zur Bestimmung der Grenzwerthe der Function $\lambda\lambda_1$, wo λ und λ_1 der Gleichung 10) Genüge leisten sollen, welche wir kurz mit $J=0$ bezeichnen, wenn man nach Cauchy (Differentialcalcül, XXII. Vorles.) setzt:

$$\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)}{\left(\frac{\partial J}{\partial \lambda}\right)}=\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda_1}\right)}{\left(\frac{\partial J}{\partial \lambda_1}\right)}, \text{ also } \lambda_1\left(\frac{\partial J}{\partial \lambda_1}\right)=\lambda\left(\frac{\partial J}{\partial \lambda}\right).$$

Die Differentiirung von J ergiebt die Bedingungsgleichung

$$(\lambda_1^2-\lambda^2)\int_0^1 \frac{(1-\lambda^2\lambda_1^2u^2)\,u^4(1-u^2)\,\partial u}{(1+\lambda^2u^2)^{5/2}(1+\lambda_1^2u^2)^{5/2}}=0,$$

woraus ebenfalls die beiden Relationen

$$\lambda=\lambda_1 \quad \text{und} \quad J'=0$$

hervorgehen. Die zweite Relation $J'=0$ liefert in Verbindung mit $J=0$ das Maximum von y. Durch Ausführung der Integrationen findet man, dass den beiden Gleichungen die Werthe

$$\text{42)} \qquad \lambda_1=\infty, \quad \lambda^2=4\,\frac{\mathit{lognat}\,\lambda_1}{\lambda_1^2}=0$$

genügen. Mithin ist der oberste Grenzwerth von $\lambda^2\lambda_1^2=Lim(4\,\mathit{lognat}\,\lambda_1)=\infty$.

Ein zweites Werthepaar kann den beiden Integralgleichungen nicht genügen. Bezeichnet man nämlich das Integral J mit

$$\int_0^1 U\,\partial u,$$

so ist das andere J' gleich

$$\int_0^1 U\frac{u^2\,\partial u}{(1+\lambda^2u^2)(1+\lambda_1^2u^2)}.$$

Da nun

$$(1+\lambda^2u^2)(1+\lambda_1^2u^2)>1$$

ist, so ist stets

$$u^2:[(1+\lambda^2u^2)(1+\lambda_1^2u^2)]<1.$$

Es muss also bei gleichem λ_1 wegen $J=J'$

$$\frac{1-\lambda_{11}^2\lambda_1^2u^2}{(1+\lambda_{11}^2u^2)^{5/2}}\ (\text{in } J') > \frac{1-\lambda^2\lambda_1^2u^2}{(1+\lambda^2u^2)^{5/2}}\ (\text{in } J)$$

sein, also offenbar $\lambda_{11}<\lambda$, d. h. es können für endliche Werthe von λ_1 nie gleichzeitig die anderen Variabeln gleich werden. Für $\lambda_1=\infty$ hingegen geht der Quotient $u^2:[(1+\lambda^2u^2)(1+\lambda_1^2u^2)]$ in $1:\lambda_1^2$ über, wodurch $\lambda_{11}=\lambda$ wird.

Um für ein gegebenes V die zugehörigen Axenverhältnisse des Ell. (γ) zu berechnen, hat man nur nöthig, die Integrationen in 9) und 10) auszuführen.

Plana* und Meyer** haben die numerische Berechnung der Coordinaten mittels elliptischer Integrale versucht, indem Letzterer die Gleichungen

$$V=\frac{2\Delta\varphi_1\cos\varphi_1}{\sin\varphi_1^3}\left\{\int_0^{\varphi_1}\frac{\sin\varphi_1^2\,\partial\varphi_1}{\Delta\varphi_1}-\cos\varphi_1^2\int_0^{\varphi_1}\frac{\tan\varphi_1^2\,\partial\varphi_1}{\Delta\varphi_1}\right\}$$

und

$$0=\int_0^{\varphi_1}\frac{\sin\varphi_1^2\,\partial\varphi_1}{\Delta\varphi_1}-\int_0^{\varphi_1}\frac{\sin\varphi_1^2\,\partial\varphi_1}{\Delta^3\varphi_1}+\frac{k^2\sin\varphi_1^2\cos\varphi_1^2}{\Delta^2\varphi_1}\int_0^{\varphi_1}\frac{\tan\varphi_1^2\,\partial\varphi_1}{\Delta\varphi_1}$$

bildet, nachdem $b=c\sqrt{1-k^2\sin\varphi_1^2}=c\Delta\varphi_1$, $a=c.\cos\varphi_1$ gesetzt ist. Diese Lösung ist wohl elegant und der Schwierigkeit des Problems entsprechend, erschwert aber die numerische Berechnung concreter Fälle ungemein und lässt die interessantesten Punkte des Problems im Dunkel. Plana berechnet daraus eine Tafel total falscher Coordinaten λ und λ_1, indem nach ihr beide gleichzeitig zu wachsen scheinen, und Meyer hat, wie es scheint, auf sehr mühsamem Wege für V_e zwei jedoch unrichtige Werthe von λ und λ_1 gefunden, worauf bereits früher (VI. Jahrg. dieser Zeitschr., S. 72) von mir aufmerksam gemacht ist. Wir ziehen die Reihenentwickelung in Form algebraischer Integrale vor. Da nämlich innerhalb sehr weiter Grenzen $\lambda < 1$ und λ_1 beträchtlich gross wird, während V abnimmt, so können wir die Berechnung vorläufig auf diese Grenzen beschränken, um die Ideen von den Gestaltungen dieser Gleichgewichtsfiguren zu fixiren. Wir berücksichtigen in dieser Voraussetzung nur die Grössen von der Ordnung λ^2, $\frac{1}{\lambda_1^2}$, λ^4 und $\frac{\lambda^2}{\lambda_1^2}$, indem sich herausstellt, dass das Product $\lambda^2\lambda_1^2$ sich innerhalb sehr weiter Grenzen wenig ändert. Beispielsweise ist für

$$\begin{aligned}
V&=0{,}18711 & \min(\lambda^2\lambda_1^2)&=3{,}7827,\\
V&=0{,}0310 & \lambda^2\lambda_1^2&=6{,}9000,\\
V_e&=0{,}0023 & \lambda^2\lambda_1^2&=12{,}7358.\\
V&=0{,}0000 & \mathrm{Lim}\,(\lambda^2\lambda_1^2)&=4\,\mathrm{lognat}\,\lambda_1.
\end{aligned}$$

Es ist nun nach 10)

$$\int_0^1\frac{(1-\lambda^2\lambda_1^2u^2)u^2(1-u^2)\,\partial u}{(1+\lambda^2u^2)^{3/2}(1+\lambda_1^2u^2)^{3/2}}=0,$$

---

* Astron. Nachr., Altona (1853), S. 851 flgg.

** Crelle, Journ., Bd. XXIV (1842), und Programm von Königsberg (1869). Vergl. auch die Monatsberichte der Berliner Akademie, 1870, S. 116.

und wenn man

$$(1+\lambda^2 u^2)^{-3/2} = 1 - \tfrac{3}{2}\lambda^2 u^2 + \tfrac{15}{8}\lambda^4 u^4$$

setzt, so wird die Bedingung des Gleichgewichts nach einigen Umformungen, wobei man approximativ

$$\sqrt{1+\lambda_1^2} = \lambda_1\left(1+\frac{1}{2\lambda_1^2}\right)$$

und

$$lognat\,(\lambda_1 + \sqrt{1+\lambda_1^2}) = lognat\,2\lambda_1 + \frac{1}{4\lambda_1^2}$$

setzt,

$$\text{43)}\qquad \lambda^2\lambda_1^2 = \frac{4\,lognat\,2\lambda_1 - 6 + \frac{7}{\lambda_1^2}}{1 - 2\lambda^2 - \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{53}{16}\lambda^4 + 4\frac{\lambda^2}{\lambda_1^2}},$$

woraus sich ohne Mühe das zu einem gegebenen λ_1 zugehörige λ berechnen lässt. Wir fügen weiter unten eine Tafel berechneter Coordinaten bei.

Um V zu berechnen, dient die Gleichung 9a). Sie ergiebt

$$\text{44)}\qquad V = \frac{\lambda^2}{2}\left(1 - \tfrac{3}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2\lambda_1^2} + \tfrac{37}{16}\lambda^4 + \frac{5\lambda^2}{2\lambda_1^2}\right).$$

Aus 43) folgt sofort $Lim\,(\lambda^2\lambda_1^2) = 4\,lognat\,\lambda_1$ und aus 44) $Lim\,V = \frac{\lambda^2}{2}$. Wir sind so zu dem wichtigen Theoreme gelangt, dass das Axenverhältniss $\sqrt{1+\lambda^2}$ des Ell. (γ) sich immer mehr und mehr dem Werthe $1+V$ nähert bei abnehmendem V. Für sehr kleine Rotationsgeschwindigkeiten ist also

$$\text{45)}\qquad V = \frac{\lambda^2}{2} = \frac{2\,lognat\,2\lambda_1 - 3}{\lambda_1^2}.$$

Für $V=0$ ist mithin $\lambda=0$, $\lambda_1=\infty$. Dem Werthe $V_e = 0{,}00229971$ des Erdsphäroids entspricht das Axenverhältniss

$$a : b : c = 1 : 1{,}0023134 : 52{,}4346.$$

Aus 45) folgt noch wegen $M = \frac{4}{3}abc\pi\varrho$ nahezu

$$\text{46)}\qquad T^2 : T_1^2 = \omega_1^2 : \omega^2 = c^3 : c_1^3,$$

d. h. die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich bei constantem Volumen und Dichte bei geringer Winkelgeschwindigkeit innerhalb mässig weiter Grenzen wie die Cuben der grossen Axen (Keppler'sches Gesetz). Dasselbe gilt auch vom Ringe (α) mit grosser Oeffnung. Ueberhaupt haben die Formen Ring (α) und Ell. (γ) manche Analogien. Für kleine Winkelgeschwindigkeiten sind ihre Bewegungsgleichungen

$$V_r = \frac{a^2}{4r^2}\,lognat\,23{,}5\,\frac{r^2}{a^2}, \qquad V_\gamma = \frac{1}{\lambda_1^2}\,lognat\,\tfrac{1}{8}\,\lambda_1^2.$$

Es leuchtet auf den ersten Blick ein, dass, λ_1 an die Stelle von $2r : a$ gesetzt, die eine Gleichung in die andere übergeht. Es haben also die beiden Figuren bei gleicher Dicke und für $c = 2r$ gleiche Umlaufszeiten.

IV. Von den Beziehungen der Elemente V, λ und λ_1 der drei Ellipsoide zu der Energie E ihrer Bewegung.

Unter Energie soll im Folgenden die Flächensumme, multiplicirt in die Massenelemente, verstanden werden. Sie ist gleichbedeutend mit der halben Summe der Momente der Bewegungsquantität oder auch mit dem Product aus der halben Winkelgeschwindigkeit und dem Trägheitsmomente, also nach dem Princip von der Erhaltung der Flächensumme frei beweglicher Massen

$$E = \int\int\int \frac{\partial m}{2} \left\{ y \frac{\partial z}{\partial t} - z \frac{\partial y}{\partial t} \right\} = \frac{\omega}{2} \int r^2 \, dm.$$

Es ist für die Rotationsellipsoide Ell. (α) und Ell. (β)

$$47) \qquad E = \frac{\sqrt{2\pi f \varrho V}}{5\left(\frac{4\pi\varrho}{3}\right)^{2/3}} M^{5/3} (1+\lambda^2)^{1/3}.$$

Für das Jacobi'sche Ell. (γ)

$$48) \qquad E = \frac{\sqrt{2\pi f \varrho V}}{10\left(\frac{4\pi\varrho}{3}\right)^{2/3}} M^{5/3} \frac{(1+\lambda^2)+(1+\lambda_1^2)}{(1+\lambda^2)^{1/3}(1+\lambda_1^2)^{1/3}}.$$

Eine deutlichere Vorstellung von dem Abhängigkeitsverhältnisse zwischen E, V, λ und λ_1 erhält man durch eine graphische Darstellung der Coordinaten E und V, indem man V als Abscisse, E als Ordinate und die Gleichung zwischen E und V als die einer ebenen Curve betrachtet. (Vgl. Taf. II, Fig. 2.) Zur Einfachheit setzen wir

$$\frac{\sqrt{2\pi f \varrho}}{5\left(\frac{4\pi\varrho}{3}\right)^{2/3}} M^{5/3} = 1.$$

Dadurch reducirt sich 47) auf

$$49) \qquad E = \sqrt{V}\,(1+\lambda^2)^{1/3}$$

und 48) auf die Form

$$50) \qquad E = \frac{\sqrt{V}}{2} \cdot \frac{(1+\lambda^2)+(1+\lambda_1^2)}{(1+\lambda^2)^{1/3}(1+\lambda_1^2)^{1/3}}.$$

Für kleine Werthe von λ geht 49) über in $\sqrt{V}\,(1+\frac{2}{3}V)$ und nähert sich also der Grenze $\sqrt{V}$ oder $\lambda\sqrt{\frac{4}{15}}$. Mithin ist bei

$$\text{Ell. } (\alpha) \quad Lim(E) = V^{1/2} = \lambda\sqrt{\tfrac{4}{15}},$$

bei dem

$$\text{Ell. } (\gamma) \quad Lim(E) = \frac{\sqrt{2}}{4}\lambda \,.\, \lambda_1^{4/3},$$

bei dem

$$\text{Ell. } (\beta) \quad Lim(E) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2/3} : V^{1/6} = 1{,}3513 : V^{1/6}.$$

Stellt man die entsprechenden Formeln für die freien Ringfiguren hiermit zusammen, so ergiebt sich für

$$\text{den Ring } (\beta) \quad Lim(E) = 1{,}0564 : V^{1/4},$$

$$\text{„ „ } (\alpha) \quad Lim(E) = \tfrac{5}{2}\left(\frac{2}{3\pi}\right)^{2/3} \cdot \frac{\lambda}{\sqrt{2}} : \tau^{4/3}$$

oder auch

$$Lim(E = 0{,}6289 \cdot \frac{\sqrt{lognat\left(\frac{2}{\tau}\right)}}{\tau^{1/3}},$$

und wenn man bei Ell. (γ) $\lambda_1 = 2 : \tau_1$ setzt, für

$$\text{Ell.}(\gamma) \quad Lim(E) = 0{,}8884 \cdot \frac{\sqrt{lognat\left(\frac{2}{\tau_1}\right)}}{\tau_1^{1/3}}.$$

Es nähert sich also an diesen Grenzen der Gleichgewichtszustand des Ringes (β) dem des Ellipsoids (β), der des Ringes (α) dem des Ellipsoids (γ). Für die Rotationsellipsoide (α) und (β) findet zwischen den Grenzen $\lambda = 1$ und 10000 merkwürdigerweise nahezu die Gleichung

$$\frac{E}{0{,}31}\, lognat 2 = lognat\left(\frac{\lambda}{0{,}31}\right)$$

statt. Um die Ideen zu fixiren, namentlich die Maxima und Minima, sowie die gleichzeitigen Gleichgewichtszustände bei gleichem V und E zu veranschaulichen, fügen wir weiter unten eine Tafel berechneter Coordinaten von λ, λ_1, V und E bei. Zugleich ist hiermit in Taf. II, Fig. 2 eine graphische Darstellung der beiden letzteren Coordinaten verbunden, worin zugleich die den Gleichgewichtszuständen der Ringe (α) und (β) entsprechenden Werthe von V als Abscissen, E als Ordinaten der Curve $E = f(V)$ mit berücksichtigt sind. Die singulären, vorzugsweise in Betracht kommenden Zahlenwerthe der Coordinatentafeln sind unterstrichen.

In erwähnter Tafel für die Ringcoordinaten bedeuten a und b die Halbaxen des elliptischen Querschnittes des Ringes, r den Abstand seines Centrums von der Drehungsaxe, also das arithmetische Mittel seines innern und äussern Halbmessers, τ das Verhältniss der Breite des Ringes zu seinem mittlern Durchmesser, also $b : r$.

Aus der graphischen Darstellung sowohl, als auch aus nachfolgenden Tafeln ersieht man nun, dass sämmtliche Curven $E = f(V)$ gemeinschaftliche Durchschnittspunkte haben, und zwar Ell. (β) mit Ell. (γ) bei

$$V = 0{,}011, \quad E = 2{,}842.$$

Diesen Durchschnitt findet man auch auf folgendem Wege annähernd durch Auflösung einer Gleichung. Für beträchtlich grosse Werthe von λ in 49) und λ_1 in 50), sowie gleiche Werthe von V und E ergiebt sich aus diesen Gleichungen

$$1 = (1+\lambda^2)^{1/3} : \tfrac{1}{2}(1+\lambda_1^2)^{2/3} = 2\,\lambda^{2/3} : \lambda_1^{4/3},$$

und aus 8) und 45)

$$V = \frac{\pi}{2\lambda} = \frac{2\, lognat\, 2\lambda_1 - 3}{\lambda_1^2}.$$

Durch Substitution von λ aus der vorigen Gleichung in die letzte ergiebt sich

$$lognat\, 2\lambda_1 = \frac{\pi\sqrt{2} + 3}{2} = 3{,}7215, \quad \text{also } \lambda_1 = 20{,}6.$$

Von dieser Stelle ab nähert sich für wachsende λ_1 das Verhältniss

$$E : E_1 = 2\pi^{2/3} : (4\, lognat\, 2\lambda_1 - 6)^{2/3}$$

fort und fort der Grenze Null, d. h. die gedachten Curven schneiden sich über den einen Durchschnittspunkt hinaus nicht wieder, sondern werden parallel. Hieraus geht nun hervor, dass es ursprüngliche Kräfte oder Energien giebt, durch welche eine freischwebende, rotirende Flüssigkeitsmasse in zwei ganz verschiedene Zustände des Gleichgewichts (Gleichgewichtsfiguren) von einer und derselben Rotationsgeschwindigkeit übergeführt werden kann, nämlich bei den in Rede stehenden Werthen $V = 0{,}011$, $E = 2{,}842$ entweder in ein stark abgeplattetes Rotationsellipsoid mit dem Axenverhältniss

$$a : b : c = 1 : 143{,}6 : 143{,}6$$

oder in ein ungleichaxiges Ellipsoid (γ) mit dem Axenverhältniss

$$a : b : c = 1{,}0114 : 20{,}6.$$

Wenn wir aber auch die beiden ringförmigen Gleichgewichtsfiguren (α) und (β) mit in Betracht ziehen, so existiren nicht weniger als vier Werthepaare von V und E, nämlich

51) für Ell. (β) und Ell. (γ), wenn $V = 0{,}011$, $E = 2{,}842$,
52) „ „ (β) „ Ring (α), „ $V = 0{,}031$, $E = 2.352$,
53) „ „ (γ) „ „ (β), „ $V = 0{,}031$, $E = 1{,}872$,
54) „ „ (γ) „ „ (α), „ $V = 0{,}0038$, $E = 4{,}021$ beträgt.

Es gehen nun ferner aus den erwähnten Tafeln folgende wichtige Theoreme hervor:

1. Die Energie einer ruhenden Kugel ist gleich Null. Erhält dieselbe ein Drehungsmoment, so geht sie über in das Ell. (α). Bei fortwährend durch successive Impulse wachsender Energie E nimmt auch die Rotationsgeschwindigkeit ω zu, also auch der Werth von V, und zwar bis zu einem Maximum $V = 0{,}2246657$ bei $E = 0{,}9235$. Dabei nimmt wegen des gleichzeitig wachsenden Trägheitsmomentes die Rotationsgeschwindigkeit in einem geringeren Verhältnise zu, als die Energie. Beispielsweise ist für das Erdsphäroid das Verhältniss

$$V_e : V_1 = \omega^2 : \omega_1^2 = 0{,}0023 : 0{,}22466 = 1 : 100,$$

also

$$\omega : \omega_1 = 1 : 10.$$

Hingegen das Verhältniss der Energien

$$E_e : E_1 = 0{,}0481 : 0{,}9235 = 1 : 19{,}2.$$

Ell. (α) und (β).			Ell. (γ).				
λ	V	E	λ_1	λ^2	$\lambda^2 \lambda_1^2$	V	E
0,0000	0,0000	0,0000					
0,0929	0,0023	0,0481					
0,2403	0,0154	0,1265					
0,3098	0,0256	0,1651					
0,5000	0,0524	0,2466					
0,8000	0,1083	0,3880					
1,0000	0,1416	0,4741					
1,3946	0,1871	0,6200	1,3946	1,9450	3,7827	0,1871	0,6200
2,0000	0,2187	0,7997	1,5389	1,6014	3,7928	0,1832	0,62
2,5293	0,2246	0,9235	1,5812	1,5209	3,8025	0,1810	0,6
3,0000	0,2218	1,0147	2,0950	0,9120	4,0000	0,1320	0,77
3,7590	0,2104	1,1345	.	.	.	0,12	0,83
5	0,1875	1,2830	.	.	.	0,11	0,90
7	0,1554	1,4523	.	.	.	0,10	0,98
7,5	0,1491	1 4810	4,4721	0,2178	4,3570	0,0856	1,1034
10	0,1216	1,6240	5,4772	0,1704	5,1109	0,0689	1,2756
15	0,0869	1,7960	6,3246	0,1397	5,5891	0,0581	1,4100
20	0,0685	1,9307	6,6332	0,1303	5,7318	0,0547	1,4567
30	0,0479	2,1141	7,071	0,1188	5,9408	0,0508	1,5256
40	0,0367	2,2414	10,0	0,0699	6,9900	0,0310	1,8750
48,577	0,0310	2,3520	14,8	0,0375	8,2184	0,0177	2,4067
90	0,0169	2,6154	15,6	0,0345	8,3941	0,0163	2,4747
100	0,0153	2,6646	18,0	0,0273	8,8429	0,0131	2,6892
120	0,0129	2,7611	19,0	0,0249	9,0274	0,0121	2,7670
140	0,0110	2,8298	20,0	0,0230	9,2037	0,0111	2,8504
160	0,0097	2,8967	22,0	0,0196	9,4864	0,0095	2,9952
300	0,0052	3,2409	38,7	0,0076	11,3824	0,0038	4,0295
680,49	0,0023	3,7103	52,4346	0,0046	12,7358	0,0023	4,7015
10000	0,00016	5,8159	10000	$336 : 10^9$	33,6000	$168 : 10^9$	44,1528
∞	0,0000	∞	∞	0,0000	∞	0,0000	∞

Ring (α) und (β).				
$1:r$	$V\sqrt{1+\lambda^2}$	V	E	$a:b:r$
∞	0,0000	0,0000	∞	1 : 1 : ∞
10000	$3:10^6$	$3:10^8$	601,3130	1 : 1,0000 : 10000
198,0	0,0001	0,0001	10,2644	1 : 1,0001 : 198,0
33,23	0,0023	0,0023	4,5595	1 : 1,0039 : 33,359
25,1	0,0038	0,0038	4,0037	1 : 1,0065 : 25,164
17,725	0,0071	0,0070	3,4390	1 : 1,0132 : 17,968
16,0	0,0085	0,0084	3,3061	1 : 1,0153 : 11,245
13,44	0,0121	0,0118	3,0927	1 : 1,0234 : 13,735
10,0	0,0194	0,0187	2,6857	1 : 1,0372 : 10,372
8,722	0,0246	0,0234	2,5291	1 : 1,0481 : 9,148
7,43	0,0331	0,0310	2,3520	1 : 1,0678 : 7,934
7,0	0,0360	0,0336	2,2864	1 : 1,0731 : 7,513
6,0	0,0468	0,0425	2,1282	1 : 1,0980 : 6,588
5,0	0,0638	0,0560	1,9628	1 : 1,1390 : 5,690
4,0	0,0927	0,0806	1,8423	1 : 1,1500 : 4,600
3,5	0,1156	0,0914	1,7757	1 : 1,2653 : 1,428
3,0	0,1443	0,1062	1,6800	1 : 1,3591 : 4,077
2,5	0,1878	0,1228	1,5719	1 : 1,5291 : 3,823
2,0	0,2559	0,1353	1,4970	1 : 1,8906 : 3,781
1,9	0,2757	0,1392	1,4816	1 : 1,9690 : 3,741
1,75	0,3053	0,1347	1,4820	1 : 2,2675 : 3,968
1,5	0,3707	0,1217	1,4928	1 : 3,045 : 4,567
1,25	0,4586	0,0848	1,5905	1 : 5,410 : 6,762
1,055	0,5300	0,0200	1,9560	1 : 26,50 : 27,96
1,005	0,5563	0,0023	2,9076	1 : 242 : 243,2
1,000	0,5590	$23:10^6$	6,5290	1 : 24300 : 24302
1,000	0,5591	0,0000	∞	1 : ∞ : ∞

Vermehrt man die Energie über den Werth $E = 0{,}62003$ hinaus, so bleibt die Figur entweder ein Ell. (α) oder sie geht in ein Ell. (γ) über, und zwar in ein Ell. (α) mit zunehmender Rotationsgeschwindigkeit oder ein Ell. (γ) mit abnehmender Rotationsgeschwindigkeit, indem im letzteren Falle das Trägheitsmoment

$$\int r^2\, dm \text{ in } E = \frac{\omega}{2}\int r^2\, dm$$

stärker wächst, als die Energie selbst. Nach weiter vermehrtem Impulse der Drehung geht endlich bei $E = 0{,}9235$ das Ell. (α) über in das Ell. (β) mit gleichfalls abnehmender Winkelgeschwindigkeit, da auch hier das Trägheitsmoment anfängt, stärker zu wachsen, als die Energie. Eine Zerstörung des Ellipsoids, wie z. B. ein Uebergang in eine andere Gleichgewichtsfigur, findet an dieser Stelle durchaus nicht statt, da die Schwerkraft die Centrifugalkraft stets überwiegt. Nur kann bei Voraussetzung einer homogen flüssigen Masse und freier Drehung die Rotationsgeschwindigkeit nicht vergrössert werden. Durch allmälig bis ins Unendliche zunehmende (peripherische) Impulse geht das Ell. (γ) endlich in einen unendlichen Cylinder mit dem Axenverhältnisse

$$a : b : c = 1 : 1 : \infty,$$

das Ell. (β) aber in einen unendlichen Discus über mit dem Axenverhältnisse

$$a : b : c = 1 : \infty : \infty.$$

2. Bei dem Werthe $E = 1{,}4816$ kann aber noch das Ell. (β) durch centrale Drehungsimpulse (nach Art der Plateau'schen Versuche) in die beiden Ringe (α) und (β) übergeführt werden, wobei die Rotationsgeschwindigkeit ω_1 des Ringes wegen des grösseren Trägheitsmoments kleiner ist, als die ω des Ell. (β). Aus den Tafeln ersieht man, dass an diesem Punkte

$$\omega^2 : \omega_1^2 = 0{,}1491 : 0{,}1392$$

ist. Bei wachsendem E bildet die Masse entweder den Ring (α) mit wachsender, oder den Ring (β) mit abnehmender Oeffnung, beide aber mit abnehmender Winkelgeschwindigkeit, weil auch hier das Trägheitsmoment der Masse schneller wächst, als die Energie. Schliesslich geht bei $E = \infty$ der Ring (α) über in eine unendliche Kreisperipherie mit dem Axenverhältnisse

$$a : b : r = 1 : 1 : \infty,$$

der Ring (β) in einen unendlichen Discus mit dem Verhältnisse

$$a : b : r = 1 : \infty : \infty.$$

3. Wenn hingegen diese vier Gleichgewichtskörper immer fort der Drehung entgegengesetzte Impulse erhalten, so nimmt die Energie ab und die Figuren durchlaufen dieselbe Reihe der Zustände in umgekehrter Ordnung. Die Ellipsoide (β) und (γ) nehmen wieder an Winkelgeschwindigkeit zu, weil die Trägheitsmomente schneller abnehmen, als die Energien. Ihre gemeinschaftliche Grenzfigur ist wieder die Kugel mit dem Axenverhältniss

$$a : b : c = 1 : 1 : 1.$$

Die Ringe (α) und (β) nehmen ebenfalls bei fortgesetzten und entgegengesetzten peripherischen Impulsen an Winkelgeschwindigkeit zu aus demselben Grunde. So wie aber die Energie bis zu dem Werthe $E = 1,4816$ abgenommen hat, haben beide dasselbe Axenverhältniss

$$a : b : r = 1 : 1,9690 : 3,741$$

und beide die Grenze des Gleichgewichtszustandes erreicht.

Der Ring löst sich nun entweder in zwei bis mehrere concentrische Ringe von verschiedener Rotationsgeschwindigkeit auf, oder er bricht zusammen, seine Masse lagert sich um den Schwerpunkt und nimmt, während $E = 1,4816$ bleibt, entweder die Form des Ell. (β) an mit den Elementen

55) $\qquad E = 1,4816, \quad V = 0,1491, \quad \lambda = 7,5, \quad b = 1,6.r$

oder die Form des Ell. (γ) mit den Elementen

56) $\qquad E = 1,4816, \quad V = 0,0534, \quad \lambda_1 = 6,78, \quad c = 3r.$

Es kann an dieser Grenze, wo die beiden Ringfiguren (α) und (β) in einander übergehen, auf geeignete Art die eine in die andere übergeführt werden, wenn in diesem Momente, bevor die Zerstörung oder Auflösung der Figur erfolgt, der Ring (α) durch einen neuen peripherischen Impuls in den Ring (β) übergeht, wobei sich also aufs Neue seine Oeffnung verengt, seine Abplattung vergrössert. Umgekehrt kann der Ring (β) an der Stelle des Minimums von E durch einen neuen peripherischen Impuls in den Ring (α) übergehen, wobei seine Oeffnung sich also aufs Neue erweitert, seine Abplattung verkleinert.

Aehnliche Theoreme, wie die vorstehenden, gelten von den drei cylindrischen Gleichgewichtsfiguren, die wir einer späteren Abhandlung vorbehalten. Wir wenden uns einem Gegenstande der Betrachtung zu, der ohne Frage eine der interessantesten Partien der Theorie ausmacht.

V. Von den Veränderungen der Axenverhältnisse, der Schwerkräfte und der Umdrehungsgeschwindigkeit der homogenen flüssigen Ellipsoide durch Condensation und Expansion bei constanter Masse und Energie.

Wenn man durch Temperaturverhältnisse, hydrostatischen Druck oder Volumenveränderungen irgendwelcher Art die Dichtigkeit eines homogen flüssigen, frei rotirenden und im Gleichgewichte sich befindenden Ellipsoids allmälig sich verändernd gedenkt, so jedoch, dass der Körper in allen Theilen homogen, auch seine Energie und Masse invariabel bleibt, so müssen sich auch Abplattung und Umdrehungsgeschwindigkeit, ingleichen die Schwerkraft an einem Punkte des Aequators in einem bestimmten Sinne ändern. Dabei übt nun eine Condensation auf die Axenverhältnisse dieselben Wirkungen aus, wie eine Vermehrung der Energie bei constanter Dichtigkeit; eine Expansion hingegen wirkt ebenso, wie eine Verminderung der Energie. Dies lehren folgende Betrachtungen.

Für die Rotationsellipsoide (α) und (β) ist die Energie gemäss 47)

$$E = \frac{\omega}{2}\int r^2\, dm = \frac{\sqrt{2\pi f \varrho V}}{5\left(\frac{4}{3}\pi\varrho\right)^{2/3}} M^{5/3} (1+\lambda^2)^{1/3}.$$

Für zwei verschiedene Dichtigkeiten ϱ und ϱ_1, sowie invariable M und E ist

$$\frac{\sqrt{\varrho V}}{\varrho^{2/3}} (1+\lambda^2)^{1/3} = \frac{\sqrt{\varrho_1 V_1}}{\varrho_1^{2/3}} (1+\lambda_1^2)^{1/3}$$

oder

$$57)\qquad \frac{V^3 (1+\lambda^2)^2}{V_1^3 (1+\lambda_1^2)^2} = \frac{\varrho}{\varrho_1},$$

und wenn man ω statt V einführt,

$$58)\qquad \frac{\omega^3 (1+\lambda^2)}{\omega_1^3 (1+\lambda_1^2)} = \frac{\varrho^2}{\varrho_1^2}.$$

Ferner findet man leicht die Relation

$$59)\qquad \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{V^2 (1+\lambda^2)}{V_1^2 (1+\lambda_1^2)}.$$

Da nun bei gleichen Werthen von V und V_1

$$59)\qquad \omega^2 : \omega_1^2 = \varrho : \varrho_1,$$

so lässt sich mittels der aus 57) folgenden Relation

$$(1+\lambda^2)^2 : (1+\lambda_1^2)^2 = \varrho : \varrho_1$$

zu zwei gegebenen Werthen λ und λ_1 das entsprechende Dichtigkeitsverhältniss berechnen.

Sieht man nun die mit „Strich" bezeichneten Elemente als constant an, so folgt aus 57), dass, weil $\varrho = 0$ die Grenze der Expansion bezeichnet, $V = 0$ sein muss. Es wird also λ entweder den Werth 0 oder ∞ haben. Da aber für $\lambda = \infty$ gemäss 8) $V = \frac{\pi}{2\lambda}$ wird, so nimmt die Gleichung 57) die Form

$$61)\qquad \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \lambda : V_1^3 (1+\lambda_1^2) = \varrho : \varrho_1$$

an, welche für $\lambda = \infty$ gleichzeitig $\varrho = \infty$ fordert. Mithin ist die Kugel die Grenzfigur der Expansion, der unendliche Discus die Grenzfigur der Condensation. Für starke Expansionen ist nahezu

$$V^3 (1+\lambda^2)^2 = \left(\tfrac{4}{15}\right)^3 \lambda^6,$$

folglich

$$62)\qquad \lambda^6 : \lambda_1^6 = \varrho : \varrho_1.$$

Die Abplattung nimmt also ab mit der Dichtigkeit. Coordinirte Werthe sind $\varrho = 0$, $\lambda = 0$. Für starke Condensationen ist

$$V^3 (1+\lambda^2)^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \lambda,$$

also

$$63)\qquad \lambda : \lambda_1 = \varrho : \varrho_1.$$

Die Abplattung wächst hier mit der Dichtigkeit. Coordinirte Werthe sind $\varrho = \infty$, $\lambda = \infty$.

Aus diesen Betrachtungen folgt denn, dass bei constanter Masse und Energie mit zunehmender Dichtigkeit das Ell. (α) sich immer mehr und mehr abplattet und bei dem Maximalwerthe von $V = 0,2246657$ in das Ell. (β) übergeht. Dabei wächst die Umdrehungsgeschwindigkeit ω immer mehr, weil das Trägheitsmoment der Masse abnimmt. Dies geschieht nun aber auch über jenes Maximum von V hinaus, aber nicht bis ins Unendliche, sondern erreicht, wie wir weiter unten sehen werden, ein endliches Maximum bei $V = 0$, $\lambda = \infty$. Ferner würde bei einer ins Unendliche wachsenden Dichtigkeit die Aequatorialaxe $2b$ nicht Null werden, sondern ebenfalls ein endliches Maximum erreichen. Es bleibt also die Schwungkraft am Aequator stets endlich; auch bleibt sie immer unter dem Werthe der Massenattraction, womit also die Lehre von der „Abschleuderung" ein- für allemal fällt. Erst an den Grenzen der Dilatation der Materie bei $\lambda = 0$ und ∞ wird am Aequator die Schwungkraft der Massenattraction gleich, also die Gravitation gleich Null, niemals aber negativ. Die Gravitation (Fallgeschwindigkeit) am Aequator erreicht aber zwischen den beiden Grenzen der Dilatation $\varrho = 0$, $\varrho = \infty$ ein Maximum. Um diese Sätze analitisch zu deduciren, beginnen wir von der Gleichung 57).

Es sei V_1 gleich seinem Maximalwerthe 0,2246637, so ist $\lambda_1 = 2,5293$. Seien ferner die coordinirten Werthe $\varrho_1 = 1$, $\omega_1 = 1$, $b_1 = 1$, so ist wegen $k_1 = \omega_1^2 b_1$ auch die Schwungkraft am Aequator $k_1 = 1$. Endlich ist

$$2\pi f = 1 : 0,2246657$$

und die Fallgeschwindigkeit

$$G_1 = B_1 + k_1 = -0,7345\, k_1.$$

Es ist mithin

$$V^2 (1+\lambda^2)^2 : \varrho = 0,22466^2 (1+2,5293^2)^2 = 0,22466^2 \,.\, 7,3974^2$$

und gemäss 4)

$$64)\qquad (1+\lambda^2)^2 \left\{ \frac{(3+\lambda^2)\, arctan\, \lambda - 3\lambda}{\lambda^3} \right\}^2 = 0,22466^2 \,.\, 7,3974^2 \,.\, \varrho.$$

Für sehr grosse λ wird $V = \pi : 2\lambda$. Setzt man dies in 64) ein, so wird

$$65)\qquad Lim\, (\lambda : \varrho) = \left(\frac{2 \,.\, 0,22466}{\pi}\right)^2 .\, 7,3974 = 0,16011,$$

d. h. das Axenverhältniss $b : a$ wird bei starker Condensation der Dichtigkeit proportional sich ändern. Wegen der Relation

$$\omega^2 : 2\pi f \varrho = V = \pi : 2\lambda$$

ist also

$$66)\qquad Lim\, (\omega : \omega_1) = \pi^2 : [(2 \,.\, 0,22466)^2 \,.\, 7,3974] = 6,6082,$$

d. h. die Rotationsgeschwindigkeit des Ellipsoids (β) erreicht erst bei $\varrho = \infty$ ein endliches Maximum, wogegen bei constanter Dichtigkeit das Maximum von ω gleich ω_1 ist.

Wegen der Relation, welche aus der Unveränderlichkeit der Masse M folgt,

$$M = \tfrac{4}{3}\pi \varrho a b^2 = \tfrac{4}{3}\pi \varrho_{11} a_{11} b_{11}^2,$$

mit Berücksichtigung der Gleichung 63) $\lambda : \lambda_{11} = \varrho : \varrho_{11}$, ist nun weiter

$$ab^2 : a_{11} b^2_{11} = \varrho_{11} : \varrho = \frac{b_{11}}{a_{11}} : \frac{b}{a},$$

also wenn b und b_{11} die Halbaxen zweier stark abgeplatteter Ellipsoide sind

67) $$Lim\,(b : b_{11}) = 1 \quad \text{und} \quad a : a_{11} = \varrho_{11} : \varrho,$$

d. h. bei $\varrho = \infty$ bleibt die Aequatorialaxe constant und endlich und nur die Polaraxe nimmt noch ab im umgekehrten Verhältnisse der Dichtigkeiten.

Weil nun an den Polen und dem Aequator die Producte aus den Componenten der Anziehungen und den Dicken der Niveauschichten gleich sind, also wegen der Unveränderlichkeit von ω, b und B an dieser Stelle

$$A\,\delta a = (B + \omega^2 b)\,\delta b = Const.,$$

und weil ferner wegen der Aehnlichkeit der Niveauflächen und gemäss 67)

$$\delta a : \delta a_{11} = a : a_{11} = \varrho_{11} : \varrho$$

ist, so ist auch $A\,\delta a = A_{11}\,\delta a_{11}$ und

68) $$A_{11} : A = a : a_{11} = \varrho_{11} : \varrho,$$

d. h. die Schwerkräfte an den Polen wachsen für $\varrho = \infty$ der Dichtigkeit direct proportional, der Polaraxe umgekehrt proportional.

Nun ist ferner gemäss 58) allgemein für irgend zwei Rotationsellipsoide von derselben Masse und Energie

$$\left(\omega^3 \,.\, \frac{b^2}{a^2}\right) : \left(\omega^3_{11} \,.\, \frac{b^2_{11}}{a^2_{11}}\right) = \varrho^2 : \varrho^2_{11}$$

oder

$$\left(\omega^{3/2} .\, \frac{b}{a}\right) : \left(\omega_{11}{}^{3/2} .\, \frac{b_{11}}{a_{11}}\right) = \varrho : \varrho_{11} = a_{11} b^2_{11} : a b^2;$$

folglich verhält sich

69) $$\omega : \omega_{11} = b^2_{11} : b^2 = T_{11} : T,$$

wo T und T_{11} die Umdrehungszeiten bezeichnen. Es sind also die Winkelgeschwindigkeiten zweier Ellipsoide (α) oder (β) von derselben Masse und Energie, aber verschiedener Dichtigkeit den Quadraten der Aequatorialaxen umgekehrt, die Umlaufszeiten ihnen direct proportional. Vermittelst dieses Satzes sind wir nun im Stande, die Grenze von b bei $\varrho = \infty$ anzugeben. Setzt man nämlich $b_{11} = b_1$ und $\omega_{11} = \omega_1$, so wird

70) $$Lim\,(b : b_1) = Lim\,(\sqrt{\omega_1} : \sqrt{\omega}) = 1 : \sqrt{6{,}6082} = 1 : 2{,}5725,$$

d. h. die Aequatorialaxe kann, während die Dichtigkeit von $\varrho_1 = 1$ bis $\varrho = \infty$ wächst, sich nur auf ungefähr $\frac{2}{5}$ ihrer Länge verkürzen.

Nun ist ferner nach 69) $\omega b^2 = \omega_{11} b^2_{11}$ und am Aequator

$$k : k_{11} = \omega^2 b : \omega^2_{11} b_{11},$$

folglich

71) $$k : k_{11} = b^3_{11} : b^3,$$

d. h. die Schwungkräfte am Aequator verhalten sich bei constanter Masse und Energie, aber ungleichen Dichtigkeiten, umgekehrt wie die Cuben der grossen Axen der Rotationsellipsoide.

Weil nun gemäss 69) $\omega^{2/3} : \omega_{11}^{2/3} = b^3_{11} : b^3$ ist, so ist auch

72) $$\omega^3 : \omega^3_{11} = k^2 : k^2_{11} = T^3_{11} : T^3,$$

d. h. die Quadrate der Schwungkräfte am Aequator verhalten sich umgekehrt wie Cuben der Umdrehungszeiten.

Weiter ist nach 66) $Lim\,(\omega : \omega_1) = 6{,}6082$ und darum gemäss 72)

73) $$Lim\,(k : k_1) = 6{,}6082^{3/2} = 16{,}987,$$

mithin erreicht die Schwungkraft bei $\varrho = \infty$ am Aequator ein endliches Maximum, wobei sie der Massenanziehung gleich wird. Es ist nämlich die Massenanziehung

$$B = -2\pi f\varrho\,\frac{(1+\lambda^2)\,arctan\,\lambda - \lambda}{\lambda^3}\,b = -2\pi f b\,.\,\frac{\pi}{2}\,.\,\frac{\varrho}{\lambda},$$

und mit Einführung von 65)

74) $$B = -\left(\frac{\pi}{2\,.\,0{,}2246657}\right)^2 .\,7{,}3974^{2/3} = -16{,}987.$$

Da nun für $\varrho = 0$ und $\varrho = \infty$ $B + k = 0$ ist, so geht hieraus hervor, dass die Schwerkraft (Fallgeschwindigkeit) am Aequator ein Maximum erreichen muss. Es ist nun die Gravitation oder Gesammtanziehung

75) $$G = B + \omega^2 b = -2\pi f\varrho\,\frac{(1+\lambda^2)\,arctan\,\lambda - \lambda}{\lambda^3}\,b + \omega^2 b,$$

$$\frac{G}{\omega_1^2 b_1} = \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^{2/3} - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)\frac{\varrho_1}{\omega_1^2}\,.\,2\pi f\,.\,\frac{(1+\lambda^2)\,arctan\,\lambda - \lambda}{\lambda^3}\,.\,\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\sqrt{1+\lambda_1^2}}$$

und mit Berücksichtigung von 58)

$$\frac{G}{k_1} = \frac{\varrho}{\varrho_1}\,.\,\frac{\sqrt{1+\lambda_1^2}}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$

$$-\left(\frac{\varrho}{\varrho_1}\right)^{2/3} .\,\frac{(1+\lambda_1^2)^{1/3}}{(1+\lambda^2)^{1/3}}\,.\,2\pi f\,.\,\frac{\varrho_1}{\omega_1^2}\,.\,\left\{\frac{(1+\lambda^2)\,arctan\,\lambda - \lambda}{\lambda^3}\right\}.\,\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\sqrt{1+\lambda_1^2}},$$

endlich gemäss 57)

$$\frac{G}{k_1} = \frac{V^3}{V_1^3}\,.\,\frac{(1+\lambda^2)^{1/2}}{(1+\lambda_1^2)^{1/2}} - \frac{V^2}{V_1^2}\,.\,\frac{(1+\lambda^2)^{1/2}}{(1+\lambda_1^2)^{1/2}}\,.\,\frac{(1+\lambda^2)\,arctan\,\lambda - \lambda}{V\,.\,\lambda^3}.$$

Mithin, wenn wiederum die Constanten $V_1 = 0{,}22466$, $\lambda_1 = 2{,}5293$, $\omega_1 = 1$, $b_1 = 1$ eingeführt werden,

76) $$\frac{0{,}22466^3\,.\,7{,}3974^{2/3}}{2}\,.\,\frac{G}{k_1} = (1+\lambda^2)^{1/2}\,.\,V^2\,.\,\frac{arctan\,\lambda - \lambda}{\lambda^3} = f(\lambda).$$

Es liefert nun die Gleichung $f'(\lambda) = 0$ diejenigen Werthe von λ, für welche G ein Minimum oder ein Maximum wird. Die Minima finden statt bei $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$, nämlich $G = 0$. Die Gleichung liefert ein Maximum von G ziemlich nahe bei

$$\lambda = 7{,}0 \text{ oder } \sqrt{1+\lambda^2} = b : a = 7{,}071$$

mit den Elementen

$$G = -1{,}2157\,k_1 = 1{,}655\,G_1, \quad V = 0{,}1554, \quad E \text{ willkürlich},$$

77) $$\varrho = 15{,}118.\varrho_1, \quad k = 5{,}7696.k_1, \quad \omega = 3{,}2168.\omega_1, \quad b = 0{,}5575.b_1.$$

Es ist also V nahezu derselbe Werth, welchen wir aus den Tafeln als denjenigen erkannt haben, bei welchem die Ringe aufhören, im Gleichgewichte zu sein und aus dem Bereiche ihrer Stabilität treten. Hier hat das Ellipsoid also seine grösste Stabilität erreicht.

Ist die Dichtigkeit ϱ dagegen constant, die Energie E variabel, so findet das Maximum der Gravitation am Aequator für $E=0$ und $\lambda=0$ statt. Denn es ist

$$78) \quad \begin{aligned} \frac{G}{2\pi f\varrho} &= -\frac{(1+\lambda^2)\,arctan\,\lambda-\lambda}{\lambda^3}\,b+Vb, \\ \frac{G}{4\pi f\varrho} &= -\frac{\lambda-arctan\,\lambda}{\lambda^3}\,b. \end{aligned}$$

Für sehr kleine Werthe von V ist $G:k=2:3V$, z. B. für $V_e=0{,}00229971$ ist $G:k=290$.

Bezeichnet a_1 den Radius der Kugel, a und b die Halbaxen eines beliebigen Ellipsoids (α) oder (β), so ist bei constanter Masse und Dichtigkeit

$$M=\tfrac{4}{3}\pi\varrho a_1^3=\tfrac{4}{3}\pi\varrho ab^2,$$

also $b:a=\sqrt{1+\lambda^2}$ und $ab^2=a_1^3$. Multiplicirt man diese beiden Gleichungen miteinander, so wird

$$b^3=a_1^3\sqrt{1+\lambda^2} \text{ oder } b=a_1\sqrt[6]{1+\lambda^2}.$$

Es ist also

$$79) \quad \frac{G}{4\pi f\varrho a_1}=-\frac{\lambda-arctan\,\lambda}{\lambda^3}\cdot\sqrt[6]{1+\lambda^2}=\varphi(\lambda).$$

Die Gleichung $\varphi'(\lambda)=0$ liefert den Maximalwerth von G bei $\lambda=0$. Es ist dabei

$$G=-\tfrac{4}{3}\pi f\varrho\,.\,a_1.$$

Das Minimum von G ist gleich Null bei $\lambda=\infty$.

Am Pole muss bei constanter Dichtigkeit und zunehmender Energie die Gesammtanziehung A von $-\frac{4}{3}\pi f\varrho . a_1$ bis $-\infty$ wachsen; bei stetiger Verdichtung und constanter Energie hingegen gemäss 68) von 0 bis $-\infty$.

Um die Vorstellungen zu fixiren, mögen vorstehende Theoreme auf einige specielle Fälle angewendet werden. Wenn sich z. B. die Materie unsers Erdballes aus höheren Aggregatzuständen bis zu dem gegenwärtigen Grade ihrer Dichtigkeit condensirt hat, so muss sie eine geringere Rotationsgeschwindigkeit gehabt haben. Angenommen, die als homogen gedachte Materie habe sich von einer gewissen Periode an bis auf das $n$fache verdichtet, so lässt sich die Tageslänge in jener Periode daraus berechnen. Da λ sehr klein ist, so ist gemäss der Relation 62)

$$\lambda_0:\lambda_1=1:\sqrt[6]{n},$$

woraus man λ_0 berechnet. Ferner ist

$$\omega_0:\omega_1=1:n^{2/3}=T_1:T_0,$$

woraus man die Tageslänge berechnet. Es möge ϱ_0 gleich der mittleren Dichte des Saturn, also etwa

$$\varrho_0 : \varrho_1 = 1 : 6$$

angenommen werden, so wäre die mittlere Tageslänge gleich $3^d\,7^h\,15'$ gewesen. Die Abplattung des homogen angenommenen Ellipsoides müsste damals betragen haben

$$\frac{b-a}{a} = 0{,}00237,$$

also etwas grösser, als die Hälfte der jetzigen Periode 0,00433441. Die wirkliche Abplattung des heterogenen Erdsphäroids ist 0,00333. Wenn die Erde, was annehmbar ist, bei der fortdauernden Wärmeexhalation einer beständigen, wenn auch langsamen Volumenverminderung unterworfen ist, so müsste (was bis jetzt nicht mit Bestimmtheit wahrgenommen ist) auch die Tageslänge fortwährend im Abnehmen begriffen sein. Um sich einen deutlicheren Begriff von der Grösse dieser hypothetischen Volumenverminderung und der davon abhängenden Abnahme der Tageslänge zu verschaffen, nehmen wir an, dass letztere innerhalb eines gewissen Zeitraumes um eine Secunde verkürzt worden wäre, so würde dieser eine Verkürzung des mittleren Meridiangrades um den 172800'^{en} Theil seiner Länge entsprechen oder ungefähr um 0,34 Toisen, den mittleren Meridiangrad nach der von Bessel im Jahre 1841* bekannt gemachten Bestimmung zu 57013,109 Toisen gerechnet. Bezeichnet nämlich v das Volumen der Erde, u die Länge des Meridians, t die Tageslänge, z eine Secunde oder $t:86400$, $\varDelta u$ die Verkürzung des Meridians, so ist

$$\omega : \omega_1 = \varrho^{2/3} : \varrho_1^{2/3} = v_1^{2/3} : v^{2/3} = u_1^2 : u^2,$$

also

$$u_1 : u = \sqrt{\omega} : \sqrt{\omega_1}.$$

Ferner ist

$$\omega : \omega_1 = u_1^2 : u^2 = t_1 : t$$

und

$$(u - \varDelta u)^2 : u^2 = (t - z) : t,$$

also

$$\left(1 - 2\,\frac{\varDelta u}{u}\right) : u = (t - z) : t.$$

Hieraus ergiebt sich weiter

$$z : t = 2\,\varDelta u : u = 1 : 86400$$

und endlich

$$\varDelta u = u : 172800.$$

Dabei würde das Axenverhältniss $b:a$ von 1,00433441 kaum auf 1,00433444 gestiegen sein. Es ist aber anzunehmen, dass seit Hipparch's Zeiten die Tageslänge nicht um ein Hundertstel einer Secunde abgenommen habe**,

---

* Astron. Nachr., Altona, XIX, Nr. 438 S. 97—116.

** Humboldt's Kosmos, I, S. 183, 427.

wonach innerhalb der äussersten Grenze dieser Abnahme die Länge des mittleren Meridiangrades sich seit der Zeit nicht um 0,0034 Toise verkürzt haben kann. Laplace hat berechnet*, dass dieser Grösse eine Abnahme der mittleren Erdwärme um kaum $\frac{1}{170}$° C. entspräche. Nimmt man nämlich den Ausdehnungscoefficienten der Erdmasse gleich dem des Glases 0,00001 an, so findet die Relation

$$\varrho : \varrho_1 = 1 : \left\{1 + \frac{3}{200.24.60^2}\right\} = 1 : (1 + 0,00003 \,.\, x)$$

statt, also ist $x = \frac{1}{172,8}$° C.

Es möge nun noch das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeit ω der jetzigen Periode zu derjenigen bei $V = 0,2246657$ berechnet werden.

Bei den oben angenommenen Einheiten der Elemente der Bewegung und Dichtigkeit ist die Gravitationsconstante $f = 1 : (2\pi \,.\, 0,2246657)$. Für sehr kleine Werthe von λ ist $V = \frac{4}{15}\lambda^2$ und für das homogene Erdsphäroid $\lambda = 0,09287$, also

$$\frac{(\frac{4}{15}\lambda^2)^2 (1+\lambda^2)^2}{\varrho} = 0,22466^2 \,.\, 7,3974^2.$$

Demgemäss ist nun

$$\varrho = 0,0000000221$$

und

$$\omega = 0,00001506,$$

der Aequatorialhalbmesser dazu

$$b = 1 : \sqrt{\omega} = 264.$$

Gehen wir zu noch höheren Graden der Condensation über, so wird gemäss 77) erst bei einer Verdichtung auf das 700,000000fache der wirklichen das Maximum der Gesammtanziehung (Fallgeschwindigkeit) G am Aequator erreicht sein, und zwar bei einer 200000fachen Umdrehungsgeschwindigkeit die Tageslänge noch ungefähr eine Tertie betragen, ohne dass innerhalb dieser Grenzen an eine Abschleuderung der Stoffe gedacht werden könnte. Gemäss der Relation 66) ist bei $\varrho = \infty$

$$Lim\,\omega = 6,6082 : 0,000015 = 440000,$$

und gemäss 69)

$$Lim\,b = 1 : \{264.2,5725\} = 1 : 660.$$

Hieraus geht dann schliesslich hervor, dass bei einer Condensation der Materie des Erdsphäroids bis ins Unendliche die Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde um ihre Axe auf das 440000fache gesteigert werden würde, ohne dass die Schwungkraft die Schwerkraft (Massenanziehung) am Aequator erreichen oder gar überwiegen würde, dass ferner selbst an dieser Grenze der Verdichtung sich der Aequatorialdurchmesser nur bis auf 2,6 Meilen

---

* *Exposition du syst. du monde*, *pag.* 220, 263. *Méc. cél.*, *T. V. pag.* 18, 72.

verkürzen, die Tageslänge auch noch etwas weniger als eine halbe Tertie betragen müsste.

Wir bemerken noch, dass die oben berechneten Tafeln für V und λ unter allen Umständen Giltigkeit behalten.

Es bleibt noch übrig, Betrachtungen über diese Verhältnisse an dem Ell. (γ) anzustellen. Es ist die halbe Summe der Momente der Bewegungsquantität oder die Energie

$$80)\qquad E=\frac{\sqrt{2\pi f\varrho V}}{10\,(\frac{4}{3}\pi\varrho)^{2/3}}\cdot M^{4/3}\cdot\frac{(1+\lambda^2)+(1+\lambda_1^2)}{(1+\lambda^2)^{1/3}\cdot(1+\lambda_1^2)^{1/3}}.$$

Für constante E und M ist

$$81)\qquad V^3\frac{[(1+\lambda^2)+(1+\lambda_1^2)]^6}{(1+\lambda^2)^2\,(1+\lambda_1^2)^2}:V_1^3\frac{[(1+L^2)+(1+L_1^2)]^6}{(1+L^2)^2\,(1+L_1^2)]^2}=\varrho:\varrho_1,$$

wo V_1, L, L_1 und ϱ_1 sich auf ein zweites Ell. (γ) beziehen.

Ferner ist

$$82)\qquad \omega^3\cdot\frac{[(1+\lambda^2)+(1+\lambda_1^2)]^3}{(1+\lambda^2)\,(1+\lambda_1^2)}:\omega_1^3\frac{[(1+L^2)+(1+L_1^2)]^3}{(1+L^2)\,(1+L_1^2)}=\varrho^2:\varrho_1^2$$

und

$$83)\qquad V^2\frac{[(1+\lambda^2)+(1+\lambda_1^2)]^3}{(1+\lambda^2)\,(1+\lambda_1^2)}:V_1^2\frac{[(1+L^2)+(1+L_1^2)]^3}{(1+L^2)\,(1+L_1^2)}=\omega:\omega_1.$$

Sei wiederum $c>b$, also $\lambda_1>\lambda$ und $L_1>L$ und mögen die mit einem Index bezeichneten Elemente als constant angesehen werden, so folgt zunächst aus 81), dass ϱ nicht Null, sondern nur ∞ werden kann, wenn nicht $\lambda=\lambda_1$ ist, in welchem Falle für $\varrho=0$ auch $\lambda=0$ werden müsste. Es ist mithin bei dem dreiaxigen Ellipsoide (γ) der unendliche Cylinder mit kreisförmigem Querschnitt die Grenzfigur der Condensation. Für zwei stark condensirte, also auch stark verlängerte Ellipsoide (γ) wird nach 81) sich verhalten

$$84)\qquad \varrho:\varrho_{11}=\lambda_1^2\{lognat(\lambda_1^2)\}^3:L_1^2\{lognat\,(L_1^2)\}^3,$$

d. h. die Abplattungen (Verlängerungen) nehmen zu mit der Dichtigkeit und es wird schliesslich $\lambda_1=\infty$ für $\varrho=\infty$. Die Winkelgeschwindigkeit wächst ebenfalls continuirlich mit der Condensation, weil das Trägheitsmoment sich verkleinert. Zur deutlicheren Einsicht in die Aenderungen aller in Betracht kommenden Elemente beziehen wir alles auf den Maximalwerth von $V_1=0{,}18711$ und $L=L_1=1{,}3946$. An dieser Stelle sei wiederum

$$\varrho_1=1,\ \omega_1=1,\ c_1=b_1=1\ \text{und}\ k_1=\omega_1^2 b_1=1,$$

so ist

$$G_1=B_1+k_1=-1{,}7583\,k_1$$

und die Gravitationsconstante

$$f=1:(2\pi.0{,}18711).$$

Es ist mithin

$$85)\qquad \frac{V^3}{\varrho}\cdot\frac{\{(1+\lambda^2)+(1+\lambda_1^2)\}^6}{(1+\lambda^2)^2\,(1+\lambda_1^2)^2}=0{,}18711^3.2^6.2{,}945^2.$$

Ist λ_1 beträchtlich gross, also λ sehr klein und $V = lognat\,(\lambda_1^2) : \lambda_1^2$, so ist

$$86)\quad Lim\,(\lambda_1 : \varrho) = \frac{0{,}18711^3 \,.\, 2^6 \,.\, 2{,}945^2}{Lim\,\lambda_1\,\{lognat\,(\lambda_1^2)\}^3} = 0.$$

Gemäss 83) ist ferner für $\varrho = \infty$

$$87)\quad Lim\,(\omega : \omega_1) = Lim\left\{V^2 \frac{[(1+\lambda^2) + (1+\lambda_1^2)]^3}{(1+\lambda^2)\,(1+\lambda_1^2)}\right\} : R = Lim\,\{lognat\,(\lambda_1^2)\}^2 = \infty.$$

Nun ist weiter für irgend zwei Ell. (γ)

$$M = \tfrac{4}{3}\pi\varrho\,abc = \tfrac{4}{3}\pi\varrho_{11}\,a_{11}b_{11}c_{11},$$

also mit Rücksicht auf 82) allgemein

$$88)\quad \omega : \omega_{11} = (b^2_{11} + c^2_{11}) : (b^2 + c^2) = T_{11} : T$$

und

$$89)\quad \varrho : \varrho_{11} = c^3_{11}\sqrt{1+L^2}\,(1+\lambda_1^2) : c^3\sqrt{1+\lambda^2}\,(1+L_1^2).$$

Weil nun $Lim\,(\omega : \omega_1) = \infty$, so ist $Lim\,(c : c_1) = 0$. Indess nimmt die grösste Axe c sehr langsam ab, wie aus 84) folgt, und zwar nahezu umgekehrt, wie die Logarithmen aus den Axenverhältnissen λ_1 und L_1, wobei $\lambda_1 = c : a$ und $L_1 = c_{11} : a_{11}$ ist. Da nämlich bei starken Condensationen b und b_{11} in a und a_{11} übergehen, so ist für $\varrho > \varrho_{11}$ und 84) $\lambda_1 > L_1$

$$a^2c : a^2_{11}c_{11} = \varrho_{11} : \varrho = L_1^2\{lognat\,(L_1^2)\}^3 : \lambda_1^2\{lognat\,(\lambda_1^2)\}^3$$
$$= \frac{c^2_{11}}{a^2_{11}}\{lognat\,L_1\}^3 : \frac{c^2}{a^2}\{lognat\,\lambda_1\}^3,$$

folglich

$$90)\quad c\,log\,\lambda_1 = c_{11}\,log\,L_1$$

und

$$Lim\,(c : c_{11}) = Lim\,\{log\,L_1 : log\,\lambda_1\} = 0.$$

Die Halbaxe c bleibt also zuletzt innerhalb weiter Grenzen constant, geht aber doch für $\varrho = \infty$ in 0 über. Hieraus folgt für $\varrho = \infty$

$$91)\quad a^2 : a^2_{11} = \varrho_{11} : \varrho.$$

Die Condensation findet also ebenso, wie bei Ell. (α) und (β) vorzugsweise in der Richtung der kürzesten Axe statt.

Bezeichnen nun k und k_{11} die Schwungkräfte an den Polen B, K und K_{11} dieselben an den Polen C zweier beliebiger Jacobi'scher Ellipsoide, so ist allgemein

$$k : k_{11} = \omega^2 b : \omega^2_{11} b_{11},\quad K : K_{11} = \omega^2 c : \omega^2_{11} c_{11},$$

woraus weiter folgt

$$92)\quad k : k_{11} = \frac{b}{b_{11}} : \frac{(b^2 + c^2)^2}{(b^2_{11} + c^2_{11})^2},$$

$$93)\quad K : K_{11} = \frac{c}{c_{11}} : \frac{(b^2 + c^2)^2}{(b^2_{11} + c^2_{11})^2}.$$

Combinirt man die Relationen 92) und 93), so resultirt

$$94)\quad \frac{k}{k_{11}} : \frac{K}{K_{11}} = \frac{b}{b_{11}} : \frac{c}{c_{11}}$$

oder

95) $$k K_{11} : k_{11} K = b c_{11} : b_{11} c.$$

Ferner ist

96) $$(k^2 + K^2) : (k^2_{11} + K^2_{11}) = \omega^3 : \omega^3_{11} = T^3_{11} : T^3,$$

d. h. die Summe der Quadrate der Schwungkräfte an den beiden Polen des Aequators irgend zweier Jacobi'scher Ellipsoide von derselben Masse und Energie verhalten sich umgekehrt wie die Cuben der Umdrehungszeiten.

Sind b und b_{11} sehr klein gegen c und c_{11}, so geht 93) über in

$$K : K_{11} = c^2_{11} : c^2,$$

und 96) in

$$K^2 : K^2_{11} = \omega^3 : \omega^3_{11},$$

also

$$\omega : \omega_{11} = c^2_{11} : c^2$$

und

$$K : K_{11} = \omega c_{11} : c \omega_{11},$$

entsprechend dem Ell. (β) mit sehr grosser Excentricität. Hieraus ergiebt sich noch, wie auch weiter unten gezeigt wird,

$$Lim\,(k : k_1) = \infty, \quad Lim\,(K : K_1) = \infty \lambda_1,$$

worin k_1 und K_1 nach der adoptirten Einheit gleich 1 ist.

Wir haben noch das Verhältniss der Gesammtanziehung G an den Polen der längsten Axe zu den Einheiten G_1 und k_1 zu untersuchen.

Bei constanter Dichtigkeit und variabler Energie findet das Maximum der Fallgeschwindigkeit statt bei $\lambda = \lambda_1 = 1{,}3946$ und $V = 0{,}18711$, das Minimum bei $\lambda_1 = \infty$. Es ist nämlich für diesen Fall

$$G_1 = B_1 + \omega_1^2 c_1 = -2\pi f \varrho_1 \frac{(1+\lambda^2)\, arctan\, \lambda - \lambda}{\lambda^3} b_1 + \omega_1^2 b_1$$

und

97) $$G_1 : \omega_1^2 b_1 = 4\pi f \varrho_1 \frac{arctan\, \lambda - \lambda}{\lambda^3} = -1{,}7583,$$

mithin

$$G_1 = -1{,}7583 . k_1.$$

Für $\lambda = 0$, $\lambda_1 = \infty$ ist weiter

$$C = -4\pi f \varrho \lambda_1 c \int_0^1 \frac{u^2 \partial u}{(1 + \lambda_1^2 u^2)^{3/2}} = -4\pi f \varrho c . \frac{lognat\, \lambda_1}{\lambda_1^2}$$

$$= -2\pi f \varrho V c = -\omega^2 c = -K,$$

mithin auch

$$G = C + K = 0.$$

Bei variabler Dichtigkeit und constanter Energie wie Masse findet dagegen das Maximum von G erst bei $\varrho = \infty$ statt. Es ist nämlich

$$G = C + \omega^2 c = -4\pi f \varrho \frac{b c}{a^2} . c . \frac{\partial (\lambda_1 F)}{\partial \lambda_1} + \omega^2 c,$$

worin

$$F = \int_0^1 \frac{u^2 \partial u}{(1+\lambda^2 u^2)^{1/2} (1+\lambda_1^2 u^2)^{1/2}}$$

bedeutet. Es ist nun näherungsweise mit Vernachlässigung sehr kleiner Grössen zweiter Ordnung

$$\frac{\partial (\lambda_1 F)}{\partial \lambda_1} = \frac{lognat (\lambda_1 + \sqrt{1+\lambda_1^2})}{\lambda_1^3} - \frac{1}{\lambda_1^2 \sqrt{1+\lambda_1^2}} \left\{ 1 + \frac{\lambda^2}{4} + \dots \right\},$$

wobei λ also sehr klein, λ_1 sehr gross angenommen ist. Wegen

$$lognat (\lambda_1 + \sqrt{1+\lambda_1^2}) = lognat\, 2\lambda_1 + \frac{1}{4\lambda_1^2} + \dots$$

und

$$\sqrt{1+\lambda_1^2} = \lambda_1 \left(1 + \frac{1}{2\lambda_1^2} + \dots \right)$$

wird also sein

$$G = C + \omega^2 c = -4\pi f \varrho \lambda_1 c \left\{ \frac{lognat\, 2\lambda_1 - \left(1 + \frac{\lambda^2}{4} - \frac{3}{4\lambda_1^2}\right)}{\lambda_1^3} \right\} + \omega^2 c$$

oder

$$98)\quad \frac{G}{\omega_1^2 c_1} = \frac{\omega^2 c}{\omega_1^2 c_1} - \frac{2\pi f \varrho_1}{\omega_1^2} \cdot \frac{\varrho}{\varrho_1} \cdot \frac{c}{c_1} \left\{ \frac{2\, lognat 2\lambda_1 - 2\left(1 + \frac{\lambda^2}{4} - \frac{3}{4\lambda_1^2}\right)}{\lambda_1^2} \right\}.$$

Mit Anwendung der Relationen 83) und 89) geht diese Gleichung über in

$$99)\quad \frac{G}{k_1} = \frac{V^3}{V_1^3} \cdot \frac{\frac{[(1+\lambda^2)+(1+\lambda_1^2)]^4}{(1+\lambda^2)^{1/2}(1+\lambda_1^2)}}{\frac{[(1+L^2)+(1+L_1^2)]^4}{(1+L^2)^{1/2}(1+L_1^2)}} \cdot \left\{ \frac{\lambda_1^2 V - (2 lognat 2\lambda_1 - 2)}{\lambda_1^2 V} \right\},$$

und wenn man für V seinen Werth $[2\, lognat\, 2\, \lambda_1 - 3] : \lambda_1^2$ einsetzt und noch unendlich kleine Grössen erster Ordnung vernachlässigt:

$$100)\quad m \cdot \frac{G}{k_1} = V^2 \frac{[(1+\lambda^2)+(1+\lambda_1^2)]^4}{(1+\lambda^2)^{1/2}(1+\lambda_1^2)} \cdot \left\{ \frac{2\, lognat\, 2\, \lambda_1 - 3}{\lambda_1^2} - \frac{2\, lognat\, 2\, \lambda_1 - 2}{\lambda_1^2} \right\}.$$

Der erste Theil der rechten Seite dieser Gleichung ist der Schwungkraft K, der zweite Theil der Massenanziehung C proportional. Durch Einführung der Constanten $L = L_1 = 1{,}3946$ resultirt nunmehr

$$\frac{K}{k_1} = \frac{V^3 \lambda_1^6}{16 V_1^3 (1+L_1^2)^{3/2}}, \quad \frac{C}{k_1} = \frac{-V^3 \lambda_1^6 - V^2 \lambda_1^4}{16\, V_1^3 (1+L_1^2)^{3/2}}.$$

Mithin ist

$$\frac{G}{k_1} = \frac{C+K}{k_1} = -\frac{V^2 \lambda_1^4}{16\, V_1^3 (1+L_1^2)^{3/2}}.$$

Alle drei Werthe sind unendlich gross, so jedoch, dass

$$C : K = 1, \quad G : C = G : K = 0$$

bleibt. Bei dem Ell. (γ) wird mithin die Gesammtanziehung am Pole der Axe zuletzt unendlich gross, während sie bei dem Ell. (γ) stets endlich bleibt und für $\varrho = \infty$ in Null übergeht.

Da die Resultate vorstehender Untersuchungen in ihrer Beziehung zum Erdball ein specielles Interesse darbieten, so möge noch eine Uebersicht über die Axenverhältnisse und Excursionen der für den der Erde zukommenden Werth $V_e = 0{,}00229971$ möglichen Gleichgewichtsfiguren folgen.

I. $a = 1$, $b = c = 1{,}00433441$ [Rotationsellipsoid (α)].
$b = c = 680{,}49$. [Rotationsellipsoid (β).]
$b = 1{,}00231337$, $c = 52{,}4346$. [Jacobi'sches Ellipsoid (γ).]

II. $a = \infty$, $b = c = 1$. [Unendlicher Kreiscylinder.]
$b = 1$, $c = 867{,}68$. [Unendlicher elliptischer Cylinder.]
$\frac{1}{2}(r + r_1) = 1$, $r - r_1 = 0{,}002291$. [Unendlicher Hohlcylinder.]
$\frac{1}{2}(r + r_1) = 1$, $r - r_1 = 0{,}002291$, $\frac{1}{2}(R + R_1) = \sqrt{6}$, $R - R_1 = 0{,}00375$.
[Zwei coaxiale Hohlcylinder von gleicher Rotation, $M_1 : M = 4$.]

III. $a = 1$, $b = 1{,}0039$, $r = 33{,}359$. [Ring (α) ohne Centralkörper.]
$b = 242{,}0$, $r = 243{,}2$. [Ring (β) ohne Centralkörper.]

IV. $a = 1$, $b = 1{,}0092$, $r = 6{,}619 R$. [Ring (α) mit grossem Centralkörper in grossem Abstande.]
$b = 289{,}89$, $r = 6{,}619 R$. [Ring (β) mit grossem Centralkörper in grossem Abstande.]

V. $a = 1$, $b = 1{,}0017$, $c = 1{,}0107$, $r = 4{,}169$. [System zweier gleicher Jacobi'scher Ellipsoide (γ) mit gleicher Rotation und Revolutionsdauer.]

VI. $a = 1$, $b = 1{,}0017$, $c = 1{,}0170$, $r = 6{,}619 R$.
$b = 1{,}00115$, $c = 26{,}8$, $r = 6{,}619 R$. [Mondfiguren oder Ellipsoide (γ) mit grossem Centralkörper in grossem Abstande.]

XIV.

Analytische und geometrische Auflösung einiger photometrischer Probleme und ein neues Photometer.

Von

Jos. Wesely in Prag.

(Hierzu Taf. III, Fig. 1—16.)

Sind zwei ungleich intensive, jedoch gleichartige Lichtquellen (resp. Lichtpunkte*) I und i durch ihre Lage A und B, und ihre Intensitäten I und i gegeben, dann eine Ebene EE (weisse Fläche), und erleuchten diese Lichtpunkte in den Abständen a und b die Ebene, und man soll den geometrischen Ort (Isophotencurve) derjenigen Punkte in der Ebene EE auffinden, auf welche von beiden Lichtquellen dasselbe Lichtquantum (dieselbe relative Beleuchtung) auffällt, dann kann man, wie folgt, verfahren:

I. Auflösung durch Rechnung.

1. Sei P einer der fraglichen Punkte und wird in der Fig. 1 folgende Bezeichnung eingeführt:

$$AA_1 = a,\quad BB_1 = b,\quad A_1B_1 = c;$$
$$A_1N = x,\quad NP = y;\quad A_1P = p,\quad B_1P = q;$$
$$AP = u,\quad BP = v,$$

ferner PD senkrecht auf EE errichtet, $\sphericalangle APD = \alpha$ und $\sphericalangle DPB = \beta$ bezeichnet, so wird der Punkt P von A aus die Lichtmenge

$$\mathbf{B} = I . \frac{\cos\alpha}{u^2}$$

erhalten.

---

* Für Lichtquellen, beziehungsweise leuchtende Gasmassen, kann man in Hinsicht ihrer Wirkung auf Erleuchtung bestimmte Lichtpunkte substituiren, wie wir a. O. zeigen werden.

Die Erleuchtung des Punktes P durch B ist

$$\mathbf{b} = i \cdot \frac{\cos\beta}{v^2}.$$

Substituirt man für $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ die Werthe

$$\cos\alpha = \frac{a}{u} = \frac{a}{(a^2+p^2)^{1/2}}, \quad \cos\beta = \frac{b}{v} = \frac{b}{(b^2+q^2)^{1/2}},$$

dann ist

$$\mathbf{B} = \frac{I \cdot \frac{a}{(a^2+p^2)^{1/2}}}{a^2+p^2} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \frac{i \cdot \frac{b}{(b^2+q^2)^{1/2}}}{b^2+q^2}.$$

Soll nun der Aufgabe gemäss $\mathbf{B} = \mathbf{b}$ sein, so muss

$$\frac{I \cdot a}{(a^2+p^2)^{3/2}} = \frac{i \cdot b}{(b^2+q^2)^{3/2}}$$

werden, oder

$$\mathfrak{A}\,(b^2+q^2) = \mathfrak{B}\,(a^2+p^2),$$

wenn $\mathfrak{A} = (Ia)^{2/3}$ und $\mathfrak{B} = (ib)^{2/3}$ gesetzt wird, sonach

1) $$\mathfrak{A}\,q^2 - \mathfrak{B}\,p^2 = \mathfrak{C},$$

wenn

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{B}\,a^2 - \mathfrak{A}\,b^2$$

bedeutet.

Die Gleichung 1) ist die bipolare Gleichung des gesuchten geometrischen Ortes.

Auf rechtwinklige Coordinaten bezogen, ist

$$p^2 = x^2 + y^2 \text{ und } q^2 = (c-x)^2 + y^2,$$

daher die Gleichung 1) in folgende übergeht:

$$x^2 + y^2 - 2 \cdot \frac{\mathfrak{A}\,c}{\mathfrak{A}-\mathfrak{B}} \cdot x = \frac{\mathfrak{C} - \mathfrak{A}\,c^2}{\mathfrak{A}-\mathfrak{B}}.$$

Dies ist aber eine allgemeine Gleichung des Kreises, dessen Radius

2) $$\mathfrak{R} = \frac{1}{\mathfrak{A}-\mathfrak{B}} \cdot \sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\,c^2 + (\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\,\mathfrak{C}}$$

ist, und dessen Abscisse des Mittelpunktes

3) $$\mathfrak{x} = \frac{\mathfrak{A}\,c}{\mathfrak{A}-\mathfrak{B}}$$

ist. Setzt man

4) $$k = \sqrt[3]{\frac{I}{i} \cdot \frac{a}{b}}$$

in die Gleichungen 2) und 3) ein, so können diese Gleichungen auch in folgender Gestalt geschrieben werden:

5) $$\mathfrak{R} = \frac{1}{k^2-1} \cdot \sqrt{k^2c^2 + (k^2-1)(a^2-k^2b^2)},$$

6) $$\mathfrak{x} = \frac{k^2 c}{k^2-1}.$$

Die Aufgabe ist somit aufgelöst; denn alle Strahlen, welche von beiden Lichtquellen ausgehen und dieselben Punkte der Kreisperipherie vom Radius $\mathfrak{R}$ treffen, erfüllen die gegebenen Bedingungen. Die Isophotencurve ist demnach ein Kreis.

2. Für $a=b$ wird AB parallel zu EE, und sodann geht $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}_1$, ξ in ξ_1 und k in k_1 über, welche Grössen durch die Gleichungen

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{1}{I^{2/3} - i^{2/3}} \sqrt{(Ii)^{2/3}.c^2 - a^2.(I^{2/3} - i^{2/3})^2},$$

7) $$k_1 = \sqrt[3]{\frac{I}{i}},$$

8) $$\mathfrak{R}_1 = \frac{1}{k_1^2 - 1} \sqrt{k_1^2 c^2 - a^2 (k_1^2 - 1)^2},$$

9) $$\xi_1 = \frac{k_1^2 c}{k_1^2 - 1}$$

gegeben erscheinen.

3. Nun ist auch

$$\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{b}} = \frac{I}{i} \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \cdot \frac{v^2}{u^2}$$

und für $\mathbf{B} = \mathbf{b}$

$$\frac{u^2}{v^2} = \frac{I}{i} \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{I}{i} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{v}{u}$$

oder

$$u = v \cdot \sqrt[3]{\frac{I.a}{i.b}},$$

10) $$u = vk.$$

Für $a=b$ geht u in u_1, v in v_1 und k in k_1 über, daher

11) $$u_1 = v_1 k_1$$

gefunden wird. Somit sind die Entfernungsverhältnisse $\frac{u}{v}, \frac{u_1}{v_1} \ldots$ constante Grössen.

4. Ist $a=b$ und soll ausserdem APB senkrecht auf der Ebene EE sein, dann findet man in diesem speciellen Falle für u_1 und v_1 folgende Relationen:

Nach Fig. 2 ist

$$c = c_1 + c_{11} \text{ und } a^2 = u_1^2 - c_1^2 = v_1^2 - c_{11}^2,$$

somit

$$(u_1 + v_1)(u_1 - v_1) = c(c_1 - c_{11}).$$

Sucht man die Werthe von $u_1 + v_1$ und $u_1 - v_1$ aus der Proportion

$$u_1 : v_1 = k_1 : 1,$$

so findet man

$$u_1 + v_1 = v_1 (k_1 + 1) \text{ und } u_1 - v_1 = v_1 (k_1 - 1),$$

daher

$$v_1^2 (k_1^2 - 1) = c(c_1 - c_{11}) = c(c - 2c_{11}) \text{ und } (a^2 + c_{11}^2)(k_1^2 - 1) = c(c - 2c_{11})$$

oder

$$c_{11}^2 + \frac{2c}{k_1^2-1} \cdot c_{11} = \frac{c^2 - a^2(k_1^2-1)}{k_1^2-1}.$$

Die Gleichung nach c_{11} aufgelöst, giebt

$$12)\qquad c_{11} = \frac{-c}{k_1^2-1} \pm \varrho,$$

und da $c_1 = c - c_{11}$ ist, so erhält man

$$13)\qquad c_1 = \frac{ck_1^2}{k_1^2-1} \mp \varrho,$$

wenn

$$14)\qquad \varrho = \frac{1}{k_1^2-1} \cdot \sqrt{c^2k_1^2 - a^2(k_1^2-1)^2}$$

ist.

Nach einer der früheren Gleichungen ist

$$v_1^2 = \frac{c(c-2c_{11})}{k_1^2-1} \quad \text{und} \quad v_1 = \pm\sqrt{\frac{c(c-2c_{11})}{k_1^2-1}}.$$

Substituirt man den Werth für c_{11} aus den Gleichungen 12) und 14) in die Gleichung für v_1, dann ist

$$15)\qquad v_1 = \pm\frac{1}{k_1^2-1}\sqrt{c^2(k_1^2+1) \mp 2c\sqrt{c^2k_1^2 - a^2(k_1^2-1)^2}},$$

somit, da $u_1 = v_1 k_1$ ist, wird

$$16)\qquad u_1 = \pm\frac{k_1}{k_1^2-1}\sqrt{c^2(k_1^2+1) \mp 2c\sqrt{c^2k_1^2 - a^2(k_1^2-1)^2}}.$$

Das k_1 ist aus der Gleichung 7) zu bestimmen und der Werth in 16) und 17) einzusetzen. Somit ist u_1 und v_1 durch sämmtliche bekannte Grössen ausgedrückt und die Aufgabe daher aufgelöst.

Aus den Gleichungen 12) und 13) ist ersichtlich, dass man für c_{11} und c_1 je zwei verschiedene Werthe findet, je nachdem man das obere oder untere Zeichen nimmt.

Soll die Wurzel reell sein, dann muss $c^2k_1^2$ gleich oder grösser sein als $a^2(k_1^2-1)^2$ oder

$$17)\qquad a \overline{\gtrless} \frac{ck_1}{k_1^2-1}.$$

Für

$$18)\qquad a = \frac{ck_1}{k_1^2-1}$$

erhält man blos je einen Werth für c_1 und c_{11}. Für

$$19)\qquad a > \frac{ck_1}{k_1^2-1}$$

sind c_1 und c_{11} und somit auch u_1 und v_1 imaginär.

II. 1. Constructiv lassen sich diese Aufgaben viel einfacher und eleganter auflösen, als durch Rechnung, wenn man nämlich von der Gleichung 10):

$$u = vk,$$

ausgeht und dieselbe in Form einer Proportion schreibt:

20) $$u : v = k : 1.$$

Theilt man demnach die Entfernung AB (Fig. 1) durch C in dem Verhältnisse wie $k:1$, dann hat man blos P in der Ebene EE so zu suchen, dass CP im Dreiecke ABP den Winkel zwischen u und v halbirt; denn für

$$\gamma = \sphericalangle \frac{APB}{2}$$

ist

$$u : v = AC : BC = k : 1$$

und

21) $$\frac{AC}{BC} = \frac{k}{1} = \sqrt[3]{\frac{I.a}{i.b}}.$$

Somit hat man zwischen A und B den Punkt C so zu bestimmen, dass folgenden Gleichungen Genüge geleistet wird:

$$AC = AB \cdot \frac{k}{k+1} \quad \text{und} \quad BC = AB \cdot \frac{1}{k+1},$$

was entweder durch Rechnung oder constructiv gefunden werden kann.

Um die Punkte P, P_1, P_{11} ... in der Ebene EE zu finden, erinnert man sich weiter auf einen Satz der Geometrie, dahin lautend:

> „Die Geraden, welche in einem Dreiecke einen Winkel und dessen Nebenwinkel halbiren, theilen die gegenüberliegende Seite innen und aussen nach dem Verhältniss der den Winkel einschliessenden Seiten“

oder:

> „Die Halbirungslinie eines Winkels und das Perpendikel darauf theilen diesen Winkel harmonisch“,

und weiter:

> „Die Punkte, deren Abstände von zwei gegebenen Punkten ein gegebenes Verhältniss haben, liegen auf dem Kreise, der die Strecke der gegebenen Punkte innen und aussen nach dem gegebenen Verhältniss normal schneidet.“

Bekanntlich heisst die Theilung einer Strecke innen und aussen nach demselben Verhältnisse eine Theilung derselben in proportionale Segmente oder eine harmonische Theilung derselben.

Construirt man demnach den zu C harmonisch liegenden Punkt E bezüglich AB, dann ist CE der Durchmesser des besagten Kreises K, auf dem die gesuchten Punkte P, P_1 ... liegen müssen. (Fig. 3.)

Da diese Kreisperipherie an keine anderen Bedingungen geknüpft ist, so kann ihre Ebene einen beliebigen Winkel mit der Ebene EE bilden, wenn nur die Lage des Durchmessers CE dabei nicht geändert wird; daher müssen auch durch jeden Punkt der durch CE als Durchmesser geleg-

ten Kugeloberfläche alle Apolloniuskreise gehen, welche alle Punkte von der fraglichen Beschaffenheit enthalten.

Sucht man nun den Durchschnitt der Kugel vom Diameter CE mit der Ebene EE auf, dann erhält man die Kreisfläche $\mathfrak{K}$ vom Halbmesser $\mathfrak{R}$, auf deren Peripherie die verlangten Punkte vom constanten Entfernungsverhältniss liegen.

Die Construction ist in Fig. 5 ausgeführt, so zwar, dass der Kreis $\mathfrak{K}$ aus der auf die Papierebene senkrechten Ebene EE in die Papierebene um gelegt worden ist.

Ist z. B. $\frac{I}{i}=\frac{4}{1}$, $\frac{a}{b}=\frac{2}{1}$, $c=3$, mithin $\mathfrak{A}=4$, $\mathfrak{B}=1$, ferner $\mathfrak{C}=0$, dann ist $k=2$, $\mathfrak{R}=2$ und $\xi=4$, welches Rechnungsresultat mit dem durch Construction gefundenen genau übereinstimmt. (Fig. 6 a.)

Ist $\frac{I}{i}=\frac{8}{1}$, $\frac{a}{b}=\frac{1}{1}$, $c=3$, dann ist $k_1=2$, $\mathfrak{R}_1=\sqrt{3}=1{,}732$ und $\xi_1=4$.

Die $\sqrt{3}$ (Fig. 4b) wird constructiv dadurch gefunden, dass man auf eine Strecke die Einheit viermal neben einander aufträgt, aus dem Mittelpunkte derselben mit dem Halbmesser 2 einen Halbkreis beschreibt und im dritten Theilstrich ein Perpendikel errichtet, dessen Länge durch die Kreisperipherie begrenzt, die verlangte $\sqrt{3}$ giebt.

2. Construirt man nun diejenigen Punkte P, P_1 ... für $a=b$, welche in der auf EE senkrechten Ebene $ABPP_1$ liegen (siehe I, 4), dann ist einleuchtend, dass die Kreisperipherie K die Ebene EE entweder in zwei Punkten schneidet oder blos in einem Punkte berührt, oder endlich gar nicht schneidet, je nachdem der Halbmesser $CO=r$ grösser, gleich oder kleiner ist als die Entfernung a.

Nun ist

$$r=\frac{CB+BE}{2} \quad \text{und} \quad \frac{k_1}{1}=\frac{AE}{BE}=\frac{c+BE}{BE},$$

sonach

$$BE=\frac{c}{k_1-1}, \text{ folglich } r=\tfrac{1}{2}\left(1+\frac{c}{k_1-1}\right)=\frac{k_1}{k_1-1}.$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner des rechten Theiles der Gleichung mit (k_1+1), so erhält man

$$r=\frac{ck_1}{k_1^2-1},$$

eine Gleichung, die wir schon früher als 18) erhalten haben.

3. Für $I=i$ und $a=b$ ist $k_1=1$, somit $r=c.\frac{1}{1-1}=\infty$ und $AC=CB$, demnach der zu C harmonisch liegende Punkt E in unendlicher Entfernung, und der Kreis übergeht mithin in eine durch C gehende, auf der Ebene EE senkrechte Gerade T. Ist jedoch die Aufgabe nicht an die Bedingung geknüpft, dass $ACBP$ senkrecht auf der Ebene EE sein soll, dann ist evident,

dass die Kugel in eine auf EE senkrechte unendliche Ebene übergeht. Für beide Fälle ist $u_1 = v_1$. (Fig. 5.)

4. Ist die Ebene EE parallel zu AB und APB senkrecht auf EE, dann ist der Durchmesser $2\mathfrak{R}_1$ des Kreises $\mathfrak{K}$ (Fig. 6):

$$2\mathfrak{R}_1 = c_{11} + \mathfrak{c}_{11}$$
$$= -\frac{c}{k_1^2 - 1} + \varrho + \frac{c}{k_1^2 - 1} + \varrho,$$
$$2\mathfrak{R}_1 = 2\varrho,$$

daher

$$\mathfrak{R}_1 = \varrho = \frac{1}{k_1^2 - 1}\sqrt{c^2 k_1^2 - a^2 (k_1^2 - 1)^2},$$

was auch aus den beiden Gleichungen 8) und 14) zu ersehen ist.

Ferner ist die Erleuchtung je zweier Punkte dieses Kreises $\mathfrak{K}$, und zwar der Punkte m und m_1, n und n_1, o und o_1 etc. eine gleiche. Denkt man sich A als die Spitze eines geraden Kegels, dessen halbe Oeffnung an der Basis A_1P ist, so wird wegen Gleichheit aller u_1 und der zugehörigen Incidenzwinkel der in der Ebene EE verzeichnete Kreis K_{u_1} dieselbe Intensität haben, wie der mit dem Halbmesser B_1P beschriebene K_{v_1}, folglich sind K_{u_1} und K_{v_1} zwei Isophoten (Linien gleicher Lichtintensität).

Ebenso finden wir K'_{u_1} und K'_{v_1} als zwei zugehörige Isophoten von einer andern relativen Erleuchtung.

5. Soll das Verhältniss der Lichtmengen $\frac{I}{i}$ bestimmt werden für den Fall, dass die durch den Punkt C gezogene Linie CP parallel wird zu a oder b, und P durch I und i gleich intensiv erleuchtet wird (Fig. 7), dann verlängere man a nach a_1, mache $a = a_1$ und verbinde A_{11} mit B, sodann schneidet $A_{11}B$ die Ebene EE in P. Nun entspricht die durch P zu a gezogene Parallele der fraglichen Bedingung, sobald

$$\frac{I}{i} = \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^3$$

und $p + q = c$, $k + 1 = AB$ ist, also auch

$$\frac{I}{i} = \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{k}{1}\right)^3.$$

Ist ausserdem $a = b$, dann ist

$$\frac{I}{i} = \left(\frac{p}{q}\right)^3 = \left(\frac{k_1}{1}\right)^3 \text{ und } I = i \cdot k_1^3$$

z. B.

Für

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2}, \quad AB = 3, \quad \text{ist } k = 2 \text{ und } \frac{I}{i} = \frac{1}{2} \cdot 2^3 = 4.$$

Dieser Fall ist in Fig. 6 dargetellt.

Für $a = b$ und $k_1 = 2$, oder $AB = 3$ ist

$$\frac{I}{i} = 8.$$

6. Weiter ist einleuchtend, dass man statt der Ebene EE jede krumme Oberfläche, jede ebene Curve oder Gerade nehmen kann und auf dieser die Punkte gleicher Erleuchtung durch I und i findet, wenn man den Durchschnitt besagter Apolloniuskugeloberfläche mit dem betreffenden geometrischen Gebilde sucht.

7. Nehmen wir nun den Fall an, dass die beiden Lichtquellen I und i in den beiden Brennpunkten einer Ellipse liegen (Fig. 8), sodann suchen wir C und dann das zugehörige E ähnlich wie früher, indem wir von der Gleichung ausgehen:

$$\frac{I \cdot \cos\gamma}{u^2} = \frac{i \cdot \cos\gamma}{v^2}, \quad \text{daher} \quad \frac{I}{i} = \left(\frac{u}{v}\right)^2$$

und

$$u = v\sqrt{\frac{I}{i}} \quad \text{oder} \quad u = v \cdot k_{11},$$

$$IC : Ci = k_{11} : 1,$$

und finden, indem wir den Kreis K verzeichnen, die Punkte P und P_1 von der bereits öfter berührten Beschaffenheit.

In diesem Falle sind EP und EP_1 zugleich Tangenten an die Ellipse. Für $I = i$ wird $k_{11} = 1$, daher fällt C mit O_1, dem Mittelpunkte der Ellipse zusammen, und E liegt daher unendlich weit entfernt; somit geht der Apolloniuskreis in die unendlich verlängerte kleine Axe T der Ellipse über, welche die Curve in $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ schneidet. (Fig. 8.) Dieselbe Constante k_{11} gilt für ein Rotationsellipsoid, entstanden durch Umdrehung der Ellipse um die Axe Ii, wenn I und i in dessen Brennpunkten sich befinden; der Kreis K übergeht sodann in die Apolloniuskugel von demselben Durchmesser CE, und der Durchschnitt dieser Kugel mit dem Ellipsoid ist ein Kreis $\mathfrak{K}$ vom Durchmesser PP_1, welcher in der Fig. 8 in die Zeichnungsebene umgelegt worden ist.

8. Für eine Parabel, welche im Brennpunkte die eine Lichtquelle i und in unendlicher Entfernung die zweite Lichtquelle I (z. B. Normalöllampe und Sonne) enthält, muss für Punkte gleicher Erleuchtung (Fig. 9)

$$u = v \cdot k_{11} = v \cdot \sqrt{\frac{I}{i}}$$

sein, daher abermals

$$IC : Ci = k_{11} : 1,$$

und P und P_1 sind daher die fraglichen Punkte.

k_{11} gilt auch für ein Rotationsparaboloid und der Durchschnitt der Apolloniuskugel K, nämlich die Kreisperipherie $\mathfrak{K}$ vom Durchmesser PP_1, leistet der Aufgabe Genüge.

9. Es sind zwei auf die Zeichnungsfläche senkrechte Ebenen E und E$_1$ gegeben und in A die Lichtquelle I, deren Lage durch a und b (Fig. 10) fixirt ist; man soll Punkte von E und E$_1$ finden, welche durch I gleich intensiv erleuchtet werden.

Der Aufgabe gemäss muss

$$\frac{I \cdot \cos\alpha}{u^2} = \frac{I \cdot \cos\beta}{v^2} \text{ und } \left(\frac{u}{v}\right)^2 = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta};$$

ausserdem ist

$$\cos\alpha = \frac{a}{u} \text{ und } \cos\beta = \frac{b}{v},$$

somit

$$\left(\frac{u}{v}\right)^3 = \frac{a}{b} \text{ und } \frac{u}{v} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}.$$

Setzt man

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = k_3,$$

dann hat die Gleichung die Form

$$u = k_3 \cdot v.$$

Für $a = b$ ist $k_3 = 1$ und daher

$$u = v.$$

Z. B. für $\frac{a}{b} = 8$ ist $u = 2v$; theilt man demnach a in zwei gleiche Theile, mache also $Ao = o1$, ziehe durch o eine Parallele Q zu E und sodann die Strahlen 1, 2, 3, 4, 5..., 9..., so erhält man $1_1, 2_1, 3_1, 4_1, 5_1 \ldots, 9_1 \ldots$ durch Construction von Kreisschaaren (beziehungsweise Kugelschaaren) auf die in der Fig. 11 angedeutete Weise. Allgemein sind daher unendlich viele Auflösungen möglich, da man zur Bestimmung einer Gleichung mit zwei Unbekannten hier blos eine einzige Gleichung aufstellen kann. Wählt man demnach u zwischen den Werthen $u = a$ bis $u = A5$, und $u = a$ bis $u = \infty$, dann findet man die zugehörigen v.

Bei der allgemeinen Auflösung bestimme man k_3 graphisch, trage es von A auf a auf, ebenso die zu Grunde gelegte Einheit $Ao = 1$, und construire wie früher.

10. Sind drei lothrechte Ebenen E_1, E_2 und E_3 gegeben, deren senkrechter Durchschnitt ein Dreieck ist, und innerhalb derselben in A eine Lichtquelle I (Fig. 12), deren bezügliche Entfernungen von den Ebenen a_1, a_2 und a_3 sind; man soll die Punkte gleicher Erleuchtung finden. — Dann muss zwischen den gegebenen Grössen folgende Gleichung bestehen:

$$\frac{\cos\alpha_1}{u_1^2} = \frac{\cos\alpha_2}{u_2^2} = \frac{\cos\alpha_3}{u_3^2} = \frac{B}{I} = Const.,$$

wenn B die Erleuchtung in den einzelnen Punkten und I wiederum die Lichtmenge bedeutet, welche I aussendet.

Nun ist

$$\cos\alpha_1 = \frac{a_1}{u_1}, \quad \cos\alpha_2 = \frac{a_2}{u_2}, \quad \cos\alpha_3 = \frac{a_3}{u_3} \ldots,$$

daher

$$\frac{a_1}{u_1^3} = \frac{a_2}{u_2^3} = \ldots = \frac{B}{I} = Const.,$$

Reese Library of the University of California

demnach

$$u_1 = \sqrt[3]{\frac{a_1}{Const.}},\quad u_2 = \sqrt[3]{\frac{a_2}{Const.}},\quad u_3 = \sqrt[3]{\frac{a_3}{Const.}} \ldots$$

oder

$$u_1 : u_2 : u_3 : \ldots = \mathfrak{k}_1 : \mathfrak{k}_2 : \mathfrak{k}_3 : \ldots .$$

Die Constante ist ein echter Bruch, der einen beliebigen Werth haben kann, daher die Aufgabe unbestimmt.

Ist z. B. $a_1 = 1$, $a_2 = 8$ und $a_3 = 27$, ferner die Constante gleich $\frac{1}{8}$, dann ist $\frac{B}{I} = \frac{1}{8}$ und somit

$$u_1 = 2,\ u_2 = 4,\ u_3 = 6 \text{ oder } u_1 : u_2 : u_3 = 1 : 2 : 3.$$

III. Die früher aufgestellten Formeln

$$u = vk,\quad k = \sqrt[3]{\frac{Ia}{ib}} \quad\text{und}\quad u_1 = v_1 k_1,\quad k_1 = \sqrt[3]{\frac{I}{i}}$$

oder

$$\left(\frac{u}{v}\right)^3 \frac{b}{a} = \frac{I}{i},\quad\text{ferner}\quad \left(\frac{u_1}{v_1}\right)^3 = \frac{I}{i}$$

können die Grundlage zur Zusammenstellung eines neuen Photometers bilden, und zwar entweder eines Schattenphotometers (ähnlich dem Rumford'schen) oder eines Fettfleckphotometers (ähnlich dem Bunsen'schen).

1. Man braucht nur in einer sogenannten optischen Rinne R einen senkrecht auf derselben stehenden weissen Papierschirm S (weisse Wand), vor dem ein undurchsichtiges Stäbchen s, etwas dicker als ein Bleistift (matt schwarz angestrichen), vertical aufgestellt wird, auf einem Holzklötzchen H befestigt, verschiebbar anzubringen. (Fig. 13a—f.)

In einer zweiten Rinne R_1, die entweder unter einem beliebigen Winkel zur ersteren geneigt oder parallel zu derselben aufgestellt werden kann, befinden sich zwei verschiebbare Tischchen (Holzklötzchen) T und T_1 mit auf dem Blatt gezeichneten concentrischen Ringen, welche Tischchen, insoweit es nämlich die Länge der Rinne gestattet, in beliebige Entfernung von einander gestellt, die beiden Lichtquellen I und i tragen, und zwar ist in i die Normalflamme (z. B. Deleuil-Carcel'sche Normalöllampe, welche in einer Stunde 42 Gramm raffinirten Rüböls verzehrt, oder eine 8er Stearinkerze drei Minuten nach dem Anzünden) und in I die mit derselben zu vergleichende Lichtquelle. Die beiden Flammen (resp. die Mittelpunkte der beiden Lichtmassen) werden soviel als thunlich in gleichen Höhen über den Tischplättchen aufgestellt und der Papierschirm so lange in der Richtung der augenscheinlich schwächeren Lichtquelle i verschoben, bis die von s auf den Schirm S, und zwar von I und i geworfenen Schatten dem Auge gleich dunkel erscheinen. Sodann werden die Entfernungen u, v, a und b, oder beziehungsweise u_1 und v_1, gemessen, ihre Werthe (in der-

selben Längeneinheit ausgedrückt) in die Gleichung für $\frac{I}{i}$ eingesetzt und daraus I durch einfache Rechnung gefunden.

Anstatt des Stäbchens s kann auch ein mit Stearin und Wachs, oder, noch besser, mit Paraffin und Wachs (nach K. W. Zenger) getränkter schmaler Streifen (circa 4^{mm} breit) nn_1 des Papierschirmes S, der durch eine undurchsichtige Scheidewand w in zwei gleiche Hälften getheilt wird, benützt werden. Dann hat blos das in O situirte und vergleichende Auge des Beobachters diejenige mögliche Stellung von P ausfindig zu machen, bei der die Hälften n und n_1 dem Auge gleich intensiv erscheinen.

Diese Art und Weise der Anordnung des Schattenphotometers liefert, wie meine Versuche gezeigt haben, bedeutend genauere praktische Resultate, weil sie den von der Theorie verlangten Bedingungen mehr entspricht, als z. B. die Lichtintensitätsbestimmung mit dem Rumford'schen Photometer, bei welchem stillschweigend vorausgesetzt wird, dass die Lichtstrahlen der zu prüfenden Lichtquellen senkrecht auf den Papierschirm auffallen, was jedoch in den seltensten Fällen zu erreichen möglich ist.

2. Eine andere Anordnung wird durch folgendes Schema klar: L und L_1 sind zwei um ein Charnier bei C drehbare Lineale, die eine beliebige, jedoch unter sich gleiche Theilung (z. B. in Centimeter) besitzen, und zwar vom Anfangspunkte o aus aufgetragen. Ferner ein drittes Lineal TT_1 mit dem Charnier C so verbunden, dass die Kante desselben gg_1 durch o hindurchgeht (Fig. 14), und endlich der Schirm S mit seinem Stifte s in fester Verbindung mit TT_1, und zwar so, dass die Ebene der weissen Papierwand, resp. ihre horizontale Trace, mit gg_1 zusammenfällt. Auf den beiden Linealen (Latten) L und L_1 sind verschiebbare Platten A und B angebracht, ähnlich den Zieltafeln bei Nivellirlatten, mit concentrischen Ringen versehen und mit einem Ausschnitte in der Mitte, der ein genaues Ablesen des Mittelpunktes dieser Scheibe, von o aus gerechnet, ermöglicht. Endlich als Beigabe ein rechtwinkliges Lineal MN von einer in der Figur angedeuteten Form, dessen eine Kathete dieselbe Theilung trägt, wie jene der Lineale L und L_1.

Da bei dieser Vorrichtung der Papierschirm fix bleibt und die beiden zu prüfenden Lichtquellen, die auf A und B gestellt werden, eine zweifache Bewegung haben können, nämlich einmal im Kreise und das zweitemal längs einer Geraden (des Lineals), so hat man sodann blos die Stellung von i und I für gleiche Beleuchtung durch Beobachtung ausfindig zu machen, die Distanzen u, v, a und b an den Linealen abzulesen und diese Werthe in die Gleichung für die Lichtintensität $I = i \cdot \left(\frac{u}{v}\right)^2 \cdot \frac{b}{a}$ * einzusetzen.

---

* Natürlich muss der Versuch, um Fehlerquellen möglichst zu eliminiren, zweimal ausgeführt werden in der Weise, dass man die als Einheit angenommene Licht-

IV. Die in I und II geführten theoretischen Auseinandersetzungen galten blos für leuchtende Punkte. Anders gestaltet sich die Aufgabe, wenn wir es mit leuchtenden Gasmassen zu thun haben.

Die auf ein Flächenelement df_1 fallende Quantität des Lichtes für einen Lichtpunkt ist

$$q = \frac{J_1 . df_1 . \cos i}{u^2},$$

wenn i den Incidenzwinkel, J_1 die Erleuchtungsintensität des leuchtenden Punktes und u die Entfernung desselben von df_1 bedeutet. Substituirt man für $\cos i$ den Werth $\frac{a}{u}$, wo a die senkrechte Entfernung des Lichtpunktes von df_1 ausdrückt, so ist

$$q = J_1 . df_1 . \frac{a}{u^3},$$

und wenn B die Lichtstärke der beleuchteten Fläche bedeutet, dann ist

1.*) $$B = \frac{q}{df_1} = J_1 . \frac{a}{u^3}.$$

Hat man es jedoch mit einem leuchtenden Körper zu thun, der vollkommen durchsichtig ist und dessen Brechungsexponent sich nicht merklich von der Einheit unterscheidet, so ist die Lichtmenge q_1 eines Volumelementes dv des leuchtenden Körpers (resp. einer Gasmasse V) auf ein Flächenelement df_1

$$q_1 = \frac{J . dv . df_1 . \cos i}{u^2}.$$

Für die von der ganzen Masse zugesandte Lichtmenge ist

$$Q = df_1 \, \Sigma \frac{(J . \cos i . dv)}{u^2}.$$

Eine glühende Gasmasse oder ein mit glühenden Moleculen ausgefüllter Raum kann annäherungsweise als ein solcher Körper betrachtet werden, von der Heterogenität und der Undurchsichtigkeit abgesehen.

Wird die Beleuchtung einer Ebene E durch eine ausserhalb derselben in der Entfernung a liegende Flamme (Gas-, Oel- oder Kerzenflamme etc.) betrachtet, so ist I die Lichtstärke der durch die Gasmasse V beleuchteten Fläche

$$I = \frac{Q}{df_1} = \Sigma \frac{(J . \cos i . dv)}{u^2},$$

wenn J die Lichtstärke von dv in der Entfernung 1, dv, i und u die frühere Bedeutung haben. Denken wir uns die Dimensionen des Volums V der leuchtenden Gasmasse — im Vergleiche zu der Entfernung u von der

quelle beidemal mit denjenigen Lichtquellen vergleicht, deren Intensität, entweder bezogen auf die Einheit, angegeben werden soll, oder deren Lichtmengen, eine durch die andere ausgedrückt, zu bestimmen sind.

Ebene — gering, so können wir ohne merklichen Fehler annehmen, dass die von der ganzen Flamme ausgehenden Lichtstrahlen das Element df_1 unter nahezu gleichen Incidenzwinkeln treffen und dass u für alle Volumelemente der Gasmasse fast dasselbe ist, daher

$$\mathrm{I} = J \cdot \frac{a}{u^3} \Sigma dv,$$

2*) $$\mathrm{I} = J \cdot V \frac{a}{u^3}.$$

Stellen wir uns vor, wir substituiren für die Gasmasse einen leuchtenden Punkt von einer solchen Lichtstärke J_1, dass die Lichtintensitäten des beleuchteten Flächenelements in beiden Fällen dieselben sind, dass also

$$B = J_1 \cdot \frac{a}{u^3} = \mathrm{I}$$

wird, so muss die Lichtstärke des ideellen Punktes

$$J_1 = J \cdot V$$

sein, demnach

$$\mathrm{I} = J_1 \cdot \frac{a}{u^3}$$

[nach der Gleichung 2*)].

Nennen wir die Lichtstärke im Fusspunkte von A (dessen Entfernung a ist) J_2, dann ist

$$J_1 = J_2 \cdot a^2,$$

daher

3*) $$\mathrm{I} = J_2 \cdot \frac{a^3}{u^3}$$

und für eine andere Lichtquelle

4*) $$i = i_2 \frac{b^3}{v^3}.$$

Für $\mathrm{I} = i$ muss

$$\frac{J_2}{i_2} = \left(\frac{u}{v}\right)^3 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^3 \quad \text{oder} \quad \frac{u}{v} = \frac{a}{b} \cdot \sqrt[3]{\frac{J_2}{i_2}} \quad \text{oder} \quad u = v \cdot x,$$

eine Gleichung von der Form, wie wir sie bereits für zwei leuchtende Punkte erhalten haben.

Haben wir es also mit einer in der Luft befindlichen leuchtenden Gasmasse zu thun, die vollkommen durchsichtig ist und merklich denselben Brechungsexponenten, wie die sie umgebende Luft besitzt, dann stimmen die Bedingungen mit jenen überein, die für die Flammen gelten, deren wir uns zur Beleuchtung bedienen.

V. Versuche.

Mit einem leidlich improvisirten Photometer nach Anordnung III, 1, wurde durch gütige Erlaubniss des Prof. K. W. Zenger der Versuch im physikalischen Cabinet des königl. Polytechnikums den 13. Juli 1870 in Ge-

meinschaft mit Prof. Zenger und dessen Assistenten J. Weber gemacht und dabei so genau, als es nur bei einer solchen provisorischen Zusammenstellung möglich ist, verfahren.

Erster Versuch. Die zu vergleichenden Lichtquellen waren:

Eine Deleuil-Carcel'sche Normalöllampe und eine Paraffinkerze. Die Lichtstärkebestimmung geschah durch Rumford's Schattenvergleichung unter Zugrundelegung meiner Berechnung.

Als Entfernungen für gleiche Beleuchtung fand man:

$$u = 92{,}75^{mm}, \quad v = 49{,}50^{mm},$$

daher für die Aufstellung des weissen Papierschirmes parallel zu AB das Verhältniss

$$\frac{I}{i} = \left(\frac{u}{v}\right)^2 = (1{,}87)^2 = 6{,}54.$$

Zweiter Versuch. Dieselben zwei Lichtquellen wie in 1, und Zenger's Differentialphotometer (beschrieben in den Mittheilungen des Architekten und Ingenieurvereins für Böhmen, Jahrg. 1870). Als constante Lichtquelle diente eine Petroleumlampe mit flachem Dochte. Als Entfernungen für das Verschwinden des Fettflecks fand man

88 und 38,

daher

$$\left(\tfrac{88}{38}\right)^2 = (2{,}58)^2 = 6{,}656 = \frac{I}{i}.$$

Dritter Versuch. Dieselben zwei Lichtquellen wie in 1, verglichen nach der üblichen Rumford'schen Methode. Entfernungen vom Schirm:

115 und 49,

daher

$$\left(\tfrac{115}{49}\right)^2 = (2{,}35)^2 = 5{,}52 = \frac{I}{i}.$$

Es beträgt demnach die Differenz:

zwischen Zenger's u. Rumford's Photometermessung	1,136	oder	17,07 %,
„ Zenger's „ Wesely's „	0,116	„	1,74 %,
„ Wesely's „ Rumford's „	1,020	„	15,59 %.

Die Versuche 1 und 2 dürften demnach auch vom experimentellen Standpunkte aus meine Methode der Lichtintensitätsbestimmung als eine richtige kennzeichnen.

Wie natürlich, müssen während des Versuches gewisse Bedingungen erfüllt werden, wenn man über die Gleichheit oder Ungleichheit zweier Erleuchtungen sicher urtheilen will. Kann man eine Ungleichheit nicht erkennen, indem man das Auge vorwärts und zurück bewegt, dann können wir versichert sein, dass ihre Helligkeiten gleich sind.

Was nun die bei meiner Beobachtungsmethode auftretende ungleiche Breite der durch die Lichtquellen am weissen Schirme erzielten Schatten

anlangt, so wirkt dieselbe auf die Vergleichung der gleichen Dunkelheit derselben nicht im Mindesten störend, wie die Versuche zur Genüge gezeigt haben.

Bei denselben wurden die beiden Schatten dadurch verglichen, dass man sie durch eine 6 Zoll lange, mattschwarze Röhre aus Pappe beobachtete, und zwar so, damit das Auge zuerst die Mitte zwischen den beiden Schatten fixire.

Endlich sei zum Gelingen des Versuches noch Folgendes erwähnt:

Die senkrechte Entfernung des weissen Schirmes von den beiden Lichtquellen muss bekanntlich nach den früheren theoretischen Auseinandersetzungen eine bestimmte sein, falls der Ort gleicher Erleuchtung nicht imaginär werden soll. Man muss daher den Versuch dem entsprechend anstellen.

Für a fanden wir die Gleichung 17):

$$a \gtreqless \frac{c k_1}{k_1^2 - 1}.$$

Nimmt man c (die Entfernung der beiden Lichtquellen) zur Einheit an und bedenkt man weiter, dass in der Praxis die Verhältnisszahl $\frac{I}{i} = 27$ selten überschritten wird, dann hat man für

$$k_1 = \sqrt[3]{\frac{I}{i}} = \sqrt[3]{27} = 3 \quad \text{und} \quad a \gtreqless \tfrac{3}{8} \,. c \gtreqless 0{,}375 . c;$$

für $\frac{I}{i} = 6$ ist

$$k_1 = 1{,}82 \quad \text{und} \quad k_1^2 - 1 = 2{,}31, \quad \text{daher} \quad a \gtreqless 0{,}79 . c;$$

für $\frac{I}{i} = 2$ ist

$$k_1 = 1{,}26 \quad \text{und} \quad k_1^2 - 1 = 0{,}59, \quad \text{daher} \quad a \gtreqless 2{,}13 . c.$$

Man ersieht hieraus, dass, je grösser das Verhältniss der Lichtintensität ist, desto näher der Schirm gegen AB gerückt werden muss, damit der Versuch gelinge.

VI. Für eine Parabel (siehe II, 8) erhielten wir

$$u = \pm v k_{11} \quad \text{und} \quad IC : Ci = k_{11} : 1.$$

Wir wollen nun sehen, inwiefern sich dieser specielle Fall dazu benützen lässt, die absolute Lichtintensität der Sonne zu bestimmen.

Nach Wollaston's Versuchen ist das Verhältniss der Erleuchtung durch Sonne und Vollmond $\frac{Q}{q} = 5563 . 144 = 801072$, im Mittel aus zwölf Beobachtungen genommen, zu welchem Resultate er durch Vergleichung der Schatten gelangte.

Bouguer fand wiederum, dass das Sonnenlicht auf der Erde dem von 11664 Wachskerzen in der Entfernung von 16 französischen Zollen oder

von 5774 Wachskerzen in der Entfernung von 1 englischen Fuss gleichkomme.*

Für die Erleuchtung durch Vollmond fand Lambert nur ungefähr 0,02577 $\doteq \frac{1}{40}$ der Erleuchtung durch eine Talgkerze in der Entfernung von 1 par. Fuss; Wollaston hingegen fand dafür $\frac{1}{144}$, und zwar für eine Entfernung der Talgkerzenflamme von 1 engl. Fuss.

Nicht ohne Werth ist die Wollaston'sche Bestimmung der Erleuchtungsverhältnisse durch Sonne und Vollmond, nämlich

$$\frac{Q}{q} = 5563 \,.\, 144 = 801072,$$

nach der die Erleuchtung durch Sonne gleichkommt jener durch 5563 Kerzen in der Entfernung von 1 engl. Fuss.

Nennen wir die mittlere Sonnenferne u und nehmen die im Brennpunkte der Parabel aufgestellte Lichtquelle (Normallichtquelle) als Lichtstärkeeinheit an, dann ist die absolute Lichtintensität der Sonne

$$I = i \,.\, \left(\frac{u}{v}\right)^2 \quad \text{oder} \quad I = \left(\frac{u}{v}\right)^2.$$

Findet man das v experimentell, dann kann das I aus dieser Gleichung bestimmt werden.

Da I nach früheren Angaben — absolut auf der Sonne — gleich gefunden wird

$$5563 \,.\, (20026000 \,.\, 24345{,}82)^2 \,*$$

und

$$v = u \sqrt{\frac{i}{I}}$$

ist, so ist auch

$$v = 20026000 \,.\, 24345{,}82 \sqrt{\frac{1}{5563 \,.\, (20026000 \,.\, 24345{,}82)^2}},$$

$$v = \sqrt{\frac{1}{5563}} = \frac{1}{74{,}6} \text{ engl. Fuss} = 1{,}93 \text{ Linien engl.};$$

eine Grösse, die zu Versuchen nicht tauglich ist.

Man ersieht aus der Rechnung, dass die Bestimmungsmethode der absoluten Sonnenlichtintensität sich praktisch — unter Benutzung des von der ganzen Sonnenscheibe kommenden Lichtes — nicht ausführen lässt.

---

* Die Lichteinheit ist in unserer Quelle — Beer, Dr. A., Grundriss des photometrischen Calculs. Braunschweig, Vieweg. 1855. S. 70 und 71 — nicht näher angegeben.

** Nach: Zöllner, Dr. J. C. F., Photometrische Untersuchungen mit besonderer Rücksicht auf die physische Beschaffenheit der Himmelskörper. Leipzig, 1865, ist 1 geogr. Meile = 24345,82 engl. Fuss und der mittlere Abstand der Erde von der Sonne = 20026000 geogr. Meilen.

Experimentell realisirbar ist jedoch die Aufgabe, wenn man blos ein Sonnenlichtstrahlenbündel in eine dunkle Versuchskammer einfallen lässt. (Fig. 15.)

In diesem Falle ist nach Beer, S. 72, die Quantität des von I aus auf df_1 auffallenden Lichtes

$$Q \, . \, df_1 \, \frac{\left(\frac{\varrho}{E}\right)^2 . \sin\gamma}{tg^2 . s}$$

und die Quantität des von i aus auf df_1 auffallenden Lichtes

$$q \, . \, \frac{df_1 \sin\gamma}{e^2},$$

wenn E die Entfernung der Oeffnung, durch welche das Sonnenlicht eintritt, vom Punkte der gleichen Erleuchtung o am Schirme, e die Entfernung der Normallichtquelle von demselben Punkte o, ϱ den Halbmesser der Oeffnung, durch welche das Sonnenlichtbündel einfällt, s den scheinbaren Halbmesser der Sonne und γ das Complement des Einfallswinkels bedeutet.

Da nach Voraussetzung

$$Q . \frac{df_1 \left(\frac{\varrho}{E}\right)^2}{tg^2 s} = q . \frac{df_1}{e^2}$$

sein soll, so muss

a) $$\frac{Q}{q} = \left(\frac{E}{e}\right)^2 . \frac{tg^2 s}{\varrho^2}$$

sein.

Man hat also blos E, e und ϱ zu messen* und die Werthe in diese Gleichung einzusetzen, dann erhält man das Verhältniss $\frac{Q}{q}$.

Eine Idee, wie sich ein solches Photometer in der Wirklichkeit ausführen liesse, ist folgende:

Man construire (Fig. 16 a, b, c) zwei halbe Parabeläste PP und $P_1 P_1$ so, dass sie congruent und zu einander parallel aufgestellt sind, zugleich aber als eine Art Schlitten dienen einem rechteckigen Rahmen RR, in den ein mit Paraffin und Wachs getränktes Papier eingespannt wird, welches in seiner Mitte eine undurchsichtige Scheidewand N trägt, so dass o durch Verschiebung in diesem parabolischen Rahmen so gestellt werden kann, damit es von i und I aus solche Lichtmengen erhält, um dem Auge in O gleich erleuchtet zu erscheinen. Sodann löse man die Gleichung a), indem man die gefundenen Daten einsetzt, auf, und erhält $\frac{Q}{q}$.

---

* Nach Zöllner's photometrischen Untersuchungen etc., S. 161, ist s nach Leverrier gleich 16′0,01″ (scheinbarer Halbmesser der Sonne aus der Entfernung 20026000 Meilen) und der scheinbare Mondhalbmesser σ in der mittleren Entfernung 51803 Meilen von der Erde aus gesehen $\sigma = 15' 32''$.

Natürlich muss hier das Sonnenlichtbündel parallel zur Parabelaxe auffallen, was bei der Aufstellung des Photometers unschwer zu erreichen ist, sowie auch zweckmässiger sein dürfte, die beiden gleichen Parabelschlitten in grösseren Dimensionen verfertigen zu lassen. Der Parabelschlitten liegt während der Vergleichung entweder horizontal oder, je nach dem einfallenden Sonnenstrahlenbündel, gegen den Horizont geneigt.

Auch die Stellung des Auges muss wegen Erzielung zuverlässiger Resultate eine unveränderliche, fixirte sein.

Kleinere Mittheilungen.

XVI. Bemerkungen über einige geometrische Theoreme.

I.

Mittels einer sehr einfachen analytischen Rechnung lässt sich der folgende Satz beweisen:

> Berühren die Seiten eines constanten Winkels die Umfänge zweier Curven C_1 und C_2, so beschreibt die Spitze des Winkels eine Curve C; die Normalen zu den Curven C, C_1 und C_2 in drei entsprechenden Punkten schneiden sich in einem Punkte.

Seien x_1, y_1 und x_2, y_2 die Coordinaten zweier Punkte P_1 und P_2 der Curven C_1 und C_2, deren Tangenten den constanten Winkel $2a$ einschliessen, die Coordinaten des Schnittpunktes P der beiden Tangenten, welcher auf der Curve C liegt, sind x, y. Die Winkel, welche die Tangenten in den Punkten P, P_1, P_2 zu den Curven C, C_1, C_2 mit der Abscissenaxe bilden, sind durch $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ bezeichnet; endlich sind $\partial s, \partial s_1, \partial s_2$ die Bogenelemente der bemerkten Curven. Für die Curve C hat man

$$1)\qquad \frac{\partial x}{\partial s} = \cos\varepsilon, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = \sin\varepsilon,$$

und ähnliche Gleichungen für die Curven C_1 und C_2. Die Gleichungen der Tangenten in den Punkten P_1 und P_2 sind:

$$2)\quad (x-x_1)\sin\varepsilon_1 - (y-y_1)\cos\varepsilon_1 = 0, \quad (x-x_2)\sin\varepsilon_2 - (y-y_2)\cos\varepsilon_2 = 0.$$

Ist der Winkel, den diese Tangenten einschliessen, gleich $2a$, so hat man

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = 2a,$$

oder

$$3)\qquad \varepsilon_2 = u + a, \quad \varepsilon_1 = u - a,$$

wo u eine Unbestimmte bedeutet. Infolge dieser Gleichungen kann man x_1, y_1, x_2, y_2, also auch x, y als Functionen von u ansehen. Differentiirt man die Gleichungen 2) in Beziehung auf u, so folgt, mit Rücksicht auf die Gleichungen 1) und 3)

$$4)\quad \begin{cases} \sin(\varepsilon_1-\varepsilon)\dfrac{\partial s}{\partial u} = (x_1-x)\cos\varepsilon_1 + (y_1-y)\sin\varepsilon_1, \\ \sin(\varepsilon_2-\varepsilon)\dfrac{\partial s}{\partial u} = (x_2-x)\cos\varepsilon_2 + (y_2-y)\sin\varepsilon_2. \end{cases}$$

Die Gleichungen der Normalen zu den Curven C_1 und C_2 in den Punkten P_1 und P_2 sind

$$5)\quad (X-x_1)\cos\varepsilon_1 + (Y-y_1)\sin\varepsilon_1 = 0, \quad (X-x_2)\cos\varepsilon_2 + (Y-y_2)\sin\varepsilon_2$$

oder auch

$$(X-x)\cos\varepsilon_1 + (Y-y)\sin\varepsilon_1 = (x_1-x)\cos\varepsilon_1 + (y_1-y)\sin\varepsilon_1,$$
$$(X-x)\cos\varepsilon_2 + (Y-y)\sin\varepsilon_2 = (x_2-x)\cos\varepsilon_2 + (y_2-y)\sin\varepsilon_2,$$

d. i. nach 4)

$$(X-x)\cos\varepsilon_1 + (Y-y)\sin\varepsilon_1 = \sin(\varepsilon_1-\varepsilon)\frac{\partial s}{\partial u},$$
$$(X-x)\cos\varepsilon_2 + (Y-y)\sin\varepsilon_2 = \sin(\varepsilon_2-\varepsilon)\frac{\partial s}{\partial u}.$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit $\sin(\varepsilon_2-\varepsilon)$, die zweite mit $\sin(\varepsilon_1-\varepsilon)$ und bildet die Differenz der Producte, so folgt

$$(X-x)\cos\varepsilon + (Y-y)\sin\varepsilon = 0,$$

was die Gleichung der Normalen zur Curve C im Punkte P ist.

Entwickelt man aus 2) und 5) die Werthe von x, y, X, Y, so findet man mit Rücksicht auf 3)

$$(X+x)\sin 2a = (x_1+x_2)\sin 2a + (y_1-y_2)\cos 2a,$$
$$(Y+y)\sin 2a = -(x_1+x_2)\cos 2a + (y_1+y_2)\sin 2a.$$

Diese Gleichungen nach u differentiirt, geben

$$\sin 2a\,\frac{\partial(X+x)}{\partial u} = \sin(u+a)\frac{\partial s_1}{\partial u} - \sin(u-a)\frac{\partial s_2}{\partial u},$$
$$\sin 2a\,\frac{\partial(Y+y)}{\partial u} = -\cos(u+a)\frac{\partial s_2}{\partial u} + \cos(u-a)\frac{\partial s_1}{\partial u},$$

oder mit Rücksicht auf 3)

$$6)\quad \frac{\partial(Y+y)}{\partial(X+x)} = \frac{-\cos\varepsilon_2\dfrac{\partial s_1}{\partial u} + \cos\varepsilon_1\dfrac{\partial s_2}{\partial u}}{\sin\varepsilon_2\dfrac{\partial s_1}{\partial u} - \sin\varepsilon_1\dfrac{\partial s_2}{\partial u}}.$$

Die Mitte der Verbindungslinie des Punktes P mit dem gemeinschaftlichen Schnittpunkte der Normalen beschreibt eine Curve, deren Tangente im Punkte, dessen Coordinaten $\frac{1}{2}(X+x)$, $\frac{1}{2}(Y+y)$ sind, mit der x-Axe den Winkel w bilden möge. Die linke Seite der Gleichung 6) ist dann gleich $\tan w$. Bezeichnet man die Krümmungshalbmesser der Curven C_1 und C_2 in den Punkten P_1 und P_2 durch ϱ_1 und ϱ_2, so geben die Gleichungen 3)

$$\frac{\partial s_1}{\partial u} = \varrho_1, \quad \frac{\partial s_2}{\partial u} = \varrho_2.$$

Die Gleichung 6) geht dann über in

$$tan\, w = \frac{-\varrho_1 \cos \varepsilon_2 + \varrho_2 \cos \varepsilon_1}{\varrho_1 \sin \varepsilon_2 - \varrho_2 \sin \varepsilon_1}$$

oder

$$\frac{\cos(w-\varepsilon_1)}{\varrho_1} = \frac{\cos(w-\varepsilon_2)}{\varrho_2}.$$

Die vorstehenden Resultate lassen sich auch ziemlich einfach ableiten, wenn die beiden Curven C_1 und C_2 als Enveloppen ihrer Tangenten angesehen werden. Sind die Coordinaten ξ, η eines Punktes einer Curve Functionen von v, ist v der Winkel, welchen die Tangente in diesem Punkte mit der Abscissenaxe bildet, so kann man setzen:

$$\xi = V' \cos v + V \sin v, \quad \eta = V' \sin v - V \cos v,$$

wo V eine beliebige Function von v und $V' = \frac{\partial V}{\partial v}$ ist. Für die Curven P_1 und P_2 ist v resp. gleich ε_1 und ε_2, d. i. nach 3) gleich $u-a$ und $u+a$. Für x_1, y_1 und x_2, y_2 lassen sich also folgende Gleichungen aufstellen:

$$7) \quad \begin{cases} x_1 = \varphi'(u-a) \cos(u-a) + \varphi(u-a) \sin(u-a), \\ y_1 = \varphi'(u-a) \sin(u-a) - \varphi(u-a) \cos(u-a), \\ x_2 = \psi'(u+a) \cos(u+a) + \psi(u+a) \sin(u+a), \\ y_2 = \psi'(u+a) \sin(u+a) - \psi(u+a) \cos(u+a), \end{cases}$$

wo φ und ψ beliebige Functionen ihrer Argumente sind. Setzt man einfach $\varphi, \psi, \varphi', \psi'$ statt $\varphi(u+a)$, $\psi(u+a)$, $\varphi'(u-a)$, $\psi'(u+a)$, so lassen sich die Gleichungen 2) und 5) mittels der Gleichungen 7) auf folgende Art schreiben:

$$x \sin(u-a) - y \cos(u-a) = \varphi, \quad x \sin(u+a) - y \cos(u+a) = \psi,$$
$$X \cos(u-a) + Y \sin(u-a) = \varphi', \quad X \cos(u+a) + Y \sin(u+a) = \psi'.$$

Aus diesen Gleichungen findet man leicht

$$\frac{\partial x}{\partial u} = Y - y, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -(X - x),$$

woraus sich wieder der zu Anfang bemerkte Satz herleiten lässt.

II.

Für zwei ebene Curven existirt das Theorem:

> Bewegen sich die Endpunkte einer Geraden von constanter Länge auf den Umfängen zweier ebenen Curven C_1 und C_2, so beschreibt ein fester Punkt der Geraden eine Curve C. Die Normalen zu den Curven C, C_1 und C_2 in drei entsprechenden Punkten schneiden sich in einem Punkte.

Dieser Satz lässt sich für zwei Curven im Raume auf folgende Art ausdrücken:

> Auf den Umfängen zweier Raumcurven C_1 und C_2 bewege sich eine Gerade G von constanter Länge; ein fester Punkt derselben beschreibt eine Curve C. Die Normalebenen in drei entsprechenden Punkten der Curven C, C_1 und C_2 schneiden sich in einer Geraden.

Die kürzeste Distanz zwischen dieser Geraden und der Geraden G für die entsprechende Lage derselben bestimmt auf der Geraden G einen Punkt, welcher der Strictionslinie der windschiefen Fläche angehört, gebildet aus der Geraden G in ihren verschiedenen Lagen.

Für die Curven C_1 und C_2 seien x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 die Coordinaten zweier Punkte P_1 und P_2, deren Distanz constant gleich g_1+g_2 ist. Sind x, y, z die Coordinaten von P, so hat man die Gleichungen

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=g_1^2, \quad (x-x_2)^2+(y-y^2)^2+(z-z_2)^2=g_2^2,$$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{y-y_1}{y_2-y}=\frac{z-z_1}{z_2-z}.$$

Diese Gleichungen lassen sich durch die folgenden ersetzen:

$$\frac{x-x_1}{\cos X}=\frac{y-y_1}{\cos Y}=\frac{z-z_1}{\cos Z}=g_1, \quad \frac{x_2-x}{\cos X}=\frac{y_2-y}{\cos Y}=\frac{z_2-z}{\cos Z}=g_2$$

oder

$$1) \quad \begin{cases} x_1=x-g_1\cos X, & x_2=x+g_2\cos X, \\ y_1=y-g_1\cos Y, & y_2=y+g_2\cos Y, \\ z_1=z-g_1\cos Z, & z_2=z+g_2\cos Z. \end{cases}$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit den Gleichungen der Curven C_1 und C_2 geben zwischen x, y, z, $\cos X$, $\cos Y$, $\cos Z$ ein System von vier Gleichungen, zu denen noch die Gleichung $\cos^2 X+\cos^2 Y+\cos^2 Z=1$ tritt; man kann also sämmtliche bemerkten Quantitäten als Functionen einer Variabeln u ansehen, folglich auch die linken Seiten der Gleichungen 1). Bezeichnet man die laufenden Coordinaten durch x_0, y_0, z_0, so sind die Gleichungen der Normalebenen in den Punkten P_1 und P_2:

$$(x_0-x_1)\frac{\partial x_1}{\partial u}+(y_0-y_1)\frac{\partial y_1}{\partial u}+(z_0-z_1)\frac{\partial z_1}{\partial u}=0,$$

$$(x_0-x_2)\frac{\partial x_2}{\partial u}+(y_0-y_2)\frac{\partial y_2}{\partial u}+(z_0-z_2)\frac{\partial z_2}{\partial u}=0,$$

d. i. nach 1)

$$(x_0-x)\frac{\partial x}{\partial u}+(y_0-y)\frac{\partial y}{\partial u}+(z_0-z)\frac{\partial z}{\partial u}$$
$$=g_1\left\{(x_0-x)\frac{\partial\cos X}{\partial u}+(y_0-y)\frac{\partial\cos Y}{\partial u}+(z_0-z)\frac{\partial\cos Z}{\partial u}\right.$$
$$\left.-\cos X\frac{\partial x}{\partial u}-\cos Y\frac{\partial y}{\partial u}-\cos Z\frac{\partial z}{\partial u}\right\},$$

$$(x_0-x)\frac{\partial x}{\partial u}+(y_0-y)\frac{\partial y}{\partial u}+(z_0-z)\frac{\partial z}{\partial u}$$
$$=g_2\left\{(x_0-x)\frac{\partial\cos X}{\partial u}+(y_0-y)\frac{\partial\cos Y}{\partial u}+(z_0-z)\frac{\partial\cos Z}{\partial u}\right.$$
$$\left.-\cos X\frac{\partial x}{\partial u}-\cos Y\frac{\partial y}{\partial u}-\cos Z\frac{\partial z}{\partial u}\right\}.$$

Die beiden Normalebenen der Punkte P_1 und P_2 schneiden sich in einer Geraden, bestimmt durch die beiden vorstehenden Gleichungen oder einfacher durch die beiden folgenden:

$$2)\quad \begin{cases} (x_0-x)\dfrac{\partial x}{\partial u}+(y_0+y)\dfrac{\partial y}{\partial u}+(z_0-z)\dfrac{\partial z}{\partial u}=0, \\ (x_0-x)\dfrac{\partial \cos X}{\partial u}+(y_0-y)\dfrac{\partial \cos Y}{\partial u}+(z_0-z)\dfrac{\partial \cos Z}{\partial u} \\ =\cos X\dfrac{\partial x}{\partial u}+\cos Y\dfrac{\partial y}{\partial u}+\cos Z\dfrac{\partial z}{\partial u}. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen ist die Gleichung der Normalebene der Curve C; da die vorstehenden Gleichungen von g_1 und g_2 unabhängig sind, so folgt, dass für alle Curven C, welche beliebigen Punkten der Geraden P_1P_2 entsprechen, die Normalebenen sich in derselben Geraden schneiden. Die Gleichungen der Geraden P_1P_2 lassen sich nach 2) offenbar schreiben:

$$3)\quad \frac{x_0-x}{\cos X}=\frac{y_0-y}{\cos Y}=\frac{z_0-z}{\cos Z}.$$

Sei nun (ξ, η, ζ) der Punkt der Geraden 3), für welchen die Distanz derselben von der Geraden 2) ein Minimum ist. Es ist dann

$$4)\quad \frac{\xi-x}{\cos X}=\frac{\eta-y}{\cos Y}=\frac{\zeta-z}{\cos Z}=-\frac{\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial \cos X}{\partial u}+\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial \cos Y}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial \cos Z}{\partial u}}{\left(\dfrac{\partial \cos X}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial \cos Y}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial \cos Z}{\partial u}\right)^2}.$$

Das System der Geraden 3) bestimmt eine windschiefe Fläche, deren Strictionslinie durch die Gleichungen 4) gegeben ist. Nimmt man umgekehrt auf zwei Curven C_1 und C_2 je zwei Paare von Punkten P_1 und P_2 so an, dass die kürzeste Distanz zwischen dem Durchschnitt der Normalebenen der Punkte P_1 und P_2 und ihrer Verbindungslinie einen Punkt bestimmt, welcher der Strictionslinie der windschiefen Fläche angehört, gebildet aus den verschiedenen Verbindungslinien von P_1 und P_2, so ergeben sich zwei Lösungen, von denen eine für die Distanz P_1P_2 einen constanten Ausdruck giebt. Seien ∂s_1 und ∂s_2 die Bogenelemente der Curven C_1 und C_2. Setzt man zur Vereinfachung

$$\frac{\partial x_1}{\partial s_1}=\cos\alpha_1,\quad \frac{\partial y_1}{\partial s_1}=\cos\beta_1,\quad \frac{\partial z_1}{\partial s_1}=\cos\gamma_1,$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial s_2}=\cos\alpha_2,\quad \frac{\partial y_2}{\partial s_2}=\cos\beta_2,\quad \frac{\partial z_2}{\partial s_2}=\cos\gamma_2,$$

so ist der Durchschnitt der Normalebenen der Punkte P_1 und P_2 bestimmt durch

$$5)\quad \begin{cases} (x_0-x_1)\cos\alpha_1+(y_0-y_1)\cos\beta_1+(z_0-z_1)\cos\gamma_1=0, \\ (x_0-x_2)\cos\alpha_2+(y_0-y_2)\cos\beta_2+(z_0-z_2)\cos\gamma_2=0. \end{cases}$$

Ist (ξ, η, ζ) der Punkt der kürzesten Distanz auf der Geraden

$$6)\quad \frac{x_0-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y_0-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z_0-z_1}{z_2-z_1}$$

von der Geraden 5), so hat man die Gleichungen

$$7)\qquad \xi = h_1 x_1 + h_2 x_2, \quad \eta = h_1 y_1 + h_2 y_2, \quad \zeta = h_1 z_1 + h_2 z_2,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$8)\quad \left\{\begin{aligned} & h_1 = \frac{\Phi_1^2 - \Phi_1 \Phi_2 \cos\psi}{\Phi_1^2 + \Phi_2^2 - 2\Phi_1 \Phi_2 \cos\psi}, \quad h_2 = \frac{\Phi_2^2 - \Phi_1 \Phi_2 \cos\psi}{\Phi_1^2 + \Phi_2^2 - 2\Phi_1 \Phi_2 \cos\psi}, \\ & h_1 + h_2 = 1, \\ & \Phi_1 = (x_2 - x_1)\cos\alpha_1 + (y_2 - y_1)\cos\beta_1 + (z_2 - z_1)\cos\gamma_1, \\ & \Phi_2 = (x_2 - x_1)\cos\alpha_2 + (y_2 - y_1)\cos\beta_2 + (z_2 - z_1)\cos\gamma_2, \\ & \cos\psi = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2. \end{aligned}\right.$$

Setzt man weiter

$$9)\qquad \Delta^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,$$

sieht s_1 und s_2 als Functionen einer Variabeln u an, so geben die Gleichungen 7), mit Rücksicht auf 8) und 9):

$$10)\quad \left\{\begin{aligned} & \Delta\left\{\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\frac{x_2 - x_1}{\Delta} + \frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\frac{y_2 - y_1}{\Delta} + \frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\frac{z_2 - z_1}{\Delta}\right\} \\ & = \left(h_1 \frac{\partial s_1}{\partial u}\cos\psi + h_2 \frac{\partial s_2}{\partial u}\right)\frac{\partial s_2}{\partial u} - \left(h_1 \frac{\partial s_1}{\partial u} + h_2 \frac{\partial s_2}{\partial u}\cos\psi\right)\frac{\partial s_1}{\partial u} \\ & - \frac{h_1 \Phi_1 \frac{\partial s_1}{\partial u} + h_2 \Phi_2 \frac{\partial s_2}{\partial u}}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial u}. \end{aligned}\right.$$

Nun ist nach 8) und 9)

$$\Delta\frac{\partial\Delta}{\partial u} = \Phi_2 \frac{\partial s_2}{\partial u} - \Phi_1 \frac{\partial s_1}{\partial u}.$$

Substituirt man in 10) für h_1 und h_2 ihre Werthe aus 9), so folgt, mit Rücksicht auf die vorstehende Gleichung:

$$\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\frac{x_2 - x_1}{\Delta} + \frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\frac{y_2 - y_1}{\Delta} + \frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\frac{z_2 - z_1}{\Delta}$$

$$= \frac{\partial\Delta}{\partial u} \cdot \frac{(\Phi_1 - \Phi_2\cos\psi)(\Delta^2 - \Phi_1^2)\frac{\partial s_1}{\partial u} + (\Phi_2 - \Phi_1\cos\psi)(\Delta^2 - \Phi_2^2)\frac{\partial s_2}{\partial u}}{\Delta^2\{\Phi_1^2 + \Phi_2^2 - 2\Phi_1\Phi_2\cos\psi\}}.$$

Ist nun (ξ, η, ζ) ein Punkt der Strictionslinie der windschiefen Fläche, gebildet aus den Geraden 6), so verschwindet die linke Seite der vorstehenden Gleichung; es ist dann also $\frac{\partial\Delta}{\partial u} = 0$, d. h. die Distanz $P_1 P_2$ ist constant, oder

$$11)\quad (\Phi_1 - \Phi_2\cos\psi)(\Delta^2 - \Phi_1^2)\frac{\partial s_1}{\partial u} + (\Phi_2 - \Phi_1\cos\psi)(\Delta^2 - \Phi_2^2)\frac{\partial s_2}{\partial u} = 0.$$

Man kann der vorstehenden Gleichung noch eine wesentlich verschiedene Form geben durch Betrachtung der windschiefen Fläche, gebildet aus den Verbindungslinien je zweier entsprechenden Punkte der Curven C_1 und C_2. Auf der Generatrix bestimmt durch die Winkel X, Y, Z, seien v_1 und v_2 die Distanzen zweier Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) vom Punkte (ξ, η, ζ) der Strictionslinie. Es finden dann die Gleichungen statt:

$$
12)\quad \begin{cases} x_1=\xi+v_1\cos X, & x_2=\xi+v_2\cos X, \quad \varDelta.\cos X=x_2-x_1,\\ y_1=\eta+v_1\cos Y, & y_2=\eta+v_2\cos Y, \quad \varDelta.\cos Y=y_2-y_1,\\ z_1=\zeta+v_1\cos Z, & z_2=\zeta+v_2\cos Z, \quad \varDelta.\cos Z=z_2-z_1.\end{cases}
$$

Das Bogenelement der Strictionslinie werde durch ∂s bezeichnet, ferner sei θ der Winkel, unter welchem die Curve die Generatrix schneidet. Zur Vereinfachung ist gesetzt:

$$
\left(\frac{\partial\cos X}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\cos Y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\cos Z}{\partial u}\right)^2=\left(p\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2.
$$

Die Gleichungen 12) geben

$$
13)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial u}=\cos\alpha_1\dfrac{\partial s_1}{\partial u}=\dfrac{\partial\xi}{\partial u}+\dfrac{\partial v_1}{\partial u}\cos X+v_1\dfrac{\partial\cos X}{\partial u},\\ \dfrac{\partial x_2}{\partial u}=\cos\alpha_2\dfrac{\partial s_2}{\partial u}=\dfrac{\partial\xi}{\partial u}+\dfrac{\partial v_2}{\partial u}\cos X+v_2\dfrac{\partial\cos X}{\partial u}.\end{cases}
$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen

$$
\frac{\partial\xi}{\partial u}\cos X+\frac{\partial\eta}{\partial u}\cos Y+\frac{\partial\zeta}{\partial u}\cos Z=\cos\theta\frac{\partial s}{\partial u},
$$

$$
\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\cos X}{\partial u}+\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial\cos Y}{\partial u}+\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\cos Z}{\partial u}=0
$$

erhält man aus 13) und vier analogen Gleichungen

$$
\left(\frac{\partial s_1}{\partial u}\right)^2=\left(\cos\theta\frac{\partial s}{\partial u}+\frac{\partial v_1}{\partial u}\right)^2+(p^2v_1^2+\sin^2\theta)\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2,
$$

$$
\left(\frac{\partial s_2}{\partial u}\right)^2=\left(\cos\theta\frac{\partial s}{\partial u}+\frac{\partial v_2}{\partial u}\right)^2+(p^2v_2^2+\sin^2\theta)\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2,
$$

$$
\cos\psi\frac{\partial s_1}{\partial u}\frac{\partial s_2}{\partial u}=\left(\cos\theta\frac{\partial s}{\partial u}+\frac{\partial v_1}{\partial u}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial s}{\partial u}+\frac{\partial v_2}{\partial u}\right)+(p^2v_1v_2+\sin^2\theta)\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2,
$$

$$
\frac{\Phi_1}{\varDelta}\frac{\partial s_1}{\partial u}=\cos\theta\frac{\partial s}{\partial u}+\frac{\partial v_1}{\partial u},\quad \frac{\Phi_2}{\varDelta}\frac{\partial s_2}{\partial u}=\cos\theta\frac{\partial s}{\partial u}+\frac{\partial v_2}{\partial u}.
$$

Mittels der vorstehenden Gleichungen findet man

$$
\frac{\Phi_1-\Phi_2\cos\psi}{\varDelta\left(\dfrac{\partial s}{\partial u}\right)^2}\frac{\partial s_1}{\partial u}\left(\frac{\partial s_2}{\partial u}\right)^2
$$

$$
=\left(\cos\theta\frac{\partial s}{\partial u}+\frac{\partial v_1}{\partial u}\right)(p^2v_2^2+\sin^2\theta)-\left(\cos\theta\frac{\partial s}{\partial u}+\frac{\partial v_2}{\partial u}\right)(p^2v_1v_2+\sin^2\theta),
$$

$$
\frac{\Phi_2-\Phi_1\cos\psi}{\varDelta\left(\dfrac{\partial s}{\partial u}\right)^2}\left(\frac{\partial s_1}{\partial u}\right)^2\frac{\partial s_2}{\partial u}
$$

$$
=-\left(\cos\theta\frac{\partial s}{\partial u}+\frac{\partial v_1}{\partial u}\right)(p^2v_1v_2+\sin^2\theta)+\left(\cos\theta\frac{\partial s}{\partial u}+\frac{\partial v_2}{\partial u}\right)(p^2v_1^2+\sin^2\theta),
$$

$$
\left(1-\frac{\Phi_1^2}{\varDelta^2}\right)\left(\frac{\partial s_1}{\partial u}\right)^2=(p^2v_1^2+\sin^2\theta)\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2,
$$

$$
\left(1-\frac{\Phi_2^2}{\varDelta^2}\right)\left(\frac{\partial s_2}{\partial u}\right)^2=(p^2v_2^2+\sin^2\theta)\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2.
$$

Hierdurch geht die Gleichung 11) über in

$$14)\qquad \frac{\cos\theta\frac{\partial s}{\partial u}+\frac{\partial v_1}{\partial u}}{\sin^2\theta+p^2 v_1^2}\,v_1=\frac{\cos\theta\frac{\partial s}{\partial u}+\frac{\partial v_2}{\partial u}}{\sin^2\theta+p^2 v_2^2}\,v_2.$$

Man kann die vorstehende Gleichung auch direct herleiten, wenn man die Elemente zu Hilfe nimmt, welche bei der Lehre von den windschiefen Flächen von Bedeutung sind; umgekehrt ist die Rechnung nicht ohne Weitläufigkeiten zur Herleitung der Gleichung 11) aus der Gleichung 14). Um eine einfache Anwendung der Gleichung 11) zu geben, seien die Curven C_1 und C_2 zwei Geraden. Die kürzeste Distanz werde zur Axe der z, ihre Mitte zum Anfangspunkt der Coordinaten genommen; projicirt man die beiden Geraden auf die xy-Ebene, so sei die Axe der x die Halbirungslinie des Winkels $2a$, welchen die Projectionen einschliessen. Bedeutet k eine Constante, so hat man

$$\frac{x_1}{\cos a}=\frac{y_1}{\sin a}=w_1,\quad z_1=-k,\qquad \frac{x_2}{\cos a}=\frac{y_2}{-\sin a}=w_2,\quad z_2=k.$$

Nimmt man also $\partial s_1=\partial w_1$, $\partial s_2=\partial w_2$, so folgt

$$\cos\alpha_1=\cos a,\quad \cos\beta_1=\sin a,\quad \cos\gamma_1=0,$$
$$\cos\alpha_2=\cos a,\quad \cos\beta_2=-\sin a,\quad \cos\gamma_2=0,$$

und hieraus

$$\Phi_1=w_2\cos 2a-w_1,\quad \Phi_2=w_2-w_1\cos 2a,\quad \cos\psi=\cos 2a,$$
$$\Delta^2=w_1^2+w_2^2-2w_1w_2\cos 2a+4k^2.$$

Die Differentialgleichung 11) wird einfach

$$15)\qquad \frac{w_1\,\partial w_1}{(2k)^2+w_1^2\sin^2 2a}=\frac{w_2\,\partial w_2}{(2k)^2+w_2^2\sin^2 2a}.$$

Die Gleichungen 7) geben

$$(w_1^2+w_2^2-2w_1w_2\cos 2a)\,\xi=\{w_1^3+w_2^3-w_1w_2(w_1+w_2)\cos 2a\}\cos a,$$
$$(w_1^2+w_2^2-2w_1w_2\cos 2a)\,\eta=\{w_1^3-w_2^3-w_1w_2(w_1-w_2)\cos 2a\}\sin a,$$
$$(w_1^2+w_2^2-2w_1w_2\cos 2a)\,\zeta=k(w_2^2-w_1^2).$$

Für einen Punkt (x, y, z) der Generatrix der windschiefen Fläche hat man die Gleichungen

$$\frac{x-x_1}{x-x_2}=\frac{y-y_1}{y-y_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\quad\text{oder}\quad \frac{x-w_1\cos a}{x-w_2\cos a}=\frac{y-w_1\sin a}{y+w_2\sin a}=\frac{z+k}{z-k}.$$

Hieraus findet man

$$w_1\frac{\sin a\cos a}{k}=\frac{x\sin a+y\cos a}{z-k},\qquad w_2\frac{\sin a\cos a}{k}=\frac{x\sin a-y\cos a}{z+k}.$$

Da nun nach 15)

$$\frac{(2k)^2+w_1^2\sin^2 2a}{(2k)^2+w_2^2\sin^2 2a}=Const.,$$

so ist die Gleichung der gesuchten Fläche

$$\frac{1+\left(\frac{x \sin a + y \cos a}{z-k}\right)^2}{1+\left(\frac{x \sin a - y \cos a}{z+k}\right)^2} = Const.$$

Mit Beziehung auf den zu Anfang bemerkten Satz ist noch ein besonderer Fall zu erwähnen, wenn eine der Curven C_1 oder C_2 eine orthogonale Trajectorie der Generatricen der windschiefen Fläche ist, auf welcher die Curven liegen; man findet leicht, dass beide Curven gleichzeitig die Generatricen orthogonal schneiden müssen, indem ihre Normalebenen die Generatricen selbst enthalten. Es ist selbstverständlich, dass die Curven C_1 und C_2 nicht mehr willkürlich sein können, da für zwei correspondirende Punkte derselben zwei Bedingungsgleichungen stattfinden; es verschwinden nämlich die unter 8) mit Φ_1 und Φ_2 bezeichneten Quantitäten.

III.

Das in II für zwei ebene Curven angeführte Theorem lässt sich auf folgende Art auf die Kugelfläche übertragen:

Sei k der Radius der Kugelfläche, ferner seien x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 die Coordinaten der Punkte P_1 und P_2 zweier sphärischen Curven C_1 und C_2. Der Bogen eines grössten Kreises, welcher die Punkte P_1 verbindet, möge eine constante Länge haben. Auf diesem Bogen werde ein fester Punkt P angenommen, dessen Coordinaten x, y, z seien. Ist O der Mittelpunkt der Kugelfläche, so setze man

$$\angle P_1 O P = p + q, \quad \angle P O P_2 = p - q,$$

wo p und q constante Grössen sind. Es ist dann

$$1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} x^2 + y^2 + z^2 = k^2, & x x_1 + y y_1 + z z_1 = k^2 \cos(p+q), \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = k^2, & x x_2 + y y_2 + z z_2 = k^2 \cos(p-q), \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = k^2, & x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = k^2 \cos 2p. \end{array} \right.$$

Da die Ebene, welche die Punkte P, P_1, P_2 enthält, durch den Mittelpunkt der Kugelfläche, d. h. durch den angenommenen Anfangspunkt der Coordinaten geht, so ist auch

$$2) \quad \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Die vorstehende Gleichung ist offenbar nur eine Folge der Gleichungen 1), wovon man sich leicht überzeugt durch Bildung des Quadrates der Determinante 2).

Zu den Gleichungen 1) treten noch zwei Gleichungen

$$\varphi_1(x_1, y_1, z_1) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_2(x_2, y_2, z_2) = 0$$

für die Curven C_1 und C_2. Man kann also die neun Coordinaten x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2, zwischen denen acht Gleichungen stattfinden, als

Functionen einer Variabeln u ansehen. Die Gleichung 2) lässt sich ersetzen durch

3) $$x = g_1 x_1 + g_2 x_2, \quad y = g_1 y_1 + g_2 y_2, \quad z = g_1 z_1 + g_2 z_2,$$

wo g_1 und g_2 näher zu bestimmende Grössen sind. Die Gleichungen 3) resp. mit x_1, y_1, z_1 multiplicirt und addirt, geben

4) $$\cos(p+q) = g_1 + g_2 \cos 2p.$$

Multiplicirt man die Gleichungen 3) resp. mit x_2, y_2, z_2, bildet die Summe der Producte, so folgt

$$\cos(p-q) = g_1 \cos 2p + g_2.$$

Aus der vorstehenden Gleichung und 4) findet man

$$g_1 \sin 2p = \sin(p-q), \quad g_2 \sin 2p = \sin(p+q).$$

Die erste Gleichung 3) wird hierdurch

$$x \sin 2p = x_1 \sin(p-q) + x_2 \sin(p+q),$$

oder

$$\sin 2p = \sin(p+q+p-q) = \sin(p+q) \,.\, \cos(p-q) + \sin(p-q) \cos(p+q)$$

gesetzt:

$$\{x \cos(p+q) - x_1\} \sin(p-q) + \{x \cos(p-q) - x_2\} \sin(p+q) = 0,$$

d. i.

$$\frac{x \cos(p+q) - x_1}{\sin(p+q)} = \frac{x_2 - x \cos(p-q)}{\sin(p-q)}.$$

Auf ähnliche Art lassen sich aus 3) folgende Gleichungen herstellen:

$$\frac{x \cos(p+q) - x_1}{\sin(p+q)} = \frac{x_2 - x \cos(p-q)}{\sin(p-q)} = k \cos X,$$

$$\frac{y \cos(p+q) - y_1}{\sin(p+q)} = \frac{y_2 - y \cos(p-q)}{\sin(p-q)} = k \cos Y,$$

$$\frac{z \cos(p+q) - z_1}{\sin(p+q)} = \frac{z_2 - z \cos(p-q)}{\sin(p-q)} = k \cos Z,$$

wo $\cos X$, $\cos Y$, $\cos Z$ Unbestimmte sind. Die vorstehenden Gleichungen geben:

5) $$\left\{\begin{aligned} x_1 &= x \cos(p+q) - k \sin(p+q) \cos X, \\ x_2 &= x \cos(p-q) + k \sin(p-q) \cos X, \\ y_1 &= y \cos(p+q) - k \sin(p+q) \cos Y, \\ y_2 &= y \cos(p-q) + k \sin(p-q) \cos Y, \\ z_1 &= z \cos(p+q) - k \sin(p+q) \cos Z, \\ z_2 &= z \cos(p-q) + k \sin(p-q) \cos Z. \end{aligned}\right.$$

Da nach 1)

$$x x_1 + y y_1 + z z_1 = k^2 \cos(p+q),$$

so erhält man, wenn für x_1, y_1, z_1 ihre Werthe aus 5) substituirt werden:

6) $$x \cos X + y \cos Y + z \cos Z = 0.$$

Bildet man ferner aus 5) $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$, welche Summe nach 1) gleich k^2 ist, so folgt mit Rücksicht auf 6):

7) $$\cos^2 X + \cos^2 Y + \cos^2 Z = 1.$$

Die Gleichungen der sphärischen Normalen zu den Curven C_1 und C_2 in den Punkten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 sind

$$x_0 \frac{\partial x_1}{\partial u} + y_0 \frac{\partial y_1}{\partial u} + z_0 \frac{\partial z_1}{\partial u} = 0, \quad x_0 \frac{\partial x_2}{\partial u} + y_0 \frac{\partial y_2}{\partial u} + z_0 \frac{\partial z_2}{\partial u} = 0.$$

Mittels der Gleichungen 5) findet man

$$\left\{ x_0 \frac{\partial x}{\partial u} + y_0 \frac{\partial y}{\partial u} + z_0 \frac{\partial z}{\partial u} \right\} \cos(p+q)$$
$$- k \left\{ x_0 \frac{\partial \cos X}{\partial u} + y_0 \frac{\partial \cos Y}{\partial u} + z_0 \frac{\partial \cos Z}{\partial u} \right\} \sin(p+q) = 0,$$
$$\left\{ x_0 \frac{\partial x}{\partial u} + y_0 \frac{\partial y}{\partial u} + z_0 \frac{\partial z}{\partial u} \right\} \cos(p-q)$$
$$+ k \left\{ x_0 \frac{\partial \cos X}{\partial u} + y_0 \frac{\partial \cos Y}{\partial u} + z_0 \frac{\partial \cos Z}{\partial u} \right\} \sin(p-q) = 0.$$

Diese Gleichungen geben unmittelbar

$$8) \quad x_0 \frac{\partial x}{\partial u} + y_0 \frac{\partial y}{\partial u} + z_0 \frac{\partial z}{\partial u} = 0, \quad x_0 \frac{\partial \cos X}{\partial u} + y_0 \frac{\partial \cos Y}{\partial u} + z_0 \frac{\partial \cos Z}{\partial u} = 0.$$

Variiren die Punkte P_1 und P_1, so ist dieses auch mit dem Punkte P der Fall, welcher dann eine Curve C beschreibt. Die erste der Gleichungen 8) ist offenbar die Gleichung der Normalebene im Punkte P der Curve C. Aus dem Vorstehenden folgt:

Bewegen sich die Endpunkte des Bogens eines grössten Kreises auf den Umfängen zweier sphärischen Curven C_1 und C_2, so beschreibt ein fester Punkt des Bogens eine dritte Curve C. Die sphärischen Normalen der Curven C, C_1 und C_2 in drei entsprechenden Punkten schneiden sich in einem Punkte.

Sind x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 in Functionen zweier Variabeln φ_1 und φ_2 gegeben, so hat man zur Bestimmung von x, y, z die Gleichungen

$$9) \quad \left\{ \begin{array}{c} x \sin 2p = x_1 \sin(p-q) + x_2 \sin(p+q), \\ y \sin 2p = y_1 \sin(p-q) + y_2 \sin(p+q), \\ z \sin 2p = z_1 \sin(p-q) + z_2 \sin(p+q), \\ x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = k^2 \cos 2p. \end{array} \right.$$

Seien die Curven C_1 und C_2 grösste Kreise, deren Ebenen sich in der Axe der z schneiden. Die Halbirungslinie des Winkels $2a$, welchen die beiden Kreise einschliessen, werde der Axe der x parallel genommen. Man hat dann die Gleichungen

$$y_1 = x_1 \tan g a, \quad y_2 = - x_2 \tan g a$$

oder

$$x_1 = k \cos a \sin \varphi_1, \quad y_1 = \quad k \sin a \sin \varphi_1, \quad z_1 = k \cos \varphi_1,$$
$$x_2 = k \cos a \sin \varphi_2, \quad y_2 = - k \sin a \sin \varphi_2, \quad z_2 = k \cos \varphi_2.$$

Hierdurch gehen die Gleichungen 9) über in

$$
10)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{x \sin 2p}{k} &= \cos a \sin(p-q) \sin\varphi_1 + \cos a \sin(p+q) \sin\varphi_2, \\
\frac{y \sin 2p}{k} &= \sin a \sin(p-q) \sin\varphi_1 - \sin a \sin(p-q) \sin\varphi_2, \\
\frac{z \sin 2p}{k} &= \qquad \sin(p-q) \cos\varphi_1 + \qquad \sin(p+q) \cos\varphi_2, \\
& \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos 2a \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = \cos 2p.
\end{aligned}
\right.
$$

Die letzte der vorstehenden Gleichungen zeigt unmittelbar, dass die Winkel φ_1 und φ_2 als Amplituden genommen werden können, deren Argumente die Summe und die Differenz zweier Quantitäten sind, von denen eine variabel ist. Um Verwechselungen zu vermeiden, setze man in den Gleichungen 10) links k_0 statt k und bezeichne wie gewöhnlich durch k den Modul der elliptischen Functionen. Nimmt man

$$\varphi_1 = am\,(b+u),\ \varphi_2 = am\,(b-u),$$

so erhält man für $a > p$ und $am\,b = \alpha$

$$\sin a = \frac{\Delta(\alpha)}{\sqrt{1-k^2 \sin^4\alpha}},\quad \cos a = \frac{k \sin\alpha \cos\alpha}{\sqrt{1-k^2 \sin^4\alpha}},$$

$$\sin p = \frac{\sin\alpha\, \Delta(\alpha)}{\sqrt{1-k^2 \sin^4\alpha}},\quad \cos p = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-k^2 \sin^4\alpha}}.$$

Setzt man zur Abkürzung $am\,u = \varphi$, so geben die Gleichungen 10)

$$\frac{x}{k_0} = \frac{\cos q \,.\, k \sin^2\alpha \cos\varphi\, \Delta(\varphi) - \sin q\, k \cos^2\alpha \,.\, \sin\varphi}{1 - k^2 \sin^2\alpha \sin^2\varphi},$$

$$\frac{y}{k_0} = \frac{\cos q\, \Delta^2(\alpha) \sin\varphi - \sin q \cos\varphi\, \Delta(\varphi)}{1 - k^2 \sin^2\alpha \sin^2\varphi},$$

$$\frac{z}{k^0} = \frac{\cos q \sqrt{1-k^2 \sin^4\alpha} \,.\, \cos\varphi + \sin q \sqrt{1-k^2 \sin^4\alpha} \,.\, \sin\varphi\, \Delta(\varphi)}{1 - k^2 \sin^2\alpha \sin^2\varphi}.$$

Für den Fall, dass die Curven C_1 und C_2 zwei kleine Kreise sind, scheint sich keine einfache Lösung zu ergeben.

Göttingen. ENNEPER.

XVII. Zur Theorie der Involutionen höherer Grade.

In dem Aufsatze „Ueber Involutionen höherer Grade", Crelle, Bd. 72, habe ich einen Satz in rein geometrischer Weise nachgewiesen, welcher Involutionen beliebiger Grade betrifft und folgendermassen lautet:

„Befindet sich auf einem Kegelschnitte eine Punktinvolution n^{ten} Grades, so umhüllen die Verbindungslinien entsprechender Punkte eine Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Classe."

Da es mir fast scheinen möchte, dass dieser Satz in manchen, die höheren Involutionen betreffenden Untersuchungen von einiger Nützlichkeit sein könnte, so will ich mir erlauben, hier in aller Kürze einen alge-

braischen Beweis folgen zu lassen. Es sei T_2 der als Träger einer Punktinvolution n^{ten} Grades auftretende Kegelschnitt und a_1, a_2 zwei entsprechende Punkte der Involution, d. h. zwei Punkte, welche einer und derselben Gruppe angehören; dann ist $\overline{a_1 a_2}$ eine Tangente der Involutionscurve, deren Classenzahl angiebt, wieviele Mal die Gerade $\overline{a_1 a_2}$ durch einen beliebigen Punkt p der Kegelschnittsebene hindurchgeht. Die durch p gehenden Strahlen bestimmen aber auf T_2 bekanntlich eine quadratische Punktinvolution, so dass also die Classenzahl der Involutionscurve zugleich die Zahl der Elementenpaare ist, welche eine quadratische Involution mit einer Involution n^{ten} Grades gemein hat. Diese Zahl findet sich jedoch sehr einfach mittels der Grundgleichungen der beiden Involutionen, welche wir uns jetzt unbeschadet der Allgemeinheit unserer Aufgabe als Involutionen in einem Grundgebilde erster Stufe denken können. Hierbei wollen wir jedes Element des Grundgebildes, in welchem die beiden Involutionen auftreten, mittels seines Theilverhältnisses auf die beiden Doppelelemente der quadratischen Involution beziehen.

Sind nun a_1, a_2 die Theilverhältnisse zweier, einer Gruppe der Involution n^{ten} Grades angehöriger Elemente, so besteht zwischen ihnen eine Relation

$$F(a_1, a_2) = 0,$$

welche in beiden Theilverhältnissen symmetrisch und in beiden vom Grade $(n-1)$ ist. (Vergl. den Aufsatz: „Erzeugung algebraischer Curven durch projectivische Involutionen" im 3. Bande der Math. Annalen von Clebsch und Neumann.) Das Werthepaar a_1, a_2 wird gleichzeitig einem Elementenpaare der quadratischen Involution angehören, wenn $a_1 = -a_2$ ist. Setzt man in obiger Gleichung $a_1 = -a_2$, so ergiebt sich für a_2 offenbar eine Gleichung $2(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, welche $(n-1)$ Paare gleicher entgegengesetzt bezeichneter Wurzeln liefert. Jedes solche Wurzelpaar gehört einem Paare von Elementen an, welche gleichzeitig in beiden Involutionen einander entsprechen.

Es hat also eine Involution n^{ten} Grades mit einer quadratischen Involution $(n-1)$ Elementenpaare gemein, womit denn auch unser anfangs ausgesprochener Satz erwiesen ist.

Mailand, 1871. Dr. E. Weyr.

XVIII. Ueber rationale Raumcurven.

Es sei C eine rationale, d. h. Punkt für Punkt auf eine Gerade beziehbare Raumcurve n^{ter} Ordnung. Vier Punkte $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$ derselben, welche in einer und derselben Ebene liegen, müssen selbstverständlich einer gewissen Bedingung Genüge leisten, welche wir zum Ausgangspunkte der Betrachtungen dieser kurzen Mittheilung machen wollen.

Wenn wir den Parameter eines Punktes der Curve C ebenso, wie den Punkt selbst bezeichnen, so wird zwischen $x_1\,x_2\,x_3\,x_4$ eine Gleichung bestehen, welche wir durch $F(x_1 x_2 x_3 x_4)=0$ darstellen wollen. Diese Gleichung muss selbstverständlich in den vier Variabeln symmetrisch sein, und da drei Punkte der Curve eine Ebene bestimmen, welche die Curve in weiteren $(n-3)$ Punkten schneidet, so erkennt man, dass $F=0$ in jedem der vier Parameter vom $(n-3)^{\text{ten}}$ Grade sein muss.

Setzt man $x_3=x_2=x_1$, so wird die Ebene der vier Punkte zur Schmiegungsebene im Punkte x_1; da nun die Gleichung $F=0$ in x_1 vom Grade $3(n-3)$ wird, so lassen sich durch jeden Punkt x_4 der Curve C $3(n-3)$ ihrer Schmiegungsebenen legen. Die Schmiegungsebene der Curve im betrachteten Punkte x_4 selbst gilt für drei zusammenfallende Ebenen dieser Art. Im Ganzen gehen sonach durch irgend einen Punkt

$$3(n-3)+3=3(n-2) \text{ Schmiegungsebenen,}$$

d. h.:

„Die Curve C ist von der $3(n-2)^{\text{ten}}$ Classe."

Setzt man $x_4=x_3=x_2=x_1$, so wird die Ebene der vier Punkte eine Wendeschmiegungsebene. Die Gleichung $F=0$ wird durch diese Substitution eine Gleichung mit einer Unbekannten, und zwar vom Grade $4(n-3)$, d. h.:

„Die Curve C besitzt $4(n-3)$ Wendeschmiegungsebenen."

Die Beziehung zwischen einem Punkte x_1 der Curve und einem der Schnittpunkte x_2 der Curve mit der Schmiegungsebene von x_1 wird dargestellt durch die Gleichung $F(x_1 x_1 x_1 x_2)=0$, welche in x_2 vom Grade $(n-3)$ und in x_1 vom Grade $3(n-3)$ ist.

Wenn diese Gleichung für x_2 eine doppelte Wurzel liefert, so berührt die Schmiegungsebene des Punktes x_1 die Curve im Punkte x_2. Die Discriminante der letzten Gleichung, genommen bezüglich x_2, ist in den Coefficienten vom Grade $2(n-4)$, und da diese in x_1 vom Grade $3(n-3)$ sind, so ergiebt sich eine Gleichung $6(n-3)(n-4)^{\text{ten}}$ Grades für x_1, d. h.:

„Die Curve besitzt $6(n-3)(n-4)$ Schmiegungsebenen, welche sie an einer andern Stelle überdies berühren."

Bildet man die Discriminante der letzten Gleichung in Bezug auf x_1 so wird sie in den Coefficienten vom Grade $2[3(n-3)-1]$ und daher in x_2 vom Grade $2(n-3)[3(n-3)-1]$, d. h. es giebt $2(n-3)[3(n-3)-1]$ solcher Punkte x_2, durch welche zwei unendlich nahe Schmiegungsebenen der Curve hindurchgehen. Diese Punkte sind zweierlei Art, nämlich erstens sind unter ihnen die Durchschnittspunkte der Curve mit den stationären Schmiegungsebenen (Wendeschmiegungsebenen). Die Zahl dieser Punkte ist nach Früherem $4(n-3)(n-4)$. Der Rest:

$$2(n-3)[3(n-3)-1]-4(n-3)(n-4)=2(n-2)(n-3)$$

ist die Zahl solcher Punkte, welche auf Tangenten der Curve liegen. Die durch einen dieser Punkte gehende Curventangente ist nämlich die Schnittlinie der beiden unendlich nahen, durch ihn gehenden Schmiegungsebenen. Wir finden somit den Satz:

„Die Curve besitzt $2(n-2)(n-3)$ Tangenten, welche sie überdies schneiden.“

Setzt man in der Grundgleichung ($F=0$) $x_2=x_1$, $x_4=x_3$, so ist die Gleichung $F(x_1 x_1 x_3 x_3)$ in jeder der zwei Variabeln vom Grade $2(n-3)$. Wir sehen also, dass jede Curventangente von $2(n-3)$ anderen Curventangenten geschnitten wird, mit denen sie in ebenso vielen, ein Büschel bildenden Ebenen liegt. Da jede Tangente auch von ihren beiden Nachbartangenten geschnitten wird, so schneiden sie im Ganzen

$$2(n-3)+2=2(n-2) \text{ Tangenten.}$$

Es wird also auch jede beliebige Gerade des Raumes von ebenso vielen Tangenten geschnitten, d. h.

„Die Curve ist vom $2(n-2)^{\text{ten}}$ Range.“

Mailand, im Mai 1871. Dr. E. Weyr.



XV.

Zum Speculum astronomicum des Albertus Magnus, über die darin angeführten Schriftsteller und Schriften.

Von

M. Steinschneider

in Berlin.

Herr Prof. Jessen in Eldena, der verdienstvolle Herausgeber des Buches *de vegetabilibus* von Albertus Magnus (starb 1280), Berlin 1867, beabsichtigt eine Herausgabe des *Speculum astron.*, welches in Jammy's Gesammtausgabe der Werke Albert's, Bd. V, unkritisch und ohne alle Nachweisung abgedruckt ist Er hat zu diesem Zwecke zunächst einen Text aus einem alten Druck ohne Orts- und Jahresangabe und der Ausgabe Zimara's Ven. 1517, welche Jammy willkürlich benutzte (s. *de veget. p.* 669), abgeschrieben und beabsichtigt, einige Handschriften zu collationiren. Solche gehören nicht gerade zu den Seltenheiten. Ich fand bei Benutzung verschiedener Quellen für die gegenwärtige Vorarbeit gelegentlich erwähnt: Cod. Paris 7440, citirt von Reinaud (s. unter Machomet N. 36); Cod. der Magliabecch. in Florenz (Stroz. 1127, unvollständig), bei Boncompagni in *Atti dell'Acad. pontif. XVI*, 1863, S. 758; Leipzig Paulina 1467 (bei Rose, *Arist. pseud. p.* 367); *Cod. canonic. misc.* 517,[26] (Coxe, Catal. Codd. MSS. Bibl. Bodl. III, 830); München Cod. lat. 221, 267, und vielleicht ein dritter (Tit. *Spec. de nominibus astr.*) bei Sighart (Leben Albert's, S. 297); in Wien 5508,[9] (*Tabulae vol. IV*, 1870, S. 140, als Pseudo-Alb. *Spec. geomanticum*).

Das Schriftchen ist von verschiedenem literatur- und culturgeschichtlichem Interesse; es bietet uns in engem Rahmen ein Bild der im XIII. Jahrhundert verbreiteten Schriften über Astronomie, Astrologie und Magie, meist aus dem Kreise der Uebersetzungen aus dem Arabischen, und kennzeichnet die Stellung, welche ein hervorragender Mann — nur ein solcher kann es verfasst haben — zu denselben einnimmt. Es wird die Aufgabe einer Einleitung sein, diese Gesichtspunkte im Zusammenhange mit der kritischen Frage über die Echtheit (an welcher Choulant, Janus I, 1846,

S. 138 flgg., 687, zweifelt, s. dagegen Sighart, S. 291) zu beleuchten. Eine nothwendige Vorarbeit ist die Feststellung, resp. Nachweisung der citirten Autoren und Schriften selbst. Herr Jessen ward durch meinen ersten Artikel „Uebersetzer aus dem Arabischen" im Serapeum, herausgegeben von Naumann, 1870, Nr. 19, 20,* veranlasst, mir sein Manuscript anzubieten, und bei meiner Bereitwilligkeit, dasselbe mit Anmerkungen zu versehen, im Februar d. J., begleitet von einem flüchtig angelegten Namensregister, einzusenden. Ich sah bald, dass es mit blosen Randnoten nicht abgethan sei, und zog es vor, das Register zu revidiren und mit Nachweisungen zu versehen, aus welchen hervorgeht, dass der weitaus grösste Theil der angeführten Schriften noch jetzt erhalten ist. Die Nachweisungen sind, bei aller Restriction, an Umfang so angewachsen, dass ich sie vorläufig abschliesse; ich hoffe, durch die Veröffentlichung derselben noch weitere Belehrung über einige unerledigte Punkte hervorzurufen.

Ich habe mich in der Regel auf kurze Verweisungen beschränkt, nur an einigen Stellen neue Forschungen oder Andeutungen allgemeiner Gesichtspunkte gegeben, und ist nur noch zu bemerken, dass ich gleichzeitig eine Anzahl von Ergänzungen zu meinen, dieselbe Literatur betreffenden Artikeln der Zeitschrift der deutschen Morgenländischen Gesellschaft** redigire, in welchen manches hier Berührte zur Sprache kommt, so dass, neben einigen Wiederholungen, Einzelnes nur hier oder dort seinen angemesseneren Platz gefunden hat.

Ich citire nach der von Jessen eingeführten Zahl fortlaufender Paragraphen, da die Capitelzahl in den Ausgaben von VIII flgg. variirt; um jedoch schon jetzt das Nachschlagen zu erleichtern, gebe ich hier einen kurzen Schlüssel, worin die römische Ziffer das Capitel, die arabische den ersten Paragraphen in demselben anzeigt:

II 7, III 19, IV 24, V 26, VI 30, VII 34, VII (VIII) 42, VIII 45, IX 49, X 51, XI 71, XII 86, XIII 92, XIV 106, XV 114, XVI 117.

1. *Abdilazil* oder *Abdalasit*, s. Alkabitius.

2. *Abohali* oder *Hahuali*, im Buche, welches beginnt: *Iste est liber in quo exposui*, § 44. — Ist der Astrolog Abu Ali Ibn el-Khajjat, d. h. Sohn des Schneiders, daher auch *sarcinator*, Schüler Mesahallah's (s. d.), s. vorläufig Zeitschr. f. Mathem. X, 423, Anm. 21; D. M. Ztschr. XXIV, 352. *Liber Albohali de iudiciis nativitatum*, 4., Nürnberg 1546, beginnt richtig wie oben. Die Wiener *Tabulae Codd. manuscr. II*, 209, Nr. 3124,[20], confundiren Avicenna. Ich komme auf ihn in einem kleinen selbstständigen Artikel

* Leider ist dieses Blatt, wie ich eben erfahren, eingegangen.

** Ueber die Mondstationen (Naxatra) u. s. w. Bd. XVIII S. 118—201; Zur Geschichte der Uebersetzungen aus dem Indischen ins Arabische u. s. w. Bd. XXIV, S. 325—91; ich citire der Kürze halber nur: „D. M. Ztschr."

zurück. In der Handschr. Laud. 594,[13] (bei Coxe II, 1, S. 423) beginnend: *Iste est liber etc.*, wird als Uebersetzer „Joh. Toletanus" genannt.

3. *Abolomita*, s. Belenus.

4. *Abrachus* oder *Abrachis*, § 9, ist Hipparch; vergl. Ztschr. f. Math. XII, 11, A. 20, S. 34: „*Abalam*". „*Abrachar*" 282 Jahre vor Ptolemäus, bei Albategni, C. 51 f. 80; s. folg. Nummer.

5. *Albategni*. — *Quod* (?) *autem in almagesti obligetur et in Commentario Geber tam prolixe dictum commode restringitur ab Arzachele* (Var. *Algaselel*) *hispano, qui est dictus Albategni in libro suo qui sic incipit* „*Item* (lies: *Inter*) *universa*" *etc. ibique corriguntur quaedam quae* [fehlt *ut?*] *ipse*(?) *dixit non ex errore Ptolemaei sed ex suppositione radicis* (*radicum*) *abrachi*(*s*) *accidisse, quae tamen contra fidem pugnare* (*fidem pungere*) *non videntur. Ex his quoque duobus libris collegit quidam vir librum secundum stilum Euclidis, cuius commentarium continet sententias utriusque secundum Gebrith* (*utriusque Ptolomei silicet*) *atque Albategni, qui sic incipit:* „*Omnium recte philosophantium*" (*Omnem recte philosophiam*). §§ 9, 10.

Diese, jedenfalls corrumpirte Stelle enthält vielleicht die Wurzel oder die Blüthe einer Confusion verschiedener Autoren. (Zur pseud. Lit. S. 71.) Algasel ist sicher Schreibfehler. Der in lateinischen Quellen so genannte Philosoph al-Gazali war weder Mathematiker, noch Spanier; über Arzachel s. unten Nr. 17. „Geber" schlechtweg ist Dschabir Ibn Aflah aus Sevilla, dessen Compendium des Almagast in IX Tractaten in der Uebersetzung Gerard's von Cremona gedruckt, mir aber im Augenblick nicht zugänglich ist. „Albategnius" ist der bekannte Astronom Muhammed ben (Sohn des) Dschabir al-Battani, dessen Werk in der Uebersetzung des Plato aus Tivoli zuerst mit Additamenten des Joh. de Regiomonte (Königsberg), 4., Nürnberg 1537, hinter Alfragani gedruckt, auf dem Titelblatt *de motu stellarum*, im Columnentitel *de scientia stellarum* heisst; Anfang (f. 1[b]) *Machometi filii Gebir, filii Crueni* [lies *Ceneni* = *Sinani*], *qui vocatur Albategni, in numeris stellarum, et in locis motuum earum etc.*, 2. Ausg., Bologna 1645, mit Druckfehlern (s. Halley, bei Delambre, *Histoire de l'astr. du moyen âge*, *p.* 61, und Lalande, *Bibliogr.*, S. 56 und 220). Die Praefatio des Uebersetzers Plato Tiburtinus beginnt: *Inter universa liberalium artium;* also bezeichnet Albert diesen Anfang als den des Werkes, und er scheint die Vorrede ohne Ueberschrift vor sich gehabt zu haben, denn in derselben kommen die Worte vor: *Cumque eius* [d. h. *Ptolemaei*] *imitatorem perfectum inter Arabes et Albategnium deprehenderem, quique Ptolemaei prolixitatem compendiosae* (so) *coartat eiusque errores emendans, quae quidem rarissimi sunt, non ipsi sed Abrachis radici imputat.* — Ueber eine andere Uebersetzung der „*Canones*" s. unten Nr. 48.

Quellen über Albattani s. D. M. Ztschr. XXIV, 351, X, vgl. auch David Gans, *Nechmad we-Naim*, f. 9. — Ueber die Identität Battani's mit „*Bethen*" oder „*Bethem*" (s. Delambre S. 3) anderswo.

6. *Albumasar*, der bekannte Astrolog um 850 (s. seine *Introd. VI*, *C.* 1), über welchen ich anderswo die Quellen vollständig gebe, hier eine Verweisung auf D. M. Ztschr. XXIV, 392 (Index s. v.) und Serapeum 1870, S. 309 bis 311 genüge, hiess Dscha'afar (*Gaphar*, nicht *Saphar*, wie Lalande, Index S. 881), ben Muhammed b. Omar-al-Balkhi („*Albalachi*"), gewöhnlich Abu Ma'aschar. Albert citirt:

a) liber geazar (Var. *leozar*, lies Geafar) *qui dictus est Albumasar*, *quem vocant Maius Introductorium*, anfangend *Laus Deo*, § 31, und ohne Nennung des Buches, jedoch unter Angabe von Tractat, „Differentia" (d. h. Abschnitt) und Capitel in §§ 75, 78, 80, 102 (s. unter Aristoteles *e*). — Ist das bekannte Buch, aber nicht die edirte Uebersetzung, sondern die des Johannes Hispalensis, welche sich in vielen Handschriften erhalten hat und an dem Beiworte *majus* oder *magnum* zu erkennen ist. Sie beginnt *Laus Deo*..., dann *Dixit Geasar* oder *Geafar etc.* (s. D. M. Ztschr. XVIII, 170, vergl. S. 190, auch über die unvollständige gedruckte Bearbeitung). Solche HSS. sind: bei Boncompagni 4, in Casena (Plut. 27 Cod. 3,[1], bei J. M. Mucciolo, Catal. II, 175 mit falschem Datum), Leipzig (Paulina, bei Montfaucon S. 598), London (Harl. 3631,[1]; III, 47), München 122 und 374: „Geafer"; Oxford, Bodl. Digby 194 (Catal. MSS Angl. I, 86, N. 1795) und Coll. Corp. Chr. 95, Paris 7315, Wien, Tabulae II, 73, N. 2436,[1]; IV, 115, N. 5392,[4]; S. 129 N. 5463,[1]; S. 131 N. 5478,[1] und wohl noch sonst. — Uebrigens soll Abu Ma'ascher sich das Werk unrechtmässig beigelegt haben und der eigentliche Verfasser der Jude Sind ben Ali sein (D. M. Ztschr. XIII, 630, auch el-Kifti ms.).

b) Liber conjuctionum, anfangend: *Scientia significationum*, § 36. — „*Albumasar de magnis conjunctionibus*, *annorum revolutionibus: ac eorum profectionibus: octo continens tractatus*" liest man auf dem Titelblatt der seltenen Ausgabe, welche der bekannte Drucker Erhard Ratdolt in Augsburg 1489 zwei Monate nach der Beendigung des Introductorium erscheinen liess, — ein Exemplar fand ich erst jetzt als *annexum* in der hiesigen k. Bibliothek. Die Ueberschrift lautet: *Hic est liber individuorum superiorum* in summa de significationibus super accidentia quae efficiuntur in mundo: de presentia eorum respectu ascendentium inceptionum coniunctionum et aliorum. Et sunt octo tractatus. Editus a Japhar astrologo qui dictus est Albumasar: ad laudem dei gloriosi.* [Ist schon das bekannte *Bismillah.*] Auf Index des Ganzen und

---

* *De significationibus individ. super.* in Cod. Harl. 3631,[2] (III, 47, wo die Identität vermuthet wird). Ueber diesen technischen Ausdruck s. mein Alfarabi (Petersburg, 1869) S. 76 (vergl. D. M. Ztschr. XVIII, 130). Das arabische Original enthält ohne Zweifel Cod. Escurial 932 (Casir I, 371, übersetzt falsch: *Prognostica simulacrorum coelestium*), vielleicht auch Cod. 913,[1], bei Casiri S. 352.

Ueberschrift des 1. Capitels folgt der eigentliche Anfang: *Scientia individuorum significationum circularium super effectus inferiores.* Hiernach ist Serapeum 1870, S. 309 zu ergänzen. Eine Ausg. Ven. 1515 besitzt die Bodl. (Lalande S. 38 übergeht den Ort, das Jahr fehlt im Index.)

c) ... *et apud Geber* (!), *qui creditur esse Albumasar in libro naturae suo dicto*, § 36, unmittelbar nach *b.* — Ein *liber naturarum* des Albumasar cit. Haly Aben Ragel in seiner Astrologie tr. VII C. 100 S. 341, ed. 1551; ein solcher Titel erscheint auch als der erste im Verzeichniss der Schriften Abu Ma'ascher's, bei el-Kifti; der 20. ist *liber naturarum major;* Geber stünde also für Gafar; allein eine Handschrift des Buches ist mir unbekannt und es ist vielleicht an den Alchemisten „Geber" zu denken?

d) *lib. florum*, anfangend: *Opportet te primum scire*, § 39. — So beginnt das gedruckte *Flores*, dessen Uebersetzer nicht genannt ist (s. Serapeum 1870, S. 309, Anm. 14); die k. Bibliothek besitzt davon die Ausgabe Venedig ohne Jahr durch J. Baptista Sessa, und 1495 (Lalande, S. 28, 22, beide fehlen im Index S. 881). Ebenso beginnt die Wiener Handschrift 5209,[5] (IV, 59) mit dem Titel *de Revolutionibus annorum*, nur 1. Bl.; hingegen 5463,[3] mit demselben Titel, anfangend: *Tract. primus qualiter*, wie oben in *a* nach der Ueberschrift die Inhaltsangabe; vergl. auch unter *e* und N. 12. Man sieht hieraus, wie wenig massgebend die Titel sind.

e) *Lib. Experimentorum*, anfangend: *scito horam introitus*, § 39, unmittelbar hinter *d.* — Handschriften sind im Serapeum *l. c.* nachgewiesen, eine ist betitelt *de revolucione annorum mundi;* scheint unedirt.

f) s. unten Gaphar.

7. *Alchochandus*, s. Mahomet.

8. *Algasel*, s. Arzachel.

9. *Alkabitius: liber Abdilazil* (Var. *Abdilazit*, lies Abdil-Aziz), *lib. quem vocant Alkabitius*, anfangend: *Postulata a Deo*, § 31. — Lebte im X. Jahrhundert; die lateinische Uebersetzung seiner Einleitung von Johannes Hispalensis, öfter gedruckt (die hiesige k. Bibliothek hat u. A. eine Ausg. 4. Francof. 1508), beginnt: *Postulata a Domino**. Näheres in meinem Catal. libr. hebr. in Bibl. Bodl. S. 1567 und D. M. Ztschr. XXIV, 336; vergl. XVIII, 192: *Adyla* bei Bonatti. — Heilbronner, S. 495, erwähnt eine Optik

---

* *Postulata* beginnt auch Cod. Digby 47 bei Boncompagni, *della vita di Gherardo*, *p.* 59; ich zweifle daher sehr an einer Uebersetzung dieses Buches durch Gerard von Cremona, da andere Belege fehlen.

und nennt S. 431, § 388 nach Pastregius, unser Werk *Archibia?!* — Der Verf. citirt, eine Widerlegung des *Heissehenhali* (Hasan ben Ali?) und (in Diff. IV) *liber de animodar.*

10. *Alkindus* oder *Alchindus* (der bekannte Polyhistor, IX. Jahrh.) — Ein Buch, welches anfängt: *rogatus fui*, und von Witterungskunde handelt, § 41 —, ist ohne Zweifel das in Handschriften häufige*, in Venedig 1507 und Paris 1540 gedruckte: *Astrorum iudices Alhindus* || *Gaphar de pluviis imbribus et ventis: ac aeris mutatione* (D. M. Ztschr. XVIII, 128, 131, 181, 185; das dort erwähnte Exemplar der Ausgabe 1507 habe ich erworben, die hiesige k. Bibliothek besitzt keines). Zu Catal. Bodl. S. 1678,[8] s. die Quellen über al-Kindi in D. M. Ztschr. XXIV, 347, wo mehrere ins Lateinische übersetzte, zum Theil unedirte, astrologische Schriften aufgezählt sind; vgl. auch Zeitschr. f. Math. XII, 27, und unten Nr. 50.

11. *Almansor. Liber capitulorum [et] centum verborum ad Almansorem (Almansoris)*, anfangend: *Signorum dispositio est (dispositione) ut dicam*, § 50. — Siehe Zeitschr. f. Math. XII, 27 meine ausführliche Erörterung, auch die Variante des Anfangs; in Cod. Wien II, 74, Nr. 2436,[26]: *Albumasar* (!) *Lib. experimentorum seu Capitula stellarum etc.* (vergl. Zeitschr. XII, 29 und oben Nr. 6 *d*, *e*), anfangend *Dispositio*, also fehlt das Anfangswort.

12. *Alpetragius*, der die Principien des Ptolemäischen Systems bekämpft in einem Buche, beginnend: *Detegam tibi secretum.* Ihm hängen Viele an wegen der Autorität des Aristoteles im Buche *coeli et mundi*; Andere *indignantur quod malo suo intellectu ausus fuerit reprehendere Ptolomaeo*, § 11. — Abu Ishak Nur ed-Din al-Bitrudschi oder Bitrodschi (aus Pedroches stammend) aus Sevilla, den Casiri ohne Grund zum Christen macht, schrieb nach 1185, dem Todesjahre seines Lehrers, des Philosophen Ibn Tofeil. Sein astronomisches Werk (arabisch in Cod. Escurial 958, bei Casiri I, 958) wurde im J. 1217 in Toledo von Michael Scotus ins Lateinische übersetzt, erhielt sich jedoch in dieser Uebersetzung nur handschriftlich in Cod. Paris a. f. 7399, Sorb. 1820; identisch scheint z. B. *Alpetraugius* (so) *de vivificatione* [lies *verificatione?*] *motuum coelestium* im Catal. MSS. Angliae II, 386 Nr. 9931; im Catalog der Harl. I, 1 sind die einzelnen Capitel als 11 Schriften aufgezählt! Das Specimen, welches Jourdain (N. LI) gegeben, beginnt in der That, nach einer kurzen Einleitungsformel (wo Jesus Christus für Allah substituirt ist), mit den Worten *Detegam tibi secretum.*

---

* *De significatione planetarum et de eorum natura sive de pluviis* in Wien II, 74, N. 2436,[22]. *De pluviis* ist der gewöhnliche Titel. Hingegen beruht auf Confusion die Ueberschrift in Cod. Wien II, 220, N. 3162,[6]: *Lib. Haly de planetis sub radiis solis, quem alii intitulant lib. Alkindi de pluviis*, anfang.: *Saturnus in ariete.* — Der lateinische Uebersetzer des Kindi ist nach Jourdain's Vermuthung Adelard von Bath, was Cantor (Math. Beitr. S. 268) unerwähnt lässt.

Im Jahre 1247 nahm Jehuda ben Salomo Kohen aus Toledo ein Compendium des Buches im II. Theil seines grösseren Werkes (*Midrasch ha-Chochma*) auf, welches er (ganz oder nur theilweise?) zuerst arabisch verfasste, dann in Toscana hebräisch übersetzte. Jedoch ist gerade dieser Abschnitt nur in äusserst wenig Handschriften des überhaupt selten vollständigen Werkes erhalten; z. B. in dem Bodleianischen Cod. Michael 414, f. 161^b, De Rossi 421; in einer Handschrift des Buchhändlers Fischl, von Sal. Dubno herrührend (s. Hebr. Bibliogr. VIII, 36, Nr. 934, vergl. VII, 63). Zu Cod. Vatican 338, f. 211, hat Christmann bemerkt: *Item Epitome Almagesti Ptolemaei cum quibusdam ex Albategnio excerptis quae heic desiderantur item Genethliaca quaedam ad finem.* Da die Epitome des Almagest nach Asseman's Beschreibung von f. 211 bis 273 reichen soll, wo erst das Quadripartitum beginnt, so könnte wohl Bitrudschi von Christmann und Assemani übersehen sein; jedenfalls ist „Albategni" ein Irrthum. Der von Jehuda in der Epitome angeführte *Gaber* (Dschabir) ist der Sevillenser (s. oben S. 359), der von einem damals bereits verstorbenen R. David (sonst unbekannt) widerlegt worden. Jehuda giebt an, dass Bitrudschi vor ungefähr 30 Jahren gelebt habe, was ich auf den Uebersetzer Michael Scotus zu beziehen geneigt war.

Im Jahre 1259 übersetzte Mose Ibn Tibbon in der Provence das arabische Werk ins Hebräische. Handschriften dieser unedirten Uebersetzung sind ebenfalls sehr selten. Ich kenne nur drei vollständige, in der Bodleiana (Mich. 386), Paris 1288,* des neuen Catalogs (Orat. 139, bei Wolf, Bibl. hebr. III, Nr. 31^b lies: Abu Isak ben Ibn Albatrugi; so in den Handschr.) und eine vor zwei Jahren in München (jetzt Cod. 150) erworbene; ausserdem ein Fragment in Petersburg (J. Gurland, Kurze Beschreibung der mathematischen u. s. w., hebräischen Handschriften u. s. w., Petersburg 1866, S. 29, Nr. 339). Die Figuren fehlen grösstentheils.

Aus dieser Uebersetzung stammt die lateinische des *Calo* oder Kalonymos ben David (aus Neapel), Venedig 1531 (s. meinen Catalog. Bodl. S. 1576), aus welcher die neueren Geschichtschreiber der Astronomie (namentlich Delambre S. 7, 171, 179, Whewell - Littré S. 186) ihre Kunde schöpften, während ältere christliche Autoren seit dem XIII. Jahrhundert, wie Albert M. — bei dem der Verfasser anderswo „*Alpatiarius*" heisst —, natürlich nur die des Scotus benutzen konnten.

Von „Alpebragius" oder Bitrogi ist in christlichen und jüdischen Quellen bis spät hinunter* viel die Rede, Isak Israeli (1310) in Toledo meint unsern Bitrogi, wenn er von dem Manne spricht, den er den „Erschütterer" nennt;

---

* Zum Beispiel bei dem Arzt und Mathematiker Josef del Medigo im XVII. Jahrh., s. Geiger, *Melo Chofnajim*, Berlin 1840, S. 13, hebr. אלפיטרריגיו, wofür Geiger (Uebersetz., S. 14) irrthümlich „Elbatrik (Johannes, Sohnes des Patricius)" setzt (s. Virchow's Archiv, Bd. 52 S. 364). S. auch Cod. Fischl. 26.

sein jüngerer Zeitgenosse, Levi ben Gerson, genannt *Leon de Bañols* (st. 1344)*, hat in seinem grossen, nur handschriftlich im hebräischen Original und in lateinischer Uebersetzung erhaltenen astronomischen Werke die neue Weltconstruction des Bitrudschi widerlegt. — Es sei hier gestattet, die Bedeutung der spanischen Araber für die, später durch Copernicus vollzogene Verdrängung des Ptolemäischen Systems hervorzuheben.** Die sich immer mehr verwickelnde Theorie der excentrischen Kreise und Epicyklen und das sogenannte Trepidationssystem*** erhielten ihren ersten Stoss durch die Philosophie der spanischen Araber, die an Aristoteles knüpfte†, aber freilich durch mathematische Studien sich zu grösserer Freiheit entwickelte††. Zarkali (*Arzachel*) und Dschabir Ibn Aflah hatten sich gegen minder wichtige Punkte des herrschenden Ptolemäus ausgesprochen und Ersterer wurde daher von Copernicus „der Verleumder des Ptolemäus" genannt (Heilbronner, S. 428). Bitrodschi führte seine Hiebe gegen Grundsäulen des Systems und glaubte sich inspirirt zu einem neuen Weltsysteme. Jehuda ben Salomo leitet seinen Abriss u. A. mit den Worten ein: „Wisse, dass ihm ein grosses Geheimniss geoffenbart worden, und wäre er Jude gewesen, so wäre er der göttlichen Weisheit würdig gewesen, denn es heisst (Spr. Sal. 14, 33): „im Herzen des Verständigen (*nabon*) ruht die Weisheit", und *bina* [wovon *nabon* abgeleitet] bedeutet Mathematik, wie oben in der Erläuterung der Sprüche Salomonis erörtert worden"†††. — Eine anonyme Widerlegung des Alp. enthält Cod. Wien IV, 56, N. 5203,[5].

Die eben mitgetheilten Daten sind Resultate neuerer Forschung; die gewöhnlich benutzten Quellen von Riccioli (Almagest nov. S. XXIX) bis auf Grässe (II, 2, S. 902) und Poggendorff's Wörterbuch (I, 33) bringen Irriges und Mangelhaftes. Den ersten Schritt that Jourdain; eine Zusammenstellung der lateinischen und hebräischen Quellen versuchte ich mit den mir damals zu Gebote stehenden Mitteln in den ersten Märztagen 1848 (in *hu-Jona*, herausg. v. S. Sachs, S. 32 flgg.) und ergänzte die Nachweisungen seitdem an verschiedenen Orten*†. Munk war, wie er im J. 1862 in einem Briefe an Lebrecht versicherte, unabhängig von meinen Forschungen zu

---

* S. Hebr. Bibliographie IX (1869), S. 162.

** L. Prowe (Ueber die Abhängigkeit des Copernicus von den Gedanken griechischer Philos. und Astr., Thorn 1865, S. 27) behauptet nicht ganz richtig, dass von den Arabern an den „Fundamenten des Ptolemäi'schen Systems nicht gerüttelt wurde".

*** S. unten unter Thebit.

† Die „Spiralbewegung" des Bitr. (bei Munk, *Melanges*, S. 520) erwähnt Averroes *(de coelo II, C.* 35 *f.* 56,[1] *lin.* 29*)*: *„motus qui dicuntur laulab ab Aristotele"*.

†† Vergl. meine *Lettere a D. B. Boncompagni*, *p.* 11.

††† Vergl. mein *Jewish Literature*, London 1857, S. 351.

*† *Jew. Lit., pag.* 184; *Catal. Bodl., p.* 1610 und Addenda; *Catal. Codd. Lugd., p.* 284, 350; Zur pseudepigr. Lit., S. 72.

den Resultaten gekommen, die er in den *Melanges* (Paris 1859 — 1860, Seite 518 — 521) niederlegte. Ich glaubte, dem Verblichenen diese Bemerkung schuldig zu sein.

13. *Alphraganus tiberiades*, dessen Buch beginnt: *Numerus mensium arabum*, § 12. — Das bekannte Werk des al-Fergani (833—844?) beginnt so in der compendiösen Uebersetzung des Johannes Hispalensis (1135), Ausg. 4. Nürnberg 1537*). — Ueber Quellen, andere Uebersetzungen ins Lateinische und Hebräische, Commentare u. s. w. s. Wöpcke im *Journal Asiatique* 1862, XIX, 114—7, und meine Angaben in D. M. Ztschr. XVIII, 148, XXIV, 339, 381, wozu ich soeben noch einige Nachträge redigire. Eine italienische Uebersetzung des Zucchero Bencivenni (um 1313) s. bei Libri, *Hist. des sciences mathém. II*, 207, 526, vergl. Narducci, *Libro de le virtudi de le pietre preziose*, Bologna 1869, S. 8. Den Namen Tiberiadis in einer Pariser Handschrift erklärt Wöpcke aus Ketiriadis, nämlich Muhammed Sohn des Ketir (Koteir). Ich vermuthe noch eine Confusion mit Omar, unten Nr. 31. — Ohne Zweifel ist unser Fergani der „*Alfaragius*" in der Handschrift Wien IV, 93, N. 5303,[15].

14. *Aranentob* (*Aranentoh*). „*Et post illum* (*istum*) *scripsit librum almageg* (Var. *alxiroth*)** *hoc est cursuum Aranentob* (Var. *Nismeroh*) *magister filie* (Var. *filii*) *regis Ptolomaei*, *quem vocavit Almanach. Et hic quidem pro diuturnitate temporis his diebus satis ab exquisitae calculationis veritate declinat*, § 14. — Bei diesem, wahrscheinlich den meisten Lesern dieser Blätter ganz unbekannten Autor ist eine ausführliche Nachweisung ganz unerlässlich, welche dennoch Manches zu wünschen übrig lassen wird.

Der Araber Zarkali (*Arzachel*, s. Nr. 17) hat unter Anderem astronomische Tafeln eines alten Autors überarbeitet, dessen Namen in einer arabischen Handschrift in München *Eumathios* scheint. Allein ich habe in der von Kobak herausg. Zeitschr. *Jeschurun* (V, 1867, S. 188) eine Stelle aus dem hebr. Almanach des Jakob b. Machir (*vulgo Prophatius*) mitgetheilt, wonach „Armanius, Schüler des Königs Ptolemäus", ungefähr 600 Jahre vor Zarkali gelebt hätte***. Nach Lalande, im Index zu seiner *Bibliogr.*, S. 882,

---

* Die Capitel heissen hier, wie in der Uebersetzung des Abu Ma'ascher: „*Differentiae*" (arabisch *Fusul*), daher der verkehrte Titel: „*De differentiis* (30) *inter Arabes et Latinos in astronomia per Alfraganum*" in Cod. Caio-Gonville 504,[3] bei J. J. Smith (*Catalogue*, Cambr. 1849, S. 231).

** *Alxiroth* führt auf das arabische *Tasjirât*, Fortschreitungen, „*Atacir*" (worüber s. D. M. Ztschr. XXIV, 383); zu *almageg* weiss ich keine naheliegende Form, etwa *al-maǵari*, oder eine andere von جرى, laufen, abgeleitete Form? Oder lies: *alzaiǵ*, Mehrzahl von *ziǵ?* (astron. Tafeln, s. meine *Lettere* S. 18 und dazu J. J. Smith l. c. S. 217, *Cod.* 456).

*** In den *Canones super Almanach Profacii* (Cod. Palat. 1436, f. 23v) heisst es (nach Mittheilung des Fürsten Boncompagni, Nov. 1863): *Sequitur autem istud almanach modum illius, quod fecit Ptholomaeus ad Cleopatram filiam suam.*

soll ein Ammonius um 500 n. Chr. die Sterne beobachtet haben; eine Quelle ist nicht angegeben.

Diese Tafeln sind ohne Zweifel in folgenden Handschriften enthalten:

a) Cod. Laud. 644,[16] (bei Coxe II, 1, S. 467, vergl. Cat. MSS. Angl. I, S. 72 bis Nr. 1487):

Canones [Humenuz, Ammonae forsitan] Aegyptio, super tabulas eius, qui dicuntur Almanach. — Inc. Sciendum est quod Humenuz, summus Egyptiorum philosophus, magister filie Ptolomei, composuit has tabulas equationis Planetarum super annos Egyptiorum, quas Arzachel Grecorum (!) philosophus de annis Egyptiorum ad annos Alexandri magni mutavit. Post hec vero magister Johannes Papiensis eas transtulit ad annos Christi. Ende: *Mercurii* 19°; *capitis Draconis* 61°. Dann 28 Tafeln.

b) Zwei Palatinische Handschriften (über deren gegenwärtige Nummer im Vatican ich beim Fürsten Boncompagni angefragt habe*) der Tafeln des *Humenus*, welche Joh. Papiensis** auf die christliche Zeitrechnung reducirte, erwähnt Christmann zu Alfergani S. 226. Darin heisst es: *Factae fuerunt hae tabulae ad certificanda loca planetarum, ad mediem diem civitatis Antiochia *** et incipit tabula Saturni uno mense ante annum Alexandri* 1454 *et quatuor mensibus ante A. Chr.* 1443 [also Sept. 1142].

Vergl. Heilbronner, *Hist. math.*, S. 458 § 466; Weidler, *Hist. astr.*, 216, § XVIII; bei Lalande, S. 5, mit dem Jahre 1150, welches aber bei Weidler nur in der Anmerkung zu dem vorangehenden „Almansor" notirt ist (s. dagegen Zeitschr. f. Math. XII, 28).

c) Liber Humeni Egipti, Cod. Harl. 3647;[17] (III, 48); fehlt im Index IV, 485.

d) Ein Citat (?) in Cod. Boncompagni 225, f. 257 (Narducci's Catal. S. 96): *Per tabulas humeni philosophi inventivas locorum et motuum 7 planetarum et draconis. Nota quod anno d. n. ihu. x̄pi.* 1268 *perfecto etc.*

Ein Werk des Hermes an den aegyptischen Ammon s. bei Heilbronner S. 69 (Labbeus S. 117). — Ein Werk des Ammonius über

---

* Die Vaticanischen Codices, welche die von Christmann angeführten Stellen enthalten, sind Palat. 1410 und 1414. Fürst Boncompagni hat auf meine Bitte die Codd. herausgefunden und mir die betreffenden Stellen mitgetheilt. Die Ueberschrift ist: *Incipiunt canones super tabulas humeni* (in 1410 *humenii*) *philosophi summi egiptiorum.* Dann folgt die Bemerkung: *Sciendum quod humenus* (in 1414 *humeni*) *etc.*, wie bei Coxe, bis *annos Christi.* Dann: *Composuit autem humenus* (in 1414 *humeniz*) *hos canones super annos graecorum post obitum ptholomei rogatu filie ipsius ptholomei.* — S. auch über *Ycominus* unten zu Nr. 38, zu Ende.

** Joh. aus Pavia hiess ein Zeitgenosse des Bonatti, s. Boncompagni, *Della vita di Gherardo Crem. p.* 65.

*** Ich vermuthe Antiochia in Spanien, wo der lateinische Uebersetzer etwa arbeitete; vergl. Serapeum 1870, S. 292.

das Astrolab ist in mehreren griechischen Handschriften erhalten. — Was hat Zarkali vor sich gehabt?

15. *Arceppius. Liber Arceppii* (*Areceppii*) *cum commento suo*, § 64. — Am nächsten läge, bei der häufigen Verwechselung von *t* und *c* in lateinischen Handschriften, der Namen *Artephius* (Artefius, Artesius — wahrscheinlich auch Uthesia*), unter welchem alchemistische Werke bekannt sind (s. Borellius, *Bibliotheca Chimica*, 12. Heidelberg 1656, S. 31). Ich habe anderswo (Alfarabi, Petersburg 1869, S. 250) diesen Namen auf Stephanos zurückgeführt; das Datum 1130 (Bertelli in Boncompagni's Bullet. I, 365) ist unbegründet.

16. *Aristoteles.*

a) *Lib. de coelo et mundo*, § 11.

b) *Perspectiva*, wahrscheinlich für *Alhazen* (Ibn Heitham), der als „Philosophus" citirt zu werden pflegt (s. Rose, *Aristot. pseud.*, *p.* 376).

d) (*omnium pessimus*) *liber quem scripsit Aristoteles Alexandro regi*, anfangend: *Dixit Aristoteles Alexandro regi si vis recipere* (*percipere*), wird auch *mors* [l. *mores?*] *animae* von Einigen genannt, § 64. — Mir unbekannt.

e) Albumasar, in Tract. I, Differentia 5, *capitulo de secta tercia*, behauptet im Namen des Aristoteles, dass die Planeten eine rationelle Seele besitzen, *licet non invenitur in universis libris Aristotelis*, *quos habemus*, *et forte hoc* (*id*) *est in* 12. *metaphysicae vel* 13., *qui nondum sunt translati et loquuntur* (*loquitur*) *de intelligentiis sicut ipse permittat* [lies *promittit?*]. Diese Stelle meint Jourdain am Ende seiner Abhandlung über Albert (*Recherches*, *p.* 397 *ed. I*). Die Stelle des Abu Ma'aschar (s. oben 6*a*) findet sich in der Ausgabe im 4. Capitel (weil dort das einleitende Capitel nicht gezählt ist; vergl. Nicoll, Catal. S. 238): *Stellarum substantia ut philosophus intellexit ex anima rationali motuque rationali legem habent sui generis etc.*

Die arabischen Philosophen, anknüpfend an Metaphys XII, 7, 8, erklärten die Sphären als belebte Wesen (s. Munk, *Mélanges de philosophie etc.*, S. 331; vergl. mein Alfarabi, S. 80, 244). Abu Ma'aschar überträgt das auf die Sterne.

[*Ares* s. unter *Zahel*, Nr. 45.]

17. *Arzakel*, oder *Azarchel*, *hispanus in libro suo qui sic incipit*: „*Scito* (*Dato!*) *quod annus lunaris*", und dessen Radices nach den Jahren der Araber, d. h. des Muhammed, nach dem Meridian von Toledo, dessen Länge vom Westen ist 28° (Var. 58°), Breite vom Aequator 40°; § 15.

---

* Fragen des *Uthecia* (*Uthesia*) an Maria bei Smith l. c. S. 94 Cod. 181,[18] (in Catal. MS. Angl. I, III, 119, Nr. 1027 *Uthenis*) und in der Universitätsbibliothek in Cambridge, Cod. 1388,[4] (Cat. II, S. 541).

Ueber Abu Ishak Ibrahim ben Jahja en-Nakkasch (der Metallgraveur), genannt Ibn Zarkâla, oder Zarkali* (1061—1080) behalte ich mir eine kleine Specialabhandlung vor; s. vorläufig D. M. Ztschr. XXIV, 351. An unserer Stelle kann, nach dem weiteren Zusammenhange, nur von seinen „Canones" zu den sogenannten Toletanischen Tafeln (1169) die Rede sein — letztere selbst hat er schwerlich verfasst, höchstens an der Redaction theilgenommen, wie ich glaube. — Weder die Tafeln, noch die Canones sind gedruckt, aber beide, namentlich letztere, in vielen lateinischen Handschriften erhalten, wovon einige als Verfasser (richtiger Uebersetzer) Gerard von Cremona nennen. (Boncompagni S. 57**, Catal. der Universität Gröningen 1833, S. 304, *Cat. général des MSS. ... des Departements*, S. 418 Cod. 323,[20]: *Canones Toletanae sec. Cremonensem*); identisch sind also die von Antonio (bei Boncompagni l. c S. 60) erwähnten Tafeln Gerard's (vergl. Rodriguez de Castro, Bibl. españ. II, 649; Cod. Basel bei Montfaucon S. 186, Heilbronner S. 547, § 31, 21, Cod. Canon. misc. 51 bei Coxe S. 467). Fürst Boncompagni machte mir in seiner bekannten Liberalität ausführliche Mittheilungen über vier Handschriften des Vatican; aus den Pariser Handschriften 7336 und 7421 findet man solche bei Delambre (*Hist. de l'astron. du moyen âge*, *p.* 175) und Reinaud (Einleit. zu Abulfeda S. CCXLVII und *Mémoire sur l'Inde, p.* 381), wie schon bei Christmann (zu Alfraganus S. 56, 57, 202, 206, 207) aus den Palatinischen. Der Anfang der Canones lautet in den mir bekannten vollständigen Handschriften: *Quoniam* [*unius*]*cuiusque actionis****, also könnten jene bei Albert nicht gemeint sein,

---

* Flügel, Handschr. der Wiener Bibliothek II, 487, Nr. 1421, hat unsern Autor nicht wiedererkannt, weil die Handschrift Zarkani liest. „Nur-ed-Din en Nakkasch" im *Catal. Codd. or. Lugd. Bat. III*, 139, Nr. 1156, scheint eine Vermengung von Bitrudschi (oben Nr. 12) und Zarkali.

** Die Handschr. der Aula Mar. Magd. ist in Coxe's Catalog Cod. 1, 9.

*** Durch ein Missverständniss erscheint „*Arzatzel*" als Verfasser des *Almanach perpetuum*, beginnend: *Quia omnes homines naturaliter scire desiderant* [aus Aristot. Metaph.], bei Bandini Bd. IV, S. 129 und 131: „*Almanach praefati*(!) *Judaei de Montepessulano.* Der Verfasser ist Prophatius (Jakob ben Machir); s. Catal. Bodl. S. 1234 und Catal. MSS. Angl. I, 86, Nr. 1777 (Digby 176): „*Almanac Prophacii Judaei juxta Arzachelem* (s. unter Aranentob Nr. 14). Hieraus erklärt sich vielleicht, dass in der *Nouvelle Biographie universelle*, Paris 1855, III, 406, *Arzachel* als Jude erscheint? — Das Werk über *Arzatzel* bei Bandini II, 8, Plut. 29 Cod. 6, beginnend: *Inter cetera veritatis philosophicae documenta*, ist die Expositio des Johannes de Sicilia; s. Narducci, *Intorno ad una traduzione* ... Rom 1865, S. 15, Cod. Harl. 1, 25 [I, 1], bei Rico y Sinobas, *Libros del Saber di Astronomia del Rey D. Alfonso*, T. V, 1867, S. 65. — Gegen die Ansichten des Herrn R. y S. (*l. c. V*, *passim*) über Zarkali, die zu seiner Zeit verfassten toletanischen Tafeln und deren Verhältniss zu den Alfonsinischen werde ich ältere Quellen vorbringen, sobald mir der III. Band der *Libros del Saber* zugänglich geworden. Die hiesige kgl. Akademie hat diesen Band bis heute nicht erhalten.

wenn er ein vollständiges Exemplar besass; und doch wüsste ich kein anderes Werk in lateinischer Uebersetzung, das zu dieser Stelle passte, wenn nicht die Toled. Tafeln selbst, deren Anfangsworte ich nicht kenne. — Zu der Stelle § 9, 10 (oben unter Albategni Nr. 5), wo Algazel für Arzachel zu stehen scheint, s. unter Zael Nr. 45. — Vielleicht ist auf diesem Wege ein Spanier „Algazel" bis in den angebl. astronomischen Congress unter Alfons X. gedrungen, den ich seit 1848 mehrfach als Fiction nachgewiesen. Wenn aber Herr Rico y Sinobas sogar in Zweifel zieht, dass die Alfonsinischen Tafeln von Isak Ibn Sid redigirt seien, so ist ihm das Zeugniss eines Toledaner Juden vom Jahre 1310 entgangen. Doch darüber bei einer andern Gelegenheit.

18. *Beleni* (Var. *Babylonensis*) *et Hermetis* (*imagines*) *quae exorcitantur per* 54 *nomina angelorum*, *quae subservire dicuntur imaginibus lunae etc.*, § 51. — *Belenus de imaginibus* s. Catal. MSS. Angl. II, 245, Nr. 8460. — Identisch scheint *liber Beleni* (Var. *abolomite*) *de opere horarum*, anfangend: *Dixit Beleni qui et Apollo dicitur*, *imago prima* [*b*)] *et liber eiusdem de quatuor imaginibus ab aliis* (*his*) *separatis*, anfangend: *Differentia in qua fuerit, fiunt imagines magnae*, § 56. — Belenus, sonst häufig Belinus, scheint Apollonius von Thyana und nicht Plinius; bei den Arabern „*Balinas*", s. meinen Catal. l. h. Bodl. S. 2293 und Addenda S. CXXIII; Zur pseudepigr. Lit. S 32; Clement-Mullet im *Journal Asiat.* 1868, XI. 5; Leclerc daselbst 1869, XIV, 111; Flügel in D. M. Ztschr. XXIII, 701; vergl. XXIV, 380, A. 77; Catal. Codd. or. Lugd. Bat. III, 142, 166; Sprenger, Muhammed I, 345; B. bei G'auberi, D. M. Ztschr. XX, 486 und bei Flügel, Handschr. der Wiener Bibl. II, 502, letzte Zeile. Belinas bei V. Rose, Anecdota I, 76. — Von lateinischen Handschriften wären noch zu vergleichen: *Belini Philosophi Metaphora de Sole*, Catal. MSS. Angl. II, 1, S. 234 und Voss. 2 (vgl. *Belinus* und *Bilonius* bei Borellus, Bibl. chym. S. 42, 46). *Dicta Beleni secundum figuram* in Cod. Coll. Corp. Chr. 185,[14] (Coxe S. 75) und *libruneulus de 7 herbis, 7 planetis apparatis* (?) *Flaccii Africani*, *discipuli Belbenis* in demselben Cod. Nr. 2 (das. S. 74). „Belenius, Philosophus, magister noster", sagt Artefius, Clavis major Sap. (im Theatr. Chym. IV, 198). Vergl. Nachtrag.

19. *Gallio*, für Galen, s. unter Humaenus Nr. 32.

20. *Gaphar* (Var *Jasar*, lies *Jafar*) *quem puto fuisse Gehazar* (Var. *Ycasar*, lies *Yeafar**) *babylonensem* [für *Albalachi*, d. h. aus Balkh?], Buch beginnend: *Cum universa iudicia astronomiae*, § 41. — Ist das mit Alkindus (oben Nr. 10) gedruckte Schriftchen, angeblich von einem *Cyllenius Mercurius* bearbeitet, und dürfte schon Albert die Identität mit Albumasar (oben Nr. 6)

---

* *Glazar* in Cod. Univ. Cambr. 1705,[18] (Catal. III, 324, wo irrthümlich der Alchymist Geber identificirt wird). Die dort angegebenen Anfangsworte *Superioris discipline* ... gehören dem Vorwort des Uebersetzers.

vermuthet haben (s. D. M. Ztschr. XVIII, 128—129, 186 und Zusätze, und unten Anonyma Nr. 49). Identisch ist der *Tract. astron. de lune ducatus etc.* in Cod. Canon. misc. 105, 5 (bei Coxe S. 500).

21. *Geber* (Var. *Gebrith*), s. oben unter Albategnius Nr. 5 und Albumasar Nr. 6*c*.

22. *Gergis, liber de significatione planetarum in [XII] domibus*, anfangend: *Sol cum fuerit* (Var. *surgit*) *in ascendente*, § 47. — Drei Handschriften sind in D. M. Ztschr. XVIII, 119 (vergl. 192) angegeben. Der Namen lautet abwechselnd Jergis, Jergius, Zergius oder Gergius, wahrscheinlich auch Lib. Largis *a* [lies *aut?*] Jergan (München 228); hingegen ist Jerdagird (Ashmol. 346,[70], Black S. 256) eine Confusion mit Jezdedschird (s. unter Nr. 36). Der Anfang stimmt mit Albert z. B. in Cod. Wien IV, 119, Nr. 5474,[*] und Univ. Cambridge 1693,[7] (Catal. III, 313); in Ashmol. 393,[18] (Black S. 302): *Sol in ascendente significat principatum.* Da das Ganze überall nur ungefähr ein Blatt einnimmt, so dürfte es ein Excerpt aus *Novem Judices* (unter Nr. 50) oder daselbst aufgenommen sein. Zweifelhaft ist *Jergis, de pluviis*, anfangend: *Sol igitur quotiens ingreditur*, Wien II, 74, Nr. 2436. — Gergis ist ein noch unsicherer alter Astrolog, den schon Maschallah (unten Nr. 37*f*) citirt.

23. *Germoth Babilonensis*, von dessen Bildern und *stationes ad cultum veneris* neben *Tor* (s. Nr. 44) die Rede ist, § 51 — vielleicht zu lesen Hermes? Der „babylonische Hermes" ist wahrscheinlich eine Erfindung der Sabier (mein: Zur pseudepigr. Lit. S. 31)**. Schwerlich ist an Zerduscht (Zoroaster) zu denken.

24. *Hahuali* s. Abohali.

25. *Hali, Lib. electiorum*, anfangend: *Rogasti me carissime*, § 50, und *lib. de electionibus primus*, § 113. — Ist Ali ben Ahmed el-Imrani (so schreibt auch Flügel, D. M. Ztschr. XIII, 633), starb 954/5, dessen unedirtes Werk in zwei Büchern u. d. N. *Hali ben Hahamet Enbrani*, von Plato aus Tivoli mit dem Juden Savasorda (Abr. bar Chijja) übersetzt, in den Handschriften in der That wie oben beginnt. Siehe ausführlich in Zeitschr. f. Math. XII, 34. — Vielleicht ist er der *Imbrasius*, der neben *Masalis* (Masch-

---

* Daher ist es wohl erklärlich, dass in Cod. Canon. misc. 569,[3] (bei Coxe S. 867) *lib. de signif. omnium planetarum in singulis dom.*, anfangend: *si sol in ascendente fuerit, principatum et sublimitatem*, dem Thebit zugeschrieben ist.

** Das Land שם (zur pseud. Lit. S. 50) ist nach Geiger's Bemerkung: *Scham*, Syrien. *Nicolai Babilonici astrologia* erscheint im Verzeichniss arabischer Handschriften bei Labbeus, *Bibl. nova* S. 256, bei Libri, *Hist. I*, 245. — *Andearius*, der Babyl., über Talismane Cod. Par. 1000 bei Montfaucon S. 720 (welcher Cod. jetzt?). *Mercurius babilonice anforisina* [Aphorismen] in Cod. Boncompagni 312 (früher Libri 845), Catal. S. 136 — in demselben das Cantiloqu. des Hermes.

allah) citirt wird in den griechischen astrolog. Fragen in Cod. Cromwell 12,[11] (Coxe, Catal. Bodl. I, 436)?

26. *Haly*, *tractatus secundus ex libris Haly* (Var. *libro Aris*), § 48, — scheint das zweite Buch des „Haly Abenragel“ oder Abu'l Hasan Ali Ibn [Abi] er-Ridschal, lateinisch öfter edirt (s. vorläufig Zeitschr. f. Math. XII, 32, D. M. Ztschr. XXIV, 372, Serapeum 1870, S. 295), welches von den Fragen handelt. Das Citat § 96 (*Nativitatis sunt* [*res*] *naturales et interrogationes sunt res similes naturalibus*) aufzusuchen, wird eine spätere Aufgabe sein. — In den Wiener *Tabulae Codd. IV*, 367 (s. S. 125 Nr. 5442) wird der angebliche Haly „*ben Nargelis*“ von Aben Ragel getrennt durch „Aben Rudian“ (Ridhwan).

27. *Haly* s. unter Zahel.

28. *Hehel* s. Zahel.

29. *Hermanus* über Planisphärium, anfangend: *Hermanus christi pauperum*, § 17. — So beginnt die Abhandlung über das Astrolab des Hermanus Contractus*, welche in der Ausgabe bei Pez (*Thesaur. anecdotor. III*, S. II, S. 94) und J. P. Migne, *Patrologiae cursus*, T. 143 (Paris 1853) S. 382, zuerst überschrieben ist: *de mensura astrolabii* (vergl. D. M. Ztschr. XVIII, 166); in Cod. Sorbonne 980, f. 85, wird die Fortsetzung dem Gerbert beigelegt (vergl. Zeitschr. f. Math. XII, 5), worüber ich eine kurze Mittheilung für die D. M. Ztschr. (Zusätze zu Bd. XVIII) redigire. Eine Handschrift in vier Büchern bei J. J. Smith l. c. S. 201, Cod. 413,[2]; Unedirtes enthält auch Cod. Arundel 377,[6] (Catal. S. 111). — S. auch unter Ptolemäus Nr. 40*b*.

30. *Hermes*.

a) imagines, § 51 (s. oben unter Belenus). Ein *lib. ymaginum* über die 28 sogenannten Mondstationen (s. Alb. § 52) in Christ Church College Cod. 125,[15] und Cod. Harl. 80,[9] (I, 20 des Catalogs) wird als Uebersetzung des Hermes *i. e. Mercurius* angegeben und stammt aus arabischen Quellen; s. D. M. Ztschr. XVIII, 135 (vergl. XXIV, 386). Da dieselben Handschriften hinzusetzen: *qui latine prestigium Mercurii appellatur*, *Helyanin* oder *Heliemen* (?) *in lingua Arabica*, so liegt die Vermuthung nahe, dass auch

b) Hermetis liber praestigiorum, anfangend: *Qui geometriae aut philosophiae peritus expers astronomiae fuerit*, § 56, mit dem obigen verwandt sei. In demselben Cod. 125,[38] sind Glossen über den *liber imaginum lunae*, anfangend: *Scias quod oportet* (so) *omnem*, s. unter *d*. — Ein Fragment desselben ist vielleicht unter dem Namen des Aristoteles hinter Ptolemäus an Ariston (unter Nr. 40*e*) gedruckt?

---

* Vergl. über ihn Cantor, Mathem. Beitr. S. 332 (Haupt's Zeitschr. f. Alterth. XI, 715, XIII, 434).

c) *Liber lunae*, anfangend: *Probavi omnes* (*tres*) *libros*, § 56, scheint dem Zusammenhange nach ebenfalls dem Hermes beigelegt. Der erwähnte *lib. imag.* heisst auch zuletzt *lib. lunae*, *de* 28 *mansionibus lunae etc.* In arabischen und hebräischen Quellen ist auch sonst von einem astrologischen „Buch des Mondes" die Rede (s. zur pseudepigr. Lit. S. 85, 87, bei Nachmanides anonym als nekromantisch), abgesehen von den alchemistischen hermetischen Beziehungen zu Sonne (s. unten) und Mond. So scheint auch der anonyme *lib. lunae* in Cod. Digby 28 (Catal. MS. Angl. I, 78, Nr. 1629) alchemistisch. Vielleicht ist Albert's Mondbuch nur ein Theil eines hermetischen Buches über die Planeten; es folgen nämlich §§ 57—59:

d) *lib. imaginum Mercurii* in vielen Tractaten: *de imaginibus, de characteribus, de annulis, de sigillis:* nur von letzterem erinnert sich Albert des Anfanges: *Dixit expositor huius libri opportet hanc scientiam* (*substantiam*); scheint ein Commentar; vergl. oben *a* und unten zu *i*.

e) *lib. Veneris*, ebenso abgetheilt; Abschnitt *de annulis* beginnt: *Mentio decem capitulorum atque annulorum veneris.*

f) *lib. Solis*, anfangend: *lustravi plures imaginum scientias*, wovon er nur den Abschnitt *de charact.* gesehen; andere sind vielleicht nicht übersetzt. Vergl. unten zu *i*.

g) *lib. imaginum Martis*, beginnend: *Hic est liber Martis quem tractat.*

h) *lib. Jovis*, anfangend: *Hic est lib. Jovis quem tractat.*

i) *lib. Saturni*, anfangend: *Hic etc. tractat Hermes triplex* [d. h. Trismegistos] Auch von diesen Dreien sah er nur einzelne Tractate *. Es folgt auf diese 7 Bücher:

---

* Hierher gehört vielleicht das Fragment eines mehrtheiligen Werkes in Cod. Canonic. 500,[4] (Coxe S. 816), nämlich *lib. III cap.* 1: *De partibus planetarum existentibus in plantis, animalibus et metallis;* anfangend: *Postquam in praecedenti libro sumus loquuti de imaginibus et figuris celi.* Dann *lib. IV in quo ostenditur de proprietatibus spirituum, et de iis quae necessaria sunt in arte ista, et qualiter cum imaginibus et suffumigationibus illis adiuvantur.* Cap. 1, über Eigenthümlichkeiten der Geister, beginnt: *Sapientes vero antiqui in hoc sunt concordati.* Vergl. auch *Lib. de* 7 *figuris* 7 *Planetarum* unten zu Anon. Nr. 52, und Anderes unter Rasiel Nr. 41. — Die Sculpturen der Planeten in Steinen behandelt Cam. Leonardi, Buch II f. 50*b* [Cap. 12]. Aus solchen Quellen stammen vielleicht die Abbildungen der Planeten in alten Drucken astrologischer Schriften. — Die Universitätsbibliothek in Cambridge, Nr. 1255,[14.15] (II, S. 447 des engl. Catalogs) enthält ein *lib. solis* und *Saturni secundum Hermetem*, oder vielmehr einen Commentar eines *Galeni Alfakini* [d. h. wohl des „Weisen", arab. *al-hakim*] alchimistischen Inhalts; identisch scheint die *Expositio Galeni in Hermetis lib. Secretorum* in Cod. Coll. Corp. Chr. 125,[17] (Coxe S. 45; vgl. zur pseud. Lit. S. 49). — Ein Zurückgehen auf die weitverzweigte hermetische Bibliographie nach orientalischen Quellen würde hier zu weit führen; Sachliches ist von Chwolsohn (die Ssabier u. s. w.) gesammelt.

k) *„Tractatus octavus in magisterio imaginum"*, alle dem Hermes beigelegt.

l) *De quibusdam medicinis in coniunctionibus planetarum*, anfangend: *„Quando Saturnus iungitur Jovi"*, soll, wie das folgende, nicht nekromantisch, sondern mehr *naturalis* sein, § 63.

m) *De decem confectionibus ad capiendum animalia silvatica ut lupos et aves . et ipse est lib. Hermetis ad Aristotelem*, anfangend: *Dixit Aristoteles, vidisti me o Hermes.* Vergl. zur pseud. Lit. S. 39, Alfarabi S. 26, 241.

31. *Homar* (Var. *Manar*, lies *Aomar*) *Tyberiades*, ein Buch über Nativitäten, anfangend: *Scito quod divisiones nativitatum*, § 44 — ist Abu Hafs Omar ben Ferrukhan (?) at-Tabari, Arzt und Astrolog unter dem Khalifen Maamun (zur pseudepigr. Lit. S. 77, D. M. Ztschr. XVIII, 179). Das erwähnte Buch ist mehrmals gedruckt (Ausführliches in meinen Zusätzen zu D. M. Ztschr. XVIII); als *Aomar* erscheint er im Buch *novem judicum* (unten Nr. 50). Aus Ferrukhan oder Farchan wurde auch *Fargan* und *Alfarghani*, und daher vielleicht der Name „Tiberiadis" auf Alphraganus (oben Nr. 13) übertragen. IV Bücher und als Uebersetzer Johannes Hispalensis in Wien II, 208, Nr. 3124,[8], vergl. S. 73 Nr. 2436,[2] und IV, 125, Nr. 5442,[16]: *Alfragani.*

32. *Humaenus filius Ysaaç. Liber agnonis* [für *nevemis, anagnanis*] *secundum Gallionem* [lies *Galienum*, Galen] *ex dictis humaeni filii Ysaac:* worin einige *foeda capitula*, § 64. — Ist ein dem Plato beigelegtes berüchtigtes *liber institutionum*, dessen Bearbeitung durch Honein ben Ishak mit einem Citat aus Galen zu beginnen scheint und auch in hebräischer Uebersetzung erhalten ist; s. die Nachweisungen: zur pseudeprigr. Lit. S. 57; D. M. Ztschr. XVIII, 155; Virchow's Archiv Bd. 37 S. 366; Bd. 52 S. 358, 493; Serapeum 1870, S. 297.

32*b*. *Jasar* s. Gaphar.

33. *Johannes Hyspalensis.* Zweifelhaft ist mir die Stelle § 10: *et apud. Joh. algēbū (iebitim) hyspalensis (hispanensem) motus veneris et mercurii [in libro?] quem nominavit „flores suos"*. Ein solches Buch ist mir unbekannt, obwohl ich seit ungefähr 20 Jahren die Nachrichten über diesen bekannten Uebersetzer (1135—1142), einen gebornen Juden, sammle, der auch Johannes David oder Abendehut (falsch „Abendana") hiess (s. vorläufig *Cat. Bodl. p.* 1402; D. M. Ztschr. XVIII, 123, 125, 169; Hebr. Bibl. 1870, S. 56—58; mein Alfarabi S. 83; Serapeum 1863, S. 100; Cantor, Mathemat. Beiträge S. 275; Wöpcke, *Mém. sur la propag. de chiffres ind. p.* 155, 186; vergl. auch oben unter Alfargani u. A.; Jourdain in d. *Biogr. univ. XX*, 645 ed. 1858).

b) Ein Werk über das Astrolab, welches er übersetzte, anf.: *Astrologiae speculationis*, § 17, s. unten unter Maschallah Nr. 37*b*.

c) Ein anderes, *secundum Joh. Hisp. de utilitate et opere astrolabii*, anfangend: *Primum capitulum in immutationibus* (Var. *de inventionibus!*) — Die Uebersetzung des Werkes, als dessen Autor *Albuhacim Mecherit* u. s. w. (d. h. Abul-Kasim Maslema al-Medschriti) genannt ist in Cod. Merton 259,[3] (Coxe, Catal. S. 102, Cat. MSS. Angl. I, P. II S. 22 Nr. 726 bei Heilbronner S. 624 § 328,[2]: *Practica Astrolabii secundum Alkabitium!*), beginnt: *Primum horum est armilla per quam suspenditur*, und hat 40 Capitel, scheint aber nur eine andere Recension des, von Plato Tiburtinus übersetzten Werkes, angeblich vom Schüler Medschriti's, Abul-Kasim Ahmed Ibn a's-'Saffar (D. M. Ztschr. XVIII, 125). Offenbar identisch ist das anonyme *de usu Astrolabii* in Cod. Univ. Cambr. 1935,[9] (III, 549): *Primum Capitulum astrolabii in inventione nominum* [so ist demnach bei Albert zu lesen] *super illud cadentium. Primum horum est Armilla etc.;* ferner Cod. Reg. Suec. 501 im Vatican (bei Montfaucon S. 25[b], Heilbronner S. 541 § 8 Nr. 15): *Lib. de scientia Astrolabii auctore Abilcacim de Macherit:* vielleicht auch: „*Maceralama*“ *de Astrolabio* in Cat. MSS. Angl. I, 300, Nr. 6567 (Saevill 21), bei Heilbronner S. 618 Macerolama? — Ein *Tractatus de astrolabio componendo et de regulis eiusdem Joh. Hispalensis cum tabulis* in Cod. Canonic. 340,[4] (bei Coxe S. 693) beginnt: *Dixit Johannes. Cum volueris facere astrolabium accipe auricalcum optimum.* (Gehört das folgende: *de horis diurnis, de planetis etc.*, anfangend: „*Capitulum V.*“ noch dazu?). Identisch scheint der, ausdrücklich als Uebersetzung aus dem Arabischen bezeichnete *Lib. astrolabii*, anf.: *Dixit Johannes cum volumus*, Ende: *tertio bisextus*, in Wien II, 77, Nr. 2452,[1]; vgl. auch unten unter Maschalla S. 377. Ueber das Astrolabium des Joh. Hispal. in Cod. Paris 7292,[14] (Catal. IV, 336) ist mir nichts Näheres bekannt und wäre mir eine Auskunft über die letztgenannten Handschriften für eine Specialabhandlung sehr erwünscht.

d) Ein zur Classe der Einleitung in die Astrologie gehörendes Buch, anfangend: *Cinctura firmamenti*, § 33. — Ein *Tractatus Jo. Hisp. de signis coelestibus eorumque effectibus*, anfangend: *In nomine domini creatoris cinctura firmamenti*, endend: *nam libenter ex istis emptis* (!), enthält Cod. Wien IV, 129, Nr. 5463,[4]. Ist dies eine abweichende Recension des folgenden Buches?

e) Lib. qui dicitur prima pars artis, anfangend: *Quantum huic arti*, §§ 39, 41; — *Liber qui dicitur secunda pars artis*, anfangend: *Primum est considerandum*, § 44; — *Liber quem vocavit* (*vocant*) *tertiam partem artis*, anfangend: *Est sciendum Aronos* (*tornos*) [lies *domos*], § 48.

Eine Epitome des Joh. (verf. 1142) erschien Nürnberg 1548; sie enthält zuerst eine Isagoge, anfangend: *Zodiacus dividitur in duodecim signa.* So beginnt das *Opus quadripartitum de iudiciis astrorum*, endend: „*nam libenter erit istis emptor*“ *etc.* (vergl oben *d*) in

Cod. Wien IV, 125, Nr. 5442,[6]; ebenso (nur endend: ...*exsit istis emptis*) das *Introductorium in scientiam iudiciorum* in Wien II, 74, Nr. 2436,[22]. — In der Ausgabe folgen auf die Isagoge: *libri quatuor de iudiciis astrol.*, und zwar *I. de gentibus etc. Cap. primum. Considerandum est quod signum* (also oben die *sec. pars*)*. Dann folgt *II. lib. nativ.*, *III. de interrogationibus*, anfangend: *Cum auxiliante Deo complevimus duas huius artis partes nunc ad tertiam accedemus quae est de quaestionibus ... Et est sciendum domos firmas significare*; ohne Zweifel die „*tertia pars artis*". Das „*Quadripartitum*" des Joh. Hisp. befand sich im Kloster St. Marco in Florenz, Arm. 4 Nr. 17 (Montfaucon S. 428, fehlt bei Heilbronner S. 558).

34. *Kiranidorum liber de nova Kyranide*, § 64. — Ueber die s. g. Kiraniden s. u. A. Meyer's Geschichte der Botanik Bd. II; Th. H. Martin, *Mém. sur ... la précession des equinoxes* (Sonderabdr. Paris 1869, S. 64).**

35. *Machmeth* über 7 und 15 Namen, § 54, genauer § 62: *Ex libris Mahumet est liber septem nominum*, anfangend: *Dixit Mahumet filius alhozen* (Var. *nuntius Alahasedonem*)*** *et* [*b.*] *liber* 15 *nominum*, anf.: *Haec sunt* 15 *nomina secreta*. — Die Araber haben viele Schriften über Gottesnamen; eine lateinische Uebersetzung ist mir unbekannt.

36. *Machometus Alchochandi* (Var. *Alkacorinthes*) †, welcher *Canones* nach den Jahren der Perser, genannt *gedagirz* [d. h. Jezde-

---

* In Cap. 2 kommen die 120 Conjunctionen, welche auch Albert, § 34, erwähnt; vergl. Ibn Esra zu Exodus 33, 21 (und d. Supercomm. von Motot zur Stelle), vergl. zu 3,15 und Daniel 11, 1; auch desselben beide Recensionen des astrolog. *de mundo vel seculo;* von Arabern Ahmed in Comm. zum Centiloqu. des Ptolemäus [s. unten Nr. 40*f*] zu Nr. 50; vergl. Jo. de Saxonia zu Alchabitius, Diff. IV f. 75*b* ed. 1521.

** Vergl. auch unter Rasiel Nr. 41. — Ein kleiner Tractat *aureum compendium* über 7 Pflanzen und 7 Planeten soll in Troja im Monument des ersten Königs Kyran aufgefunden sein; Cod. Wien IV, 87, Nr. 5289,8; über 7 von den Planeten abhängige Pflanzen soll Alexander [der Grosse?] geschrieben haben, daselbst II, 208, Nr. 3124, 14.

*** Vielleicht *nuntius Allah?* ... oder *Mohamedanorum?*

† *Alchocharithmi* nach HS. Paris 7440 bei Reinaud, Einleitung zu Abulfeda S. CCXLII und *Mémoire sur l'Inde* S. 375. — Vergl. *Mohamel* (*sic*) *Hoarzuni Correctiones in tabulas Theonis Alexandrini* im Verzeichniss der arabischen Handschriften bei Labbeus, *Bibl. nova*, *p.* 257, wofür bei Libri, *Hist. I*, 245: *Theonis Alex. astron. tabulae* und *Mohame* (*sic*) *Hoarzinai correctiones in tabulas*. Diese und das bald folgende *Instrum. astron.* sind bei Wenrich (*De auctor. graec. vers. p.* 297, 306 unter Theon) nachzutragen, vergl. auch Hagi Khalfa III, 470, VII, 563, 747; im Index VII, 1242, Nr. 8928 ist der Philosoph Theon VI, 97, wahrscheinlich der Smyrner (s. mein Alfarabi S. 126, 178, Schahrastani II, 189) ohne Weiteres identificirt; vergl. Heilbronner S. 333, 374; Th. H. Martin zu Theonis Smyrnaei Lib. de Astron. (Paris 1849) S. 9. — Die Wiener HS. III, 382, Nr. 4770, enthält: *Lib. restaurationis et oppositionis numeri, quem edidit Mahumed filius Moysi Algaurizim'*, *quem Robertus Cestrensis*

LIBRARY OF THE UNIVERSITY

gird]*, verfasste, und zwar nach dem Meridian von *Arim* u. s. w., § 14. — Ohne Zweifel Muhammed ben Musa al-Khowarezmi (IX. Jahrh.), dessen astron. Tafeln in der Uebersetzung des Adelard von Bath seit langer Zeit von Chasles zur Herausgabe vorbereitet sind (D. M. Ztschr. XVIII, 172, wo noch das Citat: *Zigil Alchuarchim* in der Uebersetzung des Albumasar nachgewiesen ist; vergl. auch XXIV, 334, 339, 370 Anm. 38). Ueber *Arim*, richtiger *Arin*, s. D. M. Ztschr. XXIV, 329.

37. *Messahala* oder *Messahalach* (*Mesalach*, *Mesale*) — richtiger Maschallah **, jüdischer Astrolog unter den Khalifen Almansor bis Maamun (s. Catal. Bodl. S. 1677 flgg. und Addenda; zur pseudepigr. Lit. 33, 42, 77, 78; D. M Zeitschr. XVIII, 119, 121, 166, 183, 192, XXIV, 338; s. auch Hammer, Literaturgesch. III, 257, und Reinaud, *Mémoire sur l'Inde*, *p.* 325).

a) *De scientia motus orbis*, anfangend: *Incipiam et dicam quod et cetera* (so) *orbis*, § 8. — Unter diesem Titel erschien das Buch 4. Nürnberg 1504, dann u. d. T. *De elementis et orbibus* 1549 (Cat. Bodl. S. 1679, D. M. Ztschr. XXIV, 338). *Incipiam et dicam* beginnt auch Cod. lat. München 53,[4] f. 16d (*de motu orbis et natura eius*).***

b) Ein Buch über Astrolab, anfangend (!) *Opus Astrolabii*, § 17. — Maschallah's Buch (Catal. Bodl. S. 1677,[6]) ist in lateinischer Uebersetzung seit 1512 öfter als Appendix oder Bestandtheil der *Margarita philosoph.* (v. G. Reusch) gedruckt (s. die Nachweisungen im Serapeum 1870 S. 311, wo auch die Confusion bei Fabricius, Bibl. lat. med. unter Stephanus Messahalus beleuchtet ist †, vergl. D. M.

[s. unten Nr. 48] *de arabico in latinum in civitate Segobiensi transtulit. Incipit 'Dixit Mahumed: Laus Deo qui homini...' Expl. 'que his attinent agendum est.'* Von dieser Uebersetzung der Algebra des in neuerer Zeit vielfach besprochenen Autors war bisher nur eine unsichere Notiz bekannt (D. M. Ztschr. XVIII, 168).

* Vergl. *Gerdagut* in der Einleitung der Canones des Arzachel, übersetzt von Gerard (HS.); *Jerdagut* in den Alfonsin. Tafeln MS. bei Rico y Synobas l. c. V, 135; die Endworte *jam Dagirt* des anonymen *de ortu et occasu signorum* bei Bandini II, 81, Cod. 24, 5. — Vergl. auch Abu Ma'ascher *de magnis conjunctionibus*, Ende Tr. II und VIII, 2, und oben unter Gergis Nr. 22.

** Das Wort bedeutet „Was Gott will" [vielleicht hebr. *Joab* oder *Joel?*], vergl. *Voluntas Dei* in Catal. MSS. Angl. II, P. II S. 46 Cod. 866, und *qui liber* (!) *dicitur quod Deus voluerit*, Cod. Ashmol. 393,[17] bei Black S. 301, richtiger *Messahala qui interpretatur quon* [lies *quod*] *Deus voluerit*, das. 393,[38], Black S. 303. In der *Hist. litér. de la France XXI*, 433 werden unter den Quellen der französischen Astrologie (um 1270) in Cod. Par. 7485 angegeben: Hermes, Ptolemäus, „Messahalah, le juif Alkindi",; es muss heissen: „M. le juif, Alkindi".

*** *Lib. in quo creatio* (!) *orbis et motus eius et natura editione Messehalae* in Cod. Harl. 13,[22] (I, 3 des Catal.).

† Inzwischen fand ich in den Wiener *Tabulae IV*, 904, Nr. 5337,[19]: *Stephanus Messahala: Canones de astrolabio conficiendo*, anfangend: *Scribitur primo posteriorum*, also wohl identisch mit den anonymen *Canones novi astrolabii* in Cod. 4987,[1] (III, 464),

Ztschr. XVIII, 166, Sedillot, *Mémoire sur les instruments etc.* S. 150, *Matériaux etc.* S. 338)*; der Titel ist daselbst *De compositione Astrol. Messahalath*, in 2 Abtheilungen, die erste hat 11 Capitel, 1 *de praeparatione matris* beginnt: *Astrolabium nomen graecum est;* HSS. haben *Scito quod Astr. etc.***. Die 2. Abtheil.: „*utilitates*", hat 46 Paragraphen, 1 *de inventione veri motus solis*, 46 *de mensurationibus*. In der (in Anmerk. ** erwähnten) HS. Barb. 3453 *** folgt f. 51: *Liber de constitutione astrolabii*, anfangend: *Astrologiae speculationis exercitium habere volentibus: Astrologice etc.* in dem anonymen *Tractatulus de usu astrolabii*, oder (zu Ende) *liber regularum astronomie*, Cod. Merton 259,[7] (Coxe S. 102). *Astron. specul.* giebt Albert als den eines Werkes von Joh. Hispalensis (oben Nr. 34 *b*)†. — In Cod. Barb.

---

anfangend: *Scribit Aristoteles primo posteriorum — scribitur* ist also aufzulösen *scribit Ar.* — Cod. 5331 endet *umbre verse;* Cod. 4987,[1] bricht mit den Worten *pisces venus mars* ab. Im Index des IV. Bandes S. 382 wird von dem Namen Steph. keine Notiz genommen. Vergl. Stephanus de Messaria in dem deutschen astronom. Werke daselbst II, 160, Nr. 2950,[2].

* Lalande hat in seiner voluminösen Bibliographie keine einzige Ausgabe des Werkchens angegeben; über die *Margarita* selbst s. S. 16 unter 1486 und S. 38 unter 1508.

** So beginnt z. B. *Cod. canonic. misc.* 61 (Coxe S. 473), Wien II, 63, Nr. 2367,[4], S. 66 Nr. 2386,[1], das „Prohemium" in Cod Barberino 3453 des Vatican (s. weiter unten), so die anonymen Handschriften in Cambridge Univ. 1684,[7] und 1935,[6] (Catal. III, 302 und 548), St. Johns Coll. f. 25,[2] (S. 60 bei Cowie), Boncompagni 326 f. 16 (Narducci S. 143), und gewiss noch viele andere unerkannte. *Sciendum quod* liest man in Cod. Ashmol. 1796,[7] (Black S. 1506).

*** Die nachfolgenden Mittheilungen über diese Handschrift verdanke ich der bekannten Liberalität des Fürsten Boncompagni (Herbst 1866).

† Die Wiener *Tabulae IV*, 119, Nr. 5412,[7] verzeichnen: *Tract. de Spera solida sive de astrometro sperico*, verf. **1303** mit Commentar, anfangend: *Totius astrologice speculationis radix*. Das angebliche Ende *a puncto cenith in villa illa* gehört aber einem andern Werkchen (dem sogenannten Commentar?); denn S. 120 Nr. 5415,[3] wird als Ende des Tr. *de compositione sph. solidae* (auf. *Tocius astr. etc.*) angegeben: *et quoniam de mensura tractare non est presentis operis hunc tractatum cum laude dei finiemus;* dann folgt als 4: *Tractatus de sphaera volubili;* anfangend: *Dixit quasti filius luce Augeat deus*, Ende: *a puncto cenith in villa illa*. Das letztere findet sich auch IV, 81, Nr. 5273,[7] als *Lib. in opere sphere volubilis quem composuit Quasti filius Luce ad Abulhassin servum Dei* [Abd Allah] *filium Johannis;* aber nur Nr. 5273 ist im Index S. 393 unter Quasti zu finden. Dies ist sicher das Schriftchen des Costa ben Luca, über welches ich im Serapeum 1870 S. 294 ausführlich gesprochen; die hebräische Uebersetzung des Jakob ben Machir (der noch 1303 lebte) endet ebenso: בסבח הראש בעיר ההוא ודעהו, sie ist aus einer Handschrift des Oratoire bei Montfaucon S. 1405 (bei Heilbronner S. 586 § 195,[2]) unter dem Namen Castus ben Lucia erwähnt. Identisch ist auch ohne Zweifel der anonyme *Tract. spherae solidae continens Capp.* 65 in der Bibliothek des ehem. St. Marco-Klosters in Florenz Arm. 4 Nr. 31, bei Montfaucon S. 428 (übergangen bei Heilbronner Ende § 60). In Bezug auf den lateinischen

f. 57 folgt ein *Epilogus in usum et operationes astrolabii Messahale et aliorum*, anfangend: *Nomina instrumentorum astrolabii sunt hec.* Die *Practica Astrolabii* Cod. Arund. 268,[8] (I, 80) beginnt ebenso; Cod. Boncomp. 328, vormals Libri 664, an dessen Ende die Buchstaben R. E. (Richard Elys), führt fort: *primum est Armilla.* Identisch scheint auch Cod. Libri 236 (Cat. S. 55) *de opere Astr.*; ferner *de astrol.*, anfangend: *Nomina*, in Cod. Ottob. 399 f. 144 hinter der Uebersetzung Plato's (s. Boncomp. in *Atti dell'Acad. pontif.* XVI, 1863, S. 754); Cod. Par. 7416 *B*[10]: *Nomina instrumentorum astrol. cum eiusdem usu et praxi*, vor Maschallah. Die *Practica Astrolabii* finde ich nachträglich noch in Cod. Ashmol. 340, II, 1 (Black S. 234), 361,[4] (S.

Uebersetzer Stephanus Arnaldi bemerke ich noch, dass dieser sonst unbekannte „Diaetarius" vielleicht der gleichnamige Verfasser des *Diaetarium continens tres partes principales* in Catal. MSS. Angl. I, 128, Nr. 2462,[9] (bei Haller, Bibl. med. pract. I, 453: *Arnoldi Diaetarium*). — Wichtiger für uns ist der zuerst genannte *Tr. de sphera solida* wegen des Datums 1303, weil ein zu dieser Zeit verfasstes oder übersetztes Buch nicht von Albertus citirt sein könnte; ich gebe daher noch weitere Nachweisungen. Die ebenso betitelte anonyme Handschrift Ashmol. 1522,[17] (Black S. 1429) ... *sive de Astrolabio Spherico*, anfangend: *Tocius astr... et fundamentum eius* (*eiusque prolixitatis immensitas* in Cod. Ashmol. 1796,[1], Black S. 1505) beginnt im 2. Theile: *Caput primum de utilitatibus generalibus huius instrumenti. Et postquam auxiliante Deo scripsimus*, und endet, wie Cod. Wien 5415: *Et quoniam de mensura ... presentis operis ... cum laude etc.* Cod. Ashm. 1796 hat *A. D. M.* 13[0] für 1303, besteht aus Prolog und 2 Theilen zu 9 und 14 Capiteln, Ende: *nunc autem geometricas utilitates que ex cordis sumuntur dicemus. Explicit liber deo gratias.* Die erwähnte Handschrift des ehemal. St. Marco-Klosters in Florenz Arm. 4 Nr. 31 (Montfaucon S. 428, bei Heilbronner S. 558 § 60 Nr. 33) hat die Ueberschrift: *Tract. de Sphaera solida etc. A. D.* 1303 *per Joh. de Harlebeke de Olaus.* Dieser Holländer, über welchen ich noch keine nähere Nachweisung gefunden, ist wohl ein jüngerer Abschreiber? — Cod. 46 Plut. 29 der Laurentiana, bei Montfaucon S. 300 (abgekürzt bei Heilbronner S. 554 § 45 Nr. 9), genauer bei Bandini, II, 62, hat nach den Worten *A. D.* 1303 den Zusatz: *Dominus Accursius de Parma fuit* („*ita enim videtur legi posse*" schaltet Bandini ein) *principium huius operis.* Sollte etwa *fecit* das Richtige sein? Bandini weiss wiederum Nichts über diesen Accursius heranzubringen. Der Prolog endet: *tunc invocato prius divino auxilio ad hujus instrumenti compositionem procedemus.* Die Schrift selbst hat im 1. Theil 10 Capitel, 1. *De formatione instrumenti*, anfangend: *Quum igitur favente Domino, volueris hoc instrumentum componere* (vgl. Joh. Hisp. c. bei Albert), Cap. 10 *de formatione lilii*, endet: *eritque in hoc compositio ipsius sperae instrumenti completa.* Der 2. Theil hat hier keine Capiteleintheilung, handelt wie oben über *utilitates generales* und beginnt: *Postquam auxiliante Deo scripsimus*, Ende *hunc tractatum sub laude Dei finiemus.* Man sieht hieraus die weite Verbreitung dieser Schrift und die Unsicherheit in Bezug auf den Autor. Woher stammt das Jahr 1303? — Vielleicht gewährt irgend einen Aufschluss der Tractat *de sphaera solida*, welcher 1518 hinter Sacrobosco gedruckt, aber mir nicht zugänglich ist; s. die Beschreibung des seltenen Buches bei Boncompagni, ... Platone di Tivoli S. 13. — S. Nachtrag.

278 unvollst.), 1522,[10] (S. 1428), 1796,[10] (hinter Maschallah), mit dem Ende: *talis est comparatio stature tue ad* (*totam* in Cod. 1796) *planitiem*. Hiernach ist identisch die anonyme Abhandlung *de astrolabio* in Wien 3105,[8] (II, 197), anfangend: *Omnia* [wahrscheinlich für *nomina*] *instrumentorum nomina*, endend: *totam planitiem*, endlich wohl auch *„de nominibus variorum instrumentorum"* (wegen des Anf.: *nomina instrumentorum sunt hec*) in der Universitätsbibliothek zu Cambridge Cod. 1684,[8] (III, 303), wiederum hinter Maschallah, jedoch endend: *scies altitudinem turris*. — In Cod. Barb. f. 83 folgt noch: *De mensurationibus altitudinum*, anfangend: *Consequenter dicendum est de mensurationibus*, und f. 111: *Quantum ad partem primam procedo ad practicam huius instrumenti*. Das Verhältniss dieser Stücke ist noch zu untersuchen.

c) Ein Buch von 12 Capiteln, genannt *Epula* [lies *Epistola*], anfangend: *Quia Deus altissimus*, § 36. — Ist die *Epistola de rebus eclipsium et de conjunctionibus Planetarum et in revolutionibus annorum*, übersetzt von Joh. Hispalensis, gedruckt 1493, 1549, und unter dem Titel (aus d. Ueberschr. des 1. Cap.) *De ratione circuli etc.* mit Julius Firmicus f. Basel 1533 (Lalande S. 51: *de circulo et stellis*) und 1551 (Catal. Bodl. S. 1679 Nr. 4, 5; *„cum 12 capitulis"* auf dem Titel der Ausg. 1493 bei Boncompagni, *Delle versioni fatte di Platone Tiburtino*, *p.* 28). Identisch scheint *de eclipsibus* bei Heilbronner S. 541 §§ 8, 17; S. 544 §§ 18, 19; S. 598 § 247,[11]; S. 607 § 278,[3]; vergl. Cod. Canon. 396,[6].

d) *Lib. revolutionum*, anfangend: *Custodiat te Deus*, § 39. — Gedruckt 1493, s. Cat. Bodl. S. 1679 Nr. 2.

e) *De inscriptionibus* (!), anfangend: *Invenit quidam*, § 47. — Gedruckt u. d. T. *de receptione planetarum i. e. de interrogationibus*, wie es wohl auch hier heissen muss, übersetzt von Joh. Hispalensis; s. l. c. S. 1680 Nr. 9.

f) *De inventionibus occultorum*, anfangend: *Scito quod aspiciens*, § 47. — Gedruckt sind nur die ersten 12 Zeilen eines Buches *de Interpretationibus*, anfangend: *Scito quod Astrologus potest errare*; aber die vollständig erhaltene hebräische Bearbeitung (*de Interrogationibus*) des Abr. Ibn Esra beginnt: „Wisse, dass der Beobachter sich hüten muss" u. s. w.; l. c. Nr. 8 (vergl. D. M. Ztschr. XVIII, 119).

g) *De interpretatione cogitationis*, anfangend: *Praecipit Messahalla* (Var. *Mose!*), § 47. — Das gedruckte *de cogitationibus* (Cat. S. 1680 Nr. 7) beginnt: *De cogitationibus ab intentione refertur et praecipit Messahala ut constituas ascendens*, Cod. Ashmol. 393,[16] (Black S. 301, der die Ausgabe nicht beachtet). *De secretis Astronomie. liber Mess. de interpr. cogitationum*, hat eine kurze Vorrede: *Cum astrorum scientia difficilis fuerit cordetenus inspicientibus*, zuletzt *Expl. lib. de intencio-*

nibus secretorum astronomie. Identisch sind die anonymen Codd. Ashmol. 191, II,[14] (Black S. 159) und 346,[69] (S. 256); eine englische Uebersetzung in Cod. 396,[10] (S. 312) beginnt, ohne jene Vorrede, wie Alb. angiebt: *Messahalache commandithe etc.;* ebenso das angebliche *de interrogationibus* in Wien II, 73, Nr. 2436,[4]: *Praecipit M. ubi constitutis* (!), hingegen *Tract. de intentione et cogitatione III*, 383, Nr. 4773,[3]: *Constituas astronomiam* (!) *per instrumentum.*

38. *Nembroth gigas*, schrieb ein Buch an seinen Schüler *Lerobanthes*, Var. *Iohathon*, anfangend: *Sphera celi*, § 7. — Aus *Lib. responsionum magistri Nemroth ad discipulum Joaton* findet sich ein kurzes Excerpt in Cod. Ashmol. 191,[23] (Black S. 156), anfangend: *Dico enim quod de oriente.*

Nembrot tabulae arabicae erscheint im Verzeichniss herauszugebender Bücher bei Labbeus, *Bibl. nova* in 4⁰ S. 257, und bei Libri, *Histoire des sc. math. I*, 245. — Dass hier Nimrod gemeint sei, kann keinem Zweifel unterliegen*; schwieriger ist die Frage, ob erst eine jüngere Amalgamirung biblischer und persischer Sagen über Nimrod, Abraham und Zoroaster (s. B. Beer, Leben Abraham's, S. 115 und 109, und Nebrod in D. M. Ztschr. XIX, 34, die Wurfmaschine bei Dieterici, der Streit zwischen Mensch und Thier S. 38, 82, 171, die theilweisen Erfindungen Ibn Wahschijja's bei Chwolsohn, Reste altbabyl. Lit. S. 52, 72; vergl. auch Weidler, Hist. astron. S. 18 flgg. und über „Kainan", Hebr. Bibliogr. 1860 S. 117, 1861 S. 22 flgg., vergl. IX, 115) den N. zum Autornamen gemacht, und ob die Occidentalen ihn erst von den Arabern oder schon von den Byzantinern erhalten haben. Da eine Zusammenstellung der Citate mir unbekannt ist, so mache ich hier einen Anfang.

Nemroth et Hyspaicus, duo corrupta nomina scriptorum apud Honorium Augustod. II, 5 *de philosophia*: Fabricius, Bibl. Gr. IV, 165. (Honorius lebte um 1300, nach Fabricius, Bibl. l. med. IV, 277.) Heilbronner S. 59 berichtet, dass nach Einigen die sogenannten „Chaldäer" ihre Wissenschaft von den Nachkommen Nimrod's erhalten haben, ohne Quelle. In einer alten handschriftlichen französischen Einleitung zu einer Astrologie, in Versen (Cod. Par. 7485, s. Paulin Paris in der *Hist. lit. de la France XXI*, 423) wird erzählt, Jonites, der vierte (!) Sohn Noah's, war der erste Astronom und übergab die Resultate seiner Beobachtungen dem Nimrod. Später betrieb Thamar (für Tharah!), Vater Abraham's, die Wissenschaft, die dann vernachlässigt wurde.

Bei Hugo von St. Victor (1097—1141), Didascalion l. III c. 2 (Bd. III S. 7 Ausg. 1588) liest man: *Astronomiam Ptolomaeus rex Egypti reparavit. Hic*

---

* Nebroth gigas erscheint schon als Gründer Babylons bei *Gregor. Tyronens., de cursu stellar.*, ed. Haase, Breslau 1853 S. 9, wo die Form *Nembroth* aus Gregor's Hist. franc. angemerkt wird; letztere liest in der Ausg. Paris 1836, I, 11: *Nembrod.*

etiam canones instituit, quibus cursus astrorum invenitur. Aiunt quidam Nemrod gigantem summum fuisse astrologum, sub cuius nomine etiam astronomia invenitur.*

Gegen Ende der *Theorica Planetarum* des Gerard von Cremona (aus Sabionetta, um 1260), Ausg. 1478 f. 47, also 1 Blatt vor dem Ende des Bandes (nach freundlicher Mittheilung des Fürsten Boncompagni, die hiesige k. Bibliothek besitzt nämlich keine Ausgabe des Buches), liest man: *Compositores tabularum super Arim que est civitas in India dicuntur fuisse Nembroth: Hermes: Hyconimus: Ptolomaeus: Albategni, Albumaçar, Algorismus etc.* Die hebr. HS. München 249 enthält den lat. Text (mit hebr. Lettern) und eine der beiden hebr. Uebersetzungen der Theorica (s. Hebr. Bibliographie 1864, S. 112). Daselbst, f. 66[b], liest man *Nemrod* oder *Nembrot*; dieser Name fehlt wohl in der Handschrift Paris 7421, oder Reinaud (Einleit. zu Abulfeda S. CCXLVIII, *Mémoire sur l'Inde p.* 383) hat ihn weggelassen. — Für Hyconimus hat die anonyme Handschrift Wien II, 77, Nr. 2454 *Vconymus*, die erw. h. HS. München hat im lat. Text: ניקומיאוש איקומינוש, offenbar eine Correctur, die hebr. Uebersetzung die bessere Lesart *Icominus*, worin ich den oben (Nr. 14) erwähnten Humenus erkennen möchte.

Augustinus Ricius (1521, s. meinen Catal. Bodl. S. 2143), *De motu octavae sphaerae f.* 18[b], nennt Nembrot: *autor gravis atque antiquus*, ohne Quellenangabe.

39. *Nismeroh* s. Aranentob.

40. *Ptolomaeus Pheludensis* **.

a) *Magasti*, arabisch *Almagesti*, lateinisch *major perfectus****, anfangend: *Bonum est scire*, § 8; Dictio 1 Cap. 1 § 79. — Die Uebersetzung Gerard's von Cremona † beginnt mit dessen Vorrede †† und diese mit einem Citat über Ptolemäus aus dem Werke des „*Albuguasis*", das ist Abu-l Wefa Mubeschir ben Fatik (1053), welches unter dem Namen des Johannes Procida edirt ist (s. die Nachwei-

---

* *Nembroth* bei Jourdain, *Recherches* S. 282.

** Für *Keludsi*, d. h. der Claudier, nach De Sacy bei Wenrich S. 229; vergl. Hagi Khalfa VII, 689; D. M. Ztschr. XXIV, 380, A. 74. Vergl. *Affaludi* bei Boncompagni, Plato Tib. S. 40. Ptol. war nicht aus Pelusia (s. Th. H. Martin, *Passage du traité de la musique etc. Rome* 1865 S. 9 des Sonderabdr. aus den *Atti*). Die Worte „*cuius tamen propago .,. de provincia que dicitur pheludia*" im Vorwort (bei Boncomp., Gher. S. 16) finden sich nicht in der latein. Uebersetzung des Mubeschir (*Collectio Salern. III*, 130).

*** In der latein. Ausgabe (bei Boncomp., Gher. S. 18) *latine vocatur vigil?!*

† Seinen Namen nennen auch Cod. Coll. Novi 281 (bei Coxe S. 98) und Omn. anim. 95 (Coxe S. 28, vergl. Weidler S. 179). An der Identität mit der seltenen Ausg. 1515 (in der hiesigen k. Bibliothek ein Exemplar von Diez, Nr. 300 fol.) kann kein Zweifel sein.

†† Als *Provemium Ptolemaei* in Cod. Laud. 644,[22] bei Coxe, Catal. II, 1, S. 467.

sungen in der Hebr. Bibliographie 1869 S. 51, und V. Rose, *Aristot. pseudepigr. p.* 583; ein Fragment scheint Cod. 8,[4] bei Bandini III, 9, vielleicht französisch bei Pasinus II, 476, Cod. 49 f. 61). Der Text selbst beginnt in der Ausgabe wie in Cod. Burney 275,[21] (Forshall's Catal. S. 70): *Bonum fuit, scire, quod sapientibus non devientibus visum est etc.*, also *scire* für *Syre!*

b) Ein Buch, arabisch *walzacora**, lateinisch *planisphaerium* genannt, anfangend: *Cum sit possibile yesure* (Var. *sessori!*), § 12; — *yesure* ist wahrscheinlich arabisch für „*o Syre*", wie in der Ausgabe der Bearbeitung des Maslema (der arab. Uebersetzer des Textes soll Thabit sein), deren latein. Uebersetzung (Cod. Wien IV, 136, Nr. 5496?) unter dem Namen „Andreas Brugensis" (1536) edirt ist, aber das Datum Tolosa 1144 (s. Heilbronner S. 352, Lalande, Addit., in HS. 1143) hat und wahrscheinlich von Hermann Dalmata herrührt (s. D. M. Ztschr. XVIII, 169 und Nachträge, unten Nr. 45*a* Anm. 1 und Nr. 48); s. auch unten *d*, *f*.

c) *Lib. Canonum*, nach ägyptischen Jahren für Alexandrien, anfang.: *Intellectus climatum*, aber, wie Albert glaubt, nicht von dem *pheludinensi*, sondern von einem *aequinominale*, vielleicht einem der ägyptischen Könige, § 13. — Ist hier ein Werk Theon's oder was sonst gemeint? — Ueber die Unterscheidung des Astronomen von den königlichen Ptolemäern s. D. M. Zeitschr. XVIII, 143 (und Nachträge).

d) Das Buch, welches griechisch *teotrasti*** (Var. *cereastim*) heisst, arabisch *artabi* (für *arbaa makalat*), lateinisch *Quadripartitus*, anf.: *Juxta providentiam philosophiae* (*philosophorum*) *assertione*, § 30, vergl. §§ 41, 44. — Die lateinische Uebersetzung des Egidius de Tebaldis lombardi de civitate Parmensi, auf Befehl des Alfons, nach einer vorangegangenen spanischen***, Fol., Ven. 1493, 1519 (fehlt bei

---

* Die Erklärung صفيحة الكرة bei Dorn (Drei astron. Instrumente, Petersb. 1865 S. 83) ist mir zweifelhaft, da der gewöhnliche arabische Ausdruck *tastîh el-Korra* ist. Die Worte: *Est quidem quazal cora tabula etc.* bei Boncompagni, *Trattati d'aritmetica I,* 23 (s. Catal. der Univ.-Bibl. Cambridge III, 501, erschienen 1858) sind der eigentliche Anfang des angebl. Tractats Gerbert's (s. oben Nr. 29) in Cod. Sorb. 980 f. 85*b* Col. 2 lin. 20, wo *uualzacora* steht, wie bei Hermannus Contr. (bei Pez S. 111 Cap. 2, *Wallachora* in Cat. MSS. Angl. I, Nr. 1652). חלטקורא טולמיא (*Waltakora Tolomaea*) in Cod. Oppenh. 1166 Qu. f. 61*b*. *Lib. Wazalchora* in Cod. Arundel 339,[15] (Catal. S. 102) beginnt: *Spera Ptolomaei quam astrolabium vel astrolapsum, sive Walzachoram i. e. planam speram appelamus.*

** τετρασι βιβλιος. — In der Vorrede des Uebersetzers des Planisphaerium, ed. 1536 S. 229: „*Almagesti quidem Albeten* (Albettani) *commodissime astringit, Tetrastie* [*Alarba*] *vero Albumazar non minus commodissime ampliavit*".

*** Wahrscheinlich durch Confusion der beiden §§ 501 und 502 bei Heilbronner S. 491 entstand die Notiz Bähr's in Pauly's Reaenencykl. VI, 240 (bei Boncompagni,

Wenrich S. 235, vgl. meinen Catal. Codd. h. Lugd. S. 369) gedruckt, enthält zwei Texte, der erste (auch hinter Firmicus ed. 1551) beginnt: *Rerum jesure* [s. oben zu *a*, *b*] *in quibus est prognosticabilis scientiae stellarum*; der zweite: *Res quibus perficiunt prognosticationes missori* [für *mi Syre?*]. Henr. Bates (1281) spricht von drei Uebersetzungen, deren eine aus dem Griechischen (D. M. Ztschr. XXIV, 337, 379). Eine Uebersetzung des Plato Tiburtinus in Cod. Paris 7320 weist Boncompagni (*Delle versioni etc. di Platone p.* 40) nach. Sie findet sich auch in der Univers.-Biblioth. zu Cambridge Cod. 1767,[17] f. 240 (Catal. III, 405), wo der Name verstümmelt *Auburtino Palatone*, aber das genaue, bisher unbekannte Datum *die Veneris hora tertia* 2[0] [lies 22[0]] *die mensis Octobris A. D.* 1138, *decima quinta dic mensis Saphar A. Arabum* 533 *in civitate Barchmona* [lies *Barchinona*] *etc.*, zuletzt *Explic. lib. ... dictus Arabice Alarba;* ich vermuthe daher, dass auch die Handschrift Parker in Catal. MS. Angl. I. III, 171, Nr. 2404, wo *arabice dictus alarba*, diese Uebersetzung enthalte. Die Verfasser des Cambr.-Catalogs (Hr. Glover) bemerken, dass diese „anonyme" (!) Uebersetzung gedruckt sei in der Ausg. 1551 des Firmicus (so in den Corrig. zu Anfang des Bandes). Ich habe bereits bemerkt, dass diese Ausgabe nur den ersten Text der obigen wiederhole. Hat Albert etwa einen Prolog des Plato vor Augen gehabt?

e) Et est alius qui simili modo incipit. Et est [lies *et est*, s. unter Zahel] *liber ad Aristonem*, §§ 33, 48. — „*Sacratissimus astronomie Pt. lib. ... quem scripsit ad Heristhonem filium suum*" *etc.* 4. Venet. 1509 (s. Lalande S. 34, *Aristonem* in Cod. Sorb. 980, s. Zeitschr. f. Math. X, 478, A. 40: Erathostenes; vergl. XII, 19), beginnt *Signorum alias utrum* [lies *alia sunt*] *masculini generis. Alia feminini.* Dabei f. 13 *Sententia Aristotelis de luna* 14 *continens capitula de imaginibus fabricandis pro diversis rebus.* Anf. *Arist. plenior artibus dixit: Selim v̄r clare k̄re astra* 28 *per quas terras graditur etc.* (die 28 Mondstationen, bricht aber mit der 14. ab und folgt ein Stück *de mutatione aeris*). In Cod. Wien II, 54, Nr. 2311,[2] heisst unser Schriftchen: *Liber signorum i. e. stellarum.* Montucla (S. 314) konnte kein Exemplar auftreiben.

f) Lib. centum verborum, anfangend: *Mundanorum*, § 50; *verbo quinto*, § 89; *octavo*, § 90; *nono*, § 114. — Wir besitzen die Uebersetzung Plato's aus Tivoli (1136—1138) vom sogenannten Καρπος oder

---

... Gherardo S. 20), welche den *Aegidius Tebuldi* (so) den Almagest auf Befehl Friedrich's übersetzen lässt. Eine umgekehrte falsche Conjectur bei Coxe unter Cod. Coll. Novi 282 (S. 98) macht Gerard zum Uebersetzer des Quadripartitum, s. dagegen unter Cod. Coll. Corp. Chr. 101 (S. 35), wo „*cum Haly*, *Johannis* [fehlt im Index] *aliorumque commentariis*". — Zu der in Zeitschr. f. Math. X, 470, A. 32 herangezogenen Schrift Honein's über Cometen vergl. die Fragmente aus Ptolemäus über Cometen in den hebr. Handschriften Paris 1054,[5], 1055,[7]?

Centiloquium (Heilbronner S. 344, 350) in den Ausgaben des Quadrip. Fol. Ven. 1493 und 1519, mit dem Commentar, welcher fälschlich dem „Haly“ (Ibn Ridhwan) beigelegt ist, aber dem Abu Dscha'afer Ahmed ben Jusuf gehört*. Dort lautet der Anfang von Nr. 1: *Scientia astrorum ex te et illis.* Diese Uebersetzung hat Albert nicht benutzt, denn er citirt Nr. 5: *Potest astrologus plurima mala avertere de operationibus stellarum cum fuerit sciens naturam etc.*: dort liest man: *Optimus astrologus multum prohibere poterit quod secundum stellas venturum est etc.*

g) *Opus imaginum Ptolomaei*, mit diesen Worten anfangend, nekromantisch, § 70. — Handschrift bei Bandini II, 85, Cod. 29,[11]: *de imaginibus seu faciebus signorum*, anfangend: *Opus Ptolomaei s.* (?) *est omnibus modis proprior*, Ende: *quod animus suus desiderat*, in Cod. Harl. 80,[6] (I, 20): *Opus omagarum secundum Cl. Ptol.* mit Planetensiegeln. Vergl. *de sigillis Hermetis et Ptol.* bei E. Narducci, *Libro de le pietre* (Bologna 1865 S. 26); ferner Cod. Ashmol. 1471,[5]: *Ptol. de lapidibus preciosis et sigillis eorum. Regi Pthol. rex Acatingi... scripsit et in templo Apollinis scripsit et apposuit* (Black S. 1281); *Epist. de lapid. preciosis eorumque sigillis*, anfangend: *Regi Ptol. Rex Azarius.* Wien IV, ... Nr. 5311,[8] (s. Nachtrag).

41. *Rasiel* oder *Raciel*, *lib. institutionum* od. *institutionis*, ein grosses Buch, anf.: *In prima huius prooemii parte de anulis* [?] *characteribus tractemus*, über Namen u. s. w., §§ 54, 62. — Raziel („mein Geheimniss ist Gott“) heisst bei den Juden des Mittelalters ein Engel, welcher u. A. dem Adam oder Salomo (s. unten Nr. 42) mysteriöse Mittheilungen oder Bücher gebracht haben soll. Eine nähere Erörterung würde die Grenzen dieser Abhandlung weit überschreiten, obwohl die Frage, in welchem Kreise der orientalischen, christlichen, byzantinischen, muhamedanischen oder jüdischen Literatur diese superstitiösen Schriften ihren Anfang und ihre grösste Verbreitung gefunden, von allgemeinem culturhistorischem Interesse ist. Ich beschränke mich hier auf eine allgemeine Bemerkung als das Resultat fünf-

---

* Zeitschr. f. Math. X, 493, XII, 37 (wozu ich anderswo Ergänzungen gebe); den richtigen Autor nennen folgende Handschriften mit entstelltem Namen: *Albugasari*, Cod. Libri 646 (S. 141); *Abiufar fil. Joseph Abrae*, Wien IV, 59, Nr. 5209,[2]; ... *'Αχμὲτ υἱον τοῦ 'Ιωσὴφ τον γραμματικὸν τοῦ 'αρχηγοῦ αἰγύπτου του ταουλούντ* (Tulun), Cod. 266 bei Coxe, Catal. Codd. Bodl. I, 811. — Im Catal. der Univ.-Bibl. Cambridge III, 325 Cod. 1705,[26] wird diese Uebersetzung für unedirt gehalten. Im Anfang des Comm. daselbst: *Dixit Ptol. scripsi tibi Jesue*, lies *Jesure*, d. h. „o Syrus“, wie oben unter *a*, *b*, *d*. — Cod. Wien III, 386, Nr. 4782 soll einen anonymen, König Alfons von Castilien gewidmeten Commentar enthalten; IV, 138, Nr. 5503,[6] eine Uebersetzung des Georg Trapezuntius [starb 1484!] mit einem Brief an Alfons von Arragonien! Catal. MSS. Angl. I, 166, Nr. 3466 verzeichnet *Centil. ex Arabico*, 1250, *cum Comment.*; das Jahr bezieht sich wohl nicht auf die latein. Uebersetzung?

undzwanzigjähriger Forschung. Die magische Wirkung von Namen ist altjüdisch, vielleicht aus Persien stammend; die Verbindung mit der astrologischen Scheinwissenschaft datirt erst aus der arabischen Periode*; die Anwendung von Bildern, Zeichen, Siegeln** u. dergl. ist antijüdisch und verpönt; das Wenige, was die hebräische Literatur aufzuweisen hat, stammt aus arabischen und christlichen Schriften, welche ihre superstitiösen Werke mit biblischen Namen ausstatteten (vergl. mein *Jewish Literature*, London 1857, S. 201, vergl. 107, 371). Es kommt dabei auf eine Consequenz nicht an, die Namen Hermes (Henoch, Idris***, Mercur), Aristoteles, Salomo wechseln mit einander, und ich vermuthe einen Zusammenhang zwischen den Kiranniden (Nr. 34) und dem *Quadripartitum* des Hermes über I. 15 Sterne, II. ebenso viele Kräuter, III. Steine und IV. Figuren (zur pseud. Lit. S. 49 A. 36), an „Haydimon" oder „Aydimon" (d. i. Agathodämon, s. das. S. 40, 89, geograph. Tafeln nach Ptolemäus von Agath. bei Fabricius V, 272, Harless) in Cod. Ashmol. 41,[12] (Black S. 238), 1471,[13] (S. 1281), Coll. Corp. Chr. 127,[17] (Coxe S. 45), Harleian 80,[10] (I, 20 des Catalogs); bei Labbeus (*Bibl. nova* 4. Paris 1653, S. 117); in Cod. München 667 f. 66 wird Enoch genannt †; Bertelli (in Boncompagni's Bulletino I, 105) hat aus einer Handschrift in Parma eine interessante Stelle (des III. Theiles) über den Magnet mitgetheilt. Den IV. Theil giebt Cam. Leonardi (*Speculum lapidum* 4. Aug. Vind. 1533, lib. III f. 62[b]) als *sigilla seu imagines Hermetis.* Auch unter dem Namen des Albertus Magnus ist ein Schriftchen über 16 Pflanzen, Steine und Thiere edirt††, doch ist mir die seltene Ausgabe nicht zugänglich; in Cod. München 444 f. 197 wird als Quelle *lib. tyrannidis* (Kyrann.) und *lib. alcharat*(?) genannt; Anfang: *Sicut dicunt philosophi.*

Eine hebräische Handschrift der Bodleiana (s. meinen Catal. l. h. S. 2297) von junger Hand lässt den Engel Rasiel dem Adam Mittheilungen über 24 [wie in den Kyranniden] Steine, Kräuter, Wörter [wofür später die Buchstaben] und Thiere machen. Schon Reuchlin vermuthet, dass hier

---

* S. zur pseudepigr. Lit. S. 36 und Hebr. Bibliographie 1869 S. 137, 150.

** Ueber Planetensiegel s. die Anführungen bei Chwolsohn, Die Ssabier II, 141, 842, wo aus der trüben Quelle des Ibn Wahschijja ein Siorianus (?) angeführt wird. Eine Anweisung zur Anfertigung der Planetensiegel für den Verkauf enthält Cod. Wien IV, 71, Nr. 5239,[33].

*** *Scientia edita ab Edri (sic) philosopho, astrologo et medico* in Cod. Canon. 517,[20] (bei Coxe S. 829), ist Edris (= Idris), d. h. Hermes „trismegistos"; vergl. zur pseud. Lit. S. 50.

† *Hermes de* 15 *stellis et* 15 *lapidibus*, Wien IV, 98, Nr. 5311,[10]; daselbst S. 61 Nr. 5216,[6] über 15 Sterne *ex tractatu Heremeth et* (!) *Enoch.*

†† Siehe Choulant im Janus I, 1846, S. 142. — Vier Ausgaben verzeichnet der Bodleianische Catalog I, 34. — 16 Steine zählt die anonyme italienische Handschrift bei E. Narducci, *Libro de le pietre*, Bologna 1869 S. 11.

Raziel für Henoch-Hermes substituirt sei. In Cod. hebr. München 240 f. 18 (311 f. 43) lehrt Rasiel den Adam in einem Buche 5 Dinge, insbesondere die mystischen Namen; dasselbe wurde erst wieder zur Zeit Salomon's entdeckt, der es erläuterte; es fand sich aber nur in Castilien und wurde dort auf Befehl des Königs [ist Alfons gemeint?] aus dem Buche [Exemplare] eines Juden übersetzt u. s. w. Die Hauptsachen sind wieder Engelnamen und Geheimnisse der Buchstaben.

Hierher gehören demnach die spanischen Auszüge aus „Ragiel" (zur pseud. Lit. 83, Rico y Sinobas l. c. V, 22 hat *Oagiel* und giebt keine Quelle an); ferner der *liber alarum* des Ragiel, aus dessen *prima ala* Cam. Leonardi (*Speculum lapidum lib. II C.* 14 *f.* 54) 22 magische Bilder excerpirt aus dem Abschnitt der 24 Steine des „*Lapidarius Salomonis excerpt. ex libro Rasielis angeli*" (*lib. III f.* 64), vergl. *f.* 64[b]: *Salomon in lib. suo qui dicitur Cephar* [ספר Buch] *Rasielis*, und „*Dixit Salomon, Scias quod in ista ala sunt viginti quatuor lapides preciosi*", entsprechend den 24 Stunden. Im Serapeum 1870 S. 296 habe ich auch auf *liber Rugielis regis et philos.* in Cod. München 405 hingewiesen. (S. Nachtrag.)

Ein magisches Buch *Rasiel*, worin auch von den Kräften der Kräuter, Gemmen, Fische u. s. w. die Rede ist, besass Daniel Swenter, s. Buxtorf, *Bibl. rabb. p.* 184 ed. 1708 (Hottinger, *Bibl. or. p.* 83, bei Wolf, *Bibl. hebr. I p.* 111).

42. *Salomo*, der weise König; unter dessen Namen sind in meinem Catal. Bodl. S. 2289—2303 beinahe 50 Titel superstitiöser Schriften behandelt und noch andere hinzuzufügen, darunter fast keine einzige jüdischen Ursprungs (s. vorige Nummer); aber gerade über vier von Albert citirte (S. 2302 Nr. 35—38) konnte nichts Näheres herangebracht werden. — Ich halte mich hier an die, meist genaueren Angaben in § 61 und beachte nur wichtigere Varianten in § 53.

a) de quatuor anulis, nach 4 Schülern benannt, anfangend: *de arte Eutonica* (*Eutontica*, *ydeica*); vielleicht *notoria?*

b) de novem candariis [lies *candelariis?*], anfangend: *Locus ad* (*qui*) *movet ut dicamus.*

c) de tribus figuris spirituum, qui dicuntur principes in quatuor plagis mundi, anfangend: *Sunt de coelestibus* (vergl. zur pseudepigr. Lit. S. 30, Geiger in D. M. Ztschr. XVII, 404).

d) de figuris almandal (*almendel*), anfangend: *Caput in figura almandal.* — Siehe Cat. Bodl. S. 2298 Nr. 25. Wird u. A. erwähnt im Buch Rasiel, Handschrift Swenter's (oben Ende Nr. 41). Vielleicht in Wien II, 278, Nr. 3400,[16]: *Almadel, Liber intelligentiarum*, anfangend: *Rerum opifex Deus*, Ende: *neglexeris tociens repetas.*

e) Lib. parvus de sigillis ad daemoniacos, anfangend: *Capit. sigilli gandal et tarchil* (*tanchil*). — Leonardi l. c. f. 59 giebt einen *libellus, quem filii*

Israelitici in deserto fecerunt, unter der Ueberschrift: *Sculpturae seu imagines Salomonis*, weil in demselben Codex viele Schriften Salomon's waren! — Dass der angebliche *Chael*, *Chehel* u. s. w. bei Leonardi und in Handschriften aus Bezalel fingirt sei, habe ich im Serapeum 1870 S. 306 bemerkt; s. Nachtrag.

43. *Thebit fil. Chorae* (*eben Chorath*). — Der bekannte Polyhistor Abu'l Hasan (*pater Asen* u. dergl.) Thabit, ein Sabier (833—891). Ich habe bereits in der Zeitschr. f. Math. X, 458, Anm. 7, auf die in lateinischer Uebersetzung erhaltenen Schriften desselben hingewiesen. Da ich ein genaues Verzeichniss derselben für einen kleinen Specialartikel vorbehalte, so werde ich mich hier auf das Nothwendigste beschränken.

a) Eine Schrift über die Bewegung der Fixsternsphäre [die sogenannte Trepidationstheorie], anfangend: *Imaginabor sphaeram*, § 10. — Ist u. d. T. *de motu octavae sphaerae* gedruckt mit Sacrobosco's Sphäre u. s. w. Bologna 1480, Vened. 1521; beide Ausgaben sehr selten, so dass Delambre bei seiner Analyse (S. 73) nur eine Pariser Handschr. benutzte. Ich finde das Schriftchen soeben u. d. T. *Verba Thebit acutissimi Astronomi de imagine totius mundi atque corporis sperici compositione* (wofür f. 2 *de imag. corporis sperici seu totius mundi*) *a Conrado Norico arc. lib. acad. Lips. magistro nuper revisa et aucta*, am Anfang einer, wie es scheint, sehr seltenen Ausgabe des Sacrobosco, mit dem Epigraph: *A.* 1503 *per Martin. Herbipolensem. In hemisperio Lipsensi nuper impressa. Et ibidem publice lecta. Anno quoque Chr. Milles. quingent. nono* (also 1509) *renovata.* — Manche Handschr. haben den Titel *de* (*in*) *motu accessionis et recessionis*; der Uebersetzer ist ohne Zweifel Gerard von Cremona.

b) *De definitionibus*, anfangend: *aequator*, § 12 — identisch mit dem von Gerard von Cremona übersetzten: *De expositione nominum Almagesti*, oder *De expositione vocabulorum Almagesti*, oder auch: *De his quae indigent expositione antequam legatur Almagestum* (s. Zeitschr. f. Mathem. X, 457), und noch andere Titel im Index der Wiener Tabulae IV, 400.

c) Eine Schrift über *imagines*, anfangend: *Dixit Thebith, dixit Aristoteles qui philosophiam*, § 69 — in Handschriften als *lib. imaginum* oder *de imag. astron.*, und wohl identisch mit dem (4. Francof. 1559) gedruckten: *De tribus figuris magicis* (vergl. D. M. Ztschr. XVIII, 135). — Welcher Schrift das unbestimmte Citat § 18 angehöre, kann ich nicht entscheiden.

d) s. unter Anonyma Nr. 47.

44. *Toz* (*Tor*) *Graecus*, mir unbekannt, etwa Thot, dessen Gespräche mit Hermes (s. d.) schon den Syrern bekannt waren?

a) *Imagines*, oder *de imaginibus Veneris*, anfangend: *Observa Venerem cum intrabit taurum*, §§ 51, 60. — *Lib. Toc.* [lies *Toç?*] *i. e. Lib. Veneris, aut* 12 *Lapidum Veneris* enthält ein Bodl. Cod., s. Cat. MSS. Angl. I, 127, Nr. 2456 f. 78.

b) *De stationibus ad cultum Veneris*, anfangend: *Commemoratio historiarium*, §§ 51, 60.

c) *De quatuor speculis*, anfangend: *Observa Venerem cum pervenerit ad Pleiades*, § 60.

Toz graeci philosophi nominatissimi expositio super libros Salomonis de secretis secretorum ad Roboam, Handschr. XVII. Jahrh. in Paris (Delille, Inventaire III S. 74 Nr. 15.127). (S. Nachtrag.)

45. *Zahel, Zachel* (*Zehel, Zabel, Zarchel*) *Israelita* (unter *b*). — Der Jude Sahl ben Bischr (IX. Jahrh.), dessen Schriften unter vielfacher Entstellung des Namens vorkommen*; in den Ausgaben liest man *Ismaelita*, weshalb ich zuerst (Catal. Bodl. S. 2258 flgg. und Add.) dieselben dem richtigen Autor vindicirte (Nachträge sind citirt in D. M. Ztschr. XVIII, 122, XXIV, 338 und Virchow's Archiv Bd. 52 S. 367). Ich werde mich auch hier auf kurze Verweisungen beschränken, bis auf einige nothwendige Ergänzungen.

a) *Introductorius* [*liber*], anfangend: *Scito quod signa sunt duodecim. Et alius Ares* [Var. *Haly!*] *qui sic incipit: Signorum alia sunt masculini generis, excepto quod in secundo tractatu agitur de interrogationibus*, § 32. — Ich vermuthe, dass *Ares* eine Abbreviatur von *Ar-*

---

* Vielleicht auch *Hazatel Hebraeus*, in Cod. Wien IV, 60, Nr. 5212,[12], wahrscheinlich nur ein Citat, etwa für *hec habet zatel?* — „*Azahel*" im Serapeum 1870 S 306 Anm. 10 aus Baldi's biogr. Werke ist *Arzachel*, wie ich nachträglich aus Mittheilungen Boncompagni's ersehe. Ebenso dürfte die *Introductio in Zaelis Calendarium* in Cod. St. John's Coll Cambridge f. 25 (bei Cowin, Catal Cambr. 1846 S. 60) sich auf Arzachel beziehen? — Zu keiner der gedruckten Schriften ist der lateinische Uebersetzer genannt. Um so wichtiger sind die Nachrichten über ein Buch *de revolutionibus* (Cod. Norfolk in Catal. MSS. Angl. II, 1, S. 80 Nr. 3158) oder *prognostica* oder *fatidica* von Zahel „*Iben* od. *Ben Bixir*" (oder *Vixer*, für Bischr) *Caldeus*, in Cod. Caio-Gonv. 110,[10] (bei Smith S. 49) *cum prologo Caldei* (!) *Hermanni translacio;* in der Universit.-Bibl. Cambridge Nr. 2022,[4] (III, 647) ist der Titel *Atahuuil Malem* (lies *Ta'hwil el-Alem*, d. h. *revolutio mundi*, vergl. Serap. l. c. S. 309), und zwar *Hermanni secundi translatio* — H. sec. heisst der Uebersetzer von Ptolem. Planisph. in Cod. Paris 7377 B, bei Jourdain S. 105, s. oben Nr. 40 *b* — *Sextus Astronomiae*. Anfang: *Secundus post conditorem orbis moderator Sol*; Ende: *noxiarum quia vi oppresse minus fiunt efficaces.* Zu allgemein sind die Titel *in Astronomia et Judiciis* und *de jud. Astrorum* in Cambr. Univ. III, 215, Nr. 1572 und S. 313 Nr. 1693,[6]. — *Tr. de judiciis astrorum* in Wien IV, 119, Nr. 5414,[5], anfangend: *Quum signa sunt duodecim*, endend *eandem domum et res eius.*

zachelis (s. unten *e*) ist. *Zaelis Introductorium* de principiis judiciorum*, mit Ptolemäus Quadripart. Ven. 1493 und 1519 (Lalande, S. 41, fehlt im Index S. 914) gedruckt, beginnt (Catal. Bodl. S. 2261): *Dixit Çahel ... Scito quod signa sunt* 12, *ex eis* 6 *sunt masculina etc.* (vergl. auch unter Ptolemäus).

b) *De interrogationibus quem vocant Judicia Arabum*, anfangend: *Cum interrogatus fueris*, § 47. — Ist mit *a* gedruckt, wie es scheint, als *tertia pars* (Cat. Bodl. S. 2262). In Cod. Sorbonne 980 f. 33v Col. 2** anonym, betitelt: *Judiciorum Arabum liber incipit et primum de domo questionis*; s. unten *e*.

c) *De significatione temporis*, anfangend: *Et scito excitat* (! Var. *excitant!*) *motus*, § 48. — *De temporum signif. ad judicia*, anfang.: *Scito quod terra excitat motus*, ist mit *a* und *b* gedruckt (Cat. Bodl. S. 2263).

d) *Lib. electionum*, anfangend: *Omnes concordati sunt*, § 50. — Ist mit Julius Firmicus 1533 und 1551 (Lalande S. 51 und 72, letztere fehlt im Index S. 915), aber auch unter dem Namen Maschallah's (der darin citirt wird) 1509, und zwar zuletzt vollständiger gedruckt (Cat. Bodl. 2263). In Cod. Harl. 267,[11] (I, 101 bei Forshall) heisst der Verf. *Zael Hombschir Israelita.*

e) *Liber* 50 *praeceptorum*, anfangend: *scito quod significatrix luna*, § 50. — Die 50 *praecipua judicia* sind als ein Anhang (oder zweiter Theil?) des Introductorium gedruckt (Catal. Bodl. S. 2261), in Handschriften haben sie den einen oder den andern Titel, z. B. Catal. MSS. Angl. I, 80, Nr. 1673, II, I, 76, Nr. 2986; Canonic. Misc. 517 (Coxe S. 828), Arundel 88,[23.25] (Forshall's Catal. S. 23), „*Descriptio* 50 *praeceptorum que in omnibus notanda occurrunt negotiis et questionibus, çael*“ (Cod. Boncompagni 312 f. 33—35, Narducci's Catalog S. 136; früher Libri 845)***; auch die letztgenannten Cataloge geben keine Hinweisung auf die Ausgaben. ¶Im Catal. MSS. Angl. I, 79, Nr. 1648 (Digby 47) erscheint *Algazelis* (vgl. oben unter Arzachel S. 369) *Introductio ad lib. judiciorum Arabum*, in demselben Cod. *Lib. introductorius Zaelis ad librum judiciorum quem ipse compilavit*, und unmittelbar darauf *lib. judiciorum Zaelis* (und *septem judices*, vgl. unten Nr. 50). Ein *Lib. introductorius Arzachelis ad lib. jud. Arabum* in

---

* ... *in astronomiam* in Cod. St. Severin in Neapel, bei Montfaucon S. 237, bei Heilbronner S. 548 § 35 Nr. 37.

** Diese und alle ferneren Mittheilungen über denselben eigenthümlichen und interessanten Codex verdanke ich Herrn E. Janin in Paris im Auftrage des Fürsten Boncompagni (Mai 1865).

*** Vielleicht auch *de* 50 *rebus astronomiae* in Cod. Univ. Cambr. 1705,[34] (II, 326 Catal.)?

der Bibl. San Marco in Florenz, Arm. 4 Nr. 27, verzeichnet Montfaucon S. 428. Einigen, wenn auch nicht ganz genügenden Aufschluss giebt Cod. Sorb. 980, wo f. 26 dieses Werk beginnt: *Omnibus planetis erraticis qui feruntur in signis non quod sint in eis*, und bald darauf die Planeten mit arabischen Namen bezeichnet werden. Ich finde in den Ausgaben Nichts von den mir mitgetheilten Stücken, bis auf die letzten Stücke f. 28*r* Col. 2, Ueberschrift: *de Planetarum provectu* (diese Ueberschrift fehlt in der Ausgabe): *Si fuerit planeta in domo sua* (Ausg. 1519 f. 114) und *de Planetarum gaudiis* bis Ende: *eorum domorum. Et hec sunt initia* (!) *precipuorum iudiciorum et sunt L Capitula. Explicit primus liber. Incipit secundus quo distinguunt* [*ur?*] *cap. L de principalitate Lune significationis ad celeros planetas. Primum* [*cap.*] *Scito quod Significatrix* u. s. w. Das Nachfolgende scheint nur in den, nicht gezählten, Ueberschriften von unseren 50 Vorschriften abzuweichen; die letzte ist: *De luna* [*lune*] *coniunctione expuliunt* [lies *expliciunt*] *cap. L*, endend: *Scito hoc totum*, wie die Ausgabe. Dann folgt: *De planetarum obsidionibus*, entsprechend dem Paragraphen *de planetis obsessis* im gedr. Introduct. f. 114 Col. 1 unten, während die hierauf folgenden, mir mitgetheilten Ueberschriften bis f. 31 dem Inhalte nach denjenigen entsprechen, welche in der Ausgabe auf 112 — 113 vorangehen; hingegen sind die Stücke von f. 33*r* Col. 1: *De ratione eclipseos solis et lune — de altitudine turrium* u. s. w. bis 33*v* Col. 2 *Capit. sciendum altitudinis loci etc.* (Ende: *omnibus C cubitis ex longitudine*), woraus mir grössere Excerpte vorliegen, rein mathematisch; die letzten Stücke scheinen einem Werke über das Astrolab entnommen! Dann folgt *Judiciorum Arabum etc.*, s. oben *b*.

Anonyma.

46. Ein Werk nach der Methode Euclid's u. s. w. s. oben unter Albategnius S. 359.

47. *Et apud quemdam alium ampliatur illud, quod est super figurum latam* (!) *conjunctam atque disjunctam in libello qui sic incipit: „Intellexi"*. Ich lese *Catam* für *latam* und beziehe es auf das Werkchen des Thabit ben Korra über die *figura sector*, arabisch *Katta*, welches in der hebräischen Uebersetzung (D. M. Ztschr. VIII, 495) ebenfalls mit demselben Worte (הבינותי) beginnt, so dass Albert die lateinische Uebersetzung Gerard's von Cremona ohne die ersten Worte: „Es spricht Thabit ben Korra" vor sich gehabt hätte, da er den Autor nicht nennt, obwohl ich noch nicht recht einsehe, wie dieses Schriftchen in Albert's Aufzählung astronomischer Werke passt. Wenn ich in der Zeitschr. f. Math. X, 495 (vergl. S. 496) die Identität von Thabit's Abhandlung mit der lateinischen gedruckten „sehr frag-

lich" erklärte, so geschah es zunächst, weil letztere nicht mit der hebr. Uebersetzung stimmt, und nicht „mit Hinblick auf die Handschrift in Thorn", welche Campanus als Autor nennt, wie Curtze (Analyse u. s. w., Supplem. zu Ztschr. f. Math. Bd. XIII, Sonderabdr. S. 20, vgl. S. 56) meint, da ich am 20. August 1865 (wo meine Abhandlung bereits in Händen der Redaction war) Curtze's erste briefliche Nachricht über jene Handschrift erhielt (vergl. meine *Lettere a D. B. Boncompagni p.* 93). Ich kannte das lateinische Schriftchen gar nicht, ehe es Fürst Boncompagni meinem Briefe beigab. Beginnt die Baseler Handschrift des Thabit *Intellexi?* — Bei Bandinus II, 44 liest man in der That: *de figura sectore*; letzteres Wort fehlt bei Montfaucon S. 299 (Heilbr. S. 533 § 44,[16] bei Curtze l. c. S. 21 Anm.). In der Laurent. Handschrift wird aber nicht blos diese Abhandlung *de fig. sectore*, sondern auch das vorangehende *de proportione et proportionalitate* dem Campanus beigelegt. Dieselben beiden Schriften scheint Coxe unter Cod. Coll. Corp. Chr. 41.[11] zusammengenommen zu haben, und zwar beginnt *libellus de proportionibus* mit den Worten: *Proportio est duarum quantitatum eiusdem generis*, ist also identisch mit dem anonymen *Opusculum de tribus proportionibus* in Wien 5277,[15] (IV, 83), endend: *quod est propositum.* Dieses Schriftchen wird aber in Cod. Boncompagni 265 (s. Zeitschr. f. Math. X, 492) und in einem Cod. der Ambrosiana (Montfaucon S. 506, bei Heilbr. S. 563 § 87,[2]) dem al-Kindi beigelegt! Zu untersuchen wäre auch *de prop. et proportionalitate* in Cod. Paris 11247 (bei Delille, *Inventaire*)*. Das Ende in Cod. Coll. C. C. 41 soll nun sein: *ad cordam dupliarchus* [für *dupli arcus*] *c e*, und dann: *Explicit tract. de prop. et proportionalitate de Kata coniuncta et disiuncta.* Da aber die Worte: *ad cordam ... c e* die Endworte des lateinischen gedruckten *de figura sectore* sind, so ist das Epigraph offenbar auf zwei verschiedene Schriften zu beziehen, *Kata conjuncta et disjuncta* eine Bezeichnung für die *figura sector.* Vergl. *Rata conjuncta et disjuncta* im Cat. MSS. Angl. I. III, 119, Nr. 1026,[18] (auch bei J. F. Smith, Catalogue ... of Gonville and Cajus Coll. S. 66 Nr. 141 ohne nähere Angabe). *Tract. de Catis conjunctis et disjunctis* in Cod. Harl. I, 13 zwischen Schriften von Thabit; über *„Catha" conjuncta* und *C. disconjuncta* in Cod. Univ. Cambridge 1572 (III, 215). Ein anonymer *Tract. quadripartitus de corda recta et versa etc.*, anfangend: *Quia canones non perfecte tradunt noticiam sinus*, endend: *ratio et solertia in Cathis*, daselbst 1705,[19] (III, 324).

48. Viele haben *Canones* für ihre Städte und nach christlicher Zeitrechnung verfasst, wie z. B. *ad mediam noctem* für Marseille, ein Anderer für den Meridian von London (? der Name variirt), ein Anderer für den Meridian von Tolosa, welcher derselbe von Paris, nämlich Längenentfer-

---

* Derselbe Cod. enthält auch *de arcubus similibus* von Abmasar [lies *Abuiafar*] Amet etc., s. Zeitschr. f. Math. X, 490.

nung vom Westen 40° 47′, Breite $49^1/_{10}$, § 16. — Cod. Ashmol. 361,[2] f. 19 Col. 4 (Black S. 277): *Incipit pars altera huius operis, que vid. ad meridiem urbis Londoniarum juxta Albatē.* [Black verbessert *Abbatis!*] *Harecensis* [= *Araclensis*, d. h. aus Rakka] *sententiam per Robertum Cestrensem contexitur.* Black bemerkt dazu, dass dieser Autor nicht in Tanner's Bibl. Britt. vorkomme. Es heisst hier und f. 24[b], dass der frühere Theil calculirt sei nach den Toletanischen Tafeln, beginnend 1169, die in diesem Theil erwähnten Tafeln A. 1150. Nach Catal. MSS. Angl. I, 300 enthält Nr. 6567 (Savil. 21) hinter den *Canones* des Arzachel (Heilbr. S. 618 § 317,[7]) noch Canones mag. Roberti de Northampton [d. i. Holcot, um 1350] und Canones *in motibus coelestium corporum, eorum pars altera ad meridiem London secundum Albategnium per Rob. Cestrensem.* Wer ist dieser Robert?* Nach Fabricius (Biblioth. lat. med. s. v.) soll ein englischer Mathematiker Robert Castrensis, Castrius, Cestrensis, um 1290 gelebt und *de astrolabio* geschrieben haben. Ich vermuthe hier irgend ein Missverständniss, ohne die Quellen im Augenblick verfolgen zu können, glaube jedoch, dass alle Uebersetzungen aus dem Arabischen auf denselben Robert, den Collegen des Hermann Dalmata (vergl. oben S. 382) zurückzuführen sind, der auch Rob. Retinensis oder Ketinensis genannt wird. Jourdain (S. 103 ed. II) kennt nur dessen Uebersetzung des Koran vom Jahre 1143 (nach einer Handschrift Selden's), hält ihn aber für identisch mit Rob. Cestrensis, dem Uebersetzer des alchemistischen Werkes von „Morianus", mit dem Datum 11. Febr. 1182 — welches ich (D. M. Ztschr. XVIII, 168) als spanische Aera auffasse, also 1144 —, und vielleicht der alchemistischen Schriften des *Caled* (Khalid). Nun sagt aber Robert in dem Dedicationsschreiben des Koran an Petrus venerabilis, dass letzterer ihn veranlasst habe: *interim astronomiae geometriaeque studium meum principale praetermittere.* Um so eher werden wir ihm auch eine Uebersetzung der *Canones* des *Albategnius* beilegen dürfen, deren Verhältniss zu dem bekannten Werke, in der Uebersetzung von Plato aus Tivoli bekannt (oben Nr. 5), freilich noch zu untersuchen wäre**. Ich habe ferner (Nr. 36 S. 375 Anm. †) auf eine Uebersetzung der Algebra des Muhammed ben Musa al-Khowarezmi hingewiesen, welche in Segovia 1183 (also 1145) übersetzt sein soll. Endlich giebt es verschiedene,

---

* Im Index des Cat. MSS. Angl. T. I und bei Heilbronner im Index fehlt Rob. Castrensis.

** Den Titel *Canones* hat eine spanische, auf Alfons X. zurückgeführte Uebersetzung des Albategnius in einer Handschrift des Joh. Lucas Cortes (bei Antonio II, 83, § 205, Rodriguez de Castro II, 649) und in einer Pariser, bei Ochoa S. 663, vergl. Rico y Sinobas, Libros del Saber V, 19, 36, auf dessen Urtheil ich anderswo zurückkomme. Hingegen sind die angeblichen Canones des Albategnius in Cod. Ottob. 309 f. 28 (bei Boncompagni, *Atti dell'Academia XVI*, 754), wie aus dem Anfange: *Quoniam cuiusque etc.* hervorgeht, die des Arzachel (Zarkali) zu den toletanischen Tafeln.

leider sehr unvollständige Nachrichten über ein von Rob. Castrensis herrührendes Schriftchen über das Astrolab, mit denen wohl der Artikel bei Fabricius zusammenhängt. Die Handschrift Wien 5311,[8] (IV, 98) enthält: *De compositione astrolabii universalis liber a Roberto Castrensi translatus*, anfangend: *Quoniam in mundi spera*, Ende: *ad altitudines accipiendas*. Cod. Canonic. Misc. 61,[6] (Coxe III, 473): *Liber de officio astrolabii secundum mag. Rob. Cestrensem* in 85 Capiteln: 1. *De gradus solis per diem et diei per gradum invencione. Si gradum solis in singulis diebus anni per astrolabium nosse desideras; quot dies mensis*, Ende: *et cetere ceteris per diametrum ut jam dictum est opponuntur*. Coxe verweist auf Muratori, Antiqu. Ital. III, 943, wo eine Handschrift der Ambrosiana erwähnt sei, in welcher Rob. *Ostiensis* heisst. In der erwähnten Handschrift Ashmol. 361,[2] findet sich eine Abhandlung über das Astrolab, beginnend: *Quaelibet ars suum habet arteficem*: dieser Anfang scheint einem Prolog anzugehören, welcher in der Canon. HS. fehlt. Die Handschrift Caio-Gonville College (Cambridge) 35,[14] (bei J. J. Smith, Catal. S. 12) enthält *Ptholomaei de compositione astrolabii, translatus a Rob. Cestiensi in civitate London de Arabico in Latinum*: leider ist nichts Näheres angegeben. Identisch scheint *de compositione astrolabii* des Ptol. aus dem Arabischen „*Aera*“ 1185 [also 1147] *in civitate London* in Cat. MSS. Angl. I, 78, Nr. 1641 (Digby 40, bei Heilbr. S. 600 § 256,[22]), vielleicht auch die *Regulae Ptolemaei regis de compositione astrolapsus* in Paris 14065 (Delille S. 126)? Ein hebräisches Schriftchen über Astrolab („nach den sieben Klimaten“ in einigen Handschriften), welches meistens dem Ptolemäus beigelegt wird, findet sich ohne Namen des Uebersetzers in zwei abweichenden Recensionen in München, Cod. 249 f. 123, Cod. 289 f. 105 (Anfang defect), im British Museum (Almanzi 96, s. Hebr. Bibliographie 1861 S. 155), in Oxford (Cod. Reggio 47, Ende defect?), Florenz (Plut. 88 Cod. 28, X, s. D. M. Zeitschr. XVIII, 170 und Nachtrag), meine eigene (wahrscheinlich geschrieben von Mordechai Finzi, einem fleissigen Mathematiker in Mantua um 1445—1473), Anfang defect. Diese Abhandlung beginnt: „Wir wollen eine runde einfache Fläche machen, um dadurch die Kugel, ihre Kreise und Punkte abzubilden nach dem Bedürfniss der Operation“ u. s. w. Die Handschrift Orat. 171 (H. B. 1864 S. 17) ist nach dem neuen Catalog der Pariser hebr. Handschriften Nr. 1047,[5] aus dem Griechischen übersetzt von Salomon ben Elia Scharbit ha-Sahab (= *Chrysococca*), welcher 1374—1386 in Ephesus lebte (s. H. B. 1865 S. 25, 75, Zunz, Literaturgeschichte S. 372, Nachtrag 691). — Ob Robert im Jahre 1147 nach England zurückgekehrt sei oder die Breite von London substituirte, wie Gerard von Cremona in der Uebersetzung der toletanischen Tafeln mit den Canones des Arzachel die seiner Vaterstadt, lasse ich dahingestellt. Jedenfalls würden obige Nachweisungen ihm einen Platz neben seinem Landsmann Adelard von Bath in der Geschichte der mathematischen Wissenschaften vindiciren, und dürfte die Uebersetzung der Algebra eine Herausgabe verdienen.

Canones et tabulae Tolosanae, anfangend: *Quoniam concentris mediis et mediis argumentis inveniuntur aequationes planetarum*, enthält Cod. Laud. 594,[26] (Coxe II, 1, S. 425). *Tabulae medii motus planetarum ad meridiem civitatis Tolosae ab anno* 1008 *ad* 1464, Cat. MSS. Angl. I, 127, Nr. 2458 (jetzt Bodl. 464) f. 75*b*.

49. *Lib.* [*de mutatione*] *temporum Indorum*, anfangend: *Sapientes indi* (*mundi!*), § 41. — Die eingeklammerten Wörter habe ich ergänzt aus dem Abdruck bei Libri, *Hist. des sciences mathém. I*, 372. In D. M. Ztschr. XVIII, 127, 129, 189, habe ich nachgewiesen, dass dieses Schriftchen nur eine andere Bearbeitung des Gaphar (s. Nr. 20) sei.

50. *Lib. novem Judicum*, anfangend: *Coelestis circuli*, §§ 33, 48. — Das in Ven. 1509 gedruckte Buch (Lalande S. 34) nennt: Maschalla, Aomar, Alkindus, Zael, Albenait (s. Nr. 25), Dorotheus, Jergis (s. Nr. 22), Aristoteles, Ptolemäus. Ich habe diese astrologische Compilation in der Buchhandlung Asher & Comp. vor Jahren gesehen; jetzt ist sie mir nicht zugänglich. Handschriften haben mitunter eine andere Aufzählung, z. B. Cod. Colleg. Reg. 389,[4] (bei Coxe S. 90, angebl. *sec. XIII ineunte?*), wo für Albenait und Ptol. genannt sind Albumazar und Abenashan; aber der Anf., wie hier: *Coel. circ. forma sperica.* In Cod. Wien IV, 117, Nr. 5517: *Alkindis* (so), *Introductorium ad judicia astrologiae sive lib. novem jud.* Anfang wie oben. In Catal. Arundel I, 60, Nr. 268,[14] wird ein angeblicher *Alkindus de judiciis* so recensirt, dass das Prooemium beginne: *Astronomiae judiciorum*, das Buch selbst: *Celestis circuli forma sperica!* — Nach einer andern Handschrift (s. D. M. Ztschr. XXIV, 387, Nr. 107) soll das Buch vom Sultan an Kaiser Friedrich (II.) gesendet worden sein.

51. *Liber trium Judicum*, § 48 — mir unbekannt. Ein *liber VII Judicum* in Catal. MSS. Angl. I, 79, Nr. 1648, Digby 47.

52. *De septem anulis septem planetarum*, anfangend: *Divisio lunae quando semiplena* (*impleta*) *fuerit*, § 60. — *De 7 figuris 7 planetarum* hinter dem Quadrip. des Hermes (s. oben S. 385) in Cod. Coll. Corp. Chr. 125,[18] (Coxe S. 45) beginnt: *Incipiunt figure septem planetarum et scias quod in istis.*

53. *Liber* 15 *nominum*, anfangend: *haec sunt* 15 *nomina secreta*, § 61. — Hängt vielleicht mit dem Vierbuch des Hermes (oben S. 385) zusammen?

54. *Liber de capite saturni*, anf.: *Quicunque hoc secretissimum opus.*

55. *Liber Almathaim*, § 64. — Der, wie es scheint, corrumpirte arabische Büchertitel bietet zu wenig Anhaltspunkte für Conjecturen.

56. *Liber Sacratus*, *potius exsecrabilem debuerat nominare*, § 64. Ob in *Sacratus* etwa ein Autorname zu suchen ist?

———

Nachtrag.

Bei der Redaction der oben gegebenen Nachweisungen stellte es sich als zweckmässig heraus, einige Erörterungen für kleine Specialartikel zu reserviren. Inzwischen sind mir Hilfsmittel zugänglich geworden, welche weiteres Licht verbreiten. Ich beabsichtige daher, noch eine Reihe von Artikelchen als einen zweiten Beitrag zum *Spec. astron.* zusammenzustellen. Hier folgen nur ganz kurze Ergänzungen und Berichtigungen, auf welche schon zum Theil während der Correctur durch „s. Nachtrag" hingewiesen worden.

Zu den Quellen überhaupt durchblättere ich eben *Petr. Fried. Arpe: De prodigiosis naturae et artis operibus Talismanes et Amuleta dictis cum recensione scriptorum huius argumenti.* 8. Hamb. 1717 (184 S. und 16 S. Index), ein sehr fleissig gesammeltes Büchelchen. Cap. III *de obscuris et incertae aetatis Scriptoribus* giebt zuerst S. 91 aus „*de duabus sapientiis*" unter dem Namen Albert's fol. *s. l. e. a.* gedruckt, ein Capitel — nämlich das X. *de imagin. astr.* des *Spec.* — dann Notizen über 42 Autoren, zum Theil nach Trithemius, *Antipal. maleficor.* — welches Werk ich noch für das *Spec.* benutzen muss —.

Zu S. 369 Nr. 18. Bei Arpe S. 103: *Belenus*, *de imaginibus*, nach Cat. MSS. Angl. II, 245, Nr. 8460; das. S. 102: *Balemyne* (englisch) *de sigillis Planetarum* Cod. Ashmol. 188 und 380 aus demselben Catal. I, 317, 319, Nr. 6776, 6864 (Black S. 150, aber nicht S. 290 Cod. 380!). — Die sogenannte „grosse Einleitung" des *Balinus* als Einleitung zu einer Abhandlung über die Talismane, nach einer arabischen Uebersetzung des *'Hanan* (*'Honein*) *ben Ishak*, hebräisch von einem Anonymus, enthält der mir vorliegende Cod. Ghirondi 78 f. 105 flgg.

S. 370 Nr. 23. *Germoth*, s. unten zu Nr. 44.

S. 372 Anm., 385, 386. *Ragiel*, in anderen Quellen [den angeblichen Trithemius werde ich als Plagiat aus Cam. Leonardi nachzuweisen versuchen] *Raphael* (dieser erscheint dem Noah im sogenannten grossen Rasiel f. 36) oder *Rhagael*, s. Arpe S. 104, 108.

S. 378 Anm. Accursius, vergl. Acc. Pistinensis, als lateinischer Uebersetzer von Galen's *lib. regiminis s. de cibariis et cibis* aus dem Arabischen bei Feller, Catal. Codd. MSS. Bibl. Paulinae Lips. (Leipzig 1687) S. 254, und Accursus als Glossator des Rosarium von Arnald de Villanova, nach Nasari bei Roth-Scholtz, *Bibl. chymica*, ed. II S. 42. — Das Schriftchen *de spera solida* beginnt in der That (wie ich eben vom Fürsten Boncompagni erfahre): *Totius astr. sp. radix et fundam. ... non sine sibi congruis instrumentis super sit exordium* (?). Ende: *numerus pedum vel palmarum vel etc. longitudinis plani mesurandi. Et quoniam ... de mensuris ... presentis intentionis ... sub laude Dei finiemus*, in beiden Ausgaben 1518 (s. Boncomp.

... Gherardo S. 93, wo es vor Campanus *de sphera*: wie verhält sich dazu der *tractatulus de modo fabricandi spheram solidam* in der Ausg. 1531 bei Boncomp. l. c. S. 96?).

S. 384 Nr. 40*g*. *Ptolemaeus*, *de imaginibus*, anfangend: *Pars imaginum est multiplex*, ferner *de angulis* [lies *annulis?*] *et sigillis XII signorum*, anfang.: *Incipiamus tractare de compositione*; Trith. bei Arpe S. 107. *De signis coelest. et imaginibus astron. stellarum fixar.* aus dem Lat. französisch von Jo. Hulet, nach Arpe S. 108, welcher auch eine Handschrift Digby 6357 citirt; ich finde nur im Cat. MSS. Angl. I, 80, Nr. 1658: *Ptol. imagines. — De XII annulis Veneris*, anfangend: *Accipe Jaspidem in die et hora* ohne Quelle bei Arpe l. c. — Eine Abhandlung über zehn Figuren hebräisch in Cod. Ghirondi 78 f. 117[b].

— „Abu Giafar" Comm. Ptolem. bei Stanley, Phil. orient. S. 69, bei Arpe S. 107.

S. 386 Nr. 41. Handschrift Ghir. 78 enthält das Buch *Rasiel* und als eine Art Fortsetzung die *Clavicula Salomonis*, mit einem Gemisch von Italienisch, wahrscheinlich nach der Bearbeitung des Abraham Colorni (falsch „Isak Colorninutu" in Geiger's jüd. Zeitschr. IX, 134). Rasiel ist zum Theil das hebräisch edirte Werk f. 1 und 34 (wo schon Salomo vorkommt, Catal. Bodl. S. 2297). Die Clavicula, auch „*Sefar* [Buch des] *Rasiel*", enthält sieben „untrennbare" Tractate: I. von den Sternen, II. genannt „*Ala*" (in der Bodl. HS. nur hebräisch כנף) über 24 Steine (übereinstimmend mit Leonardi u. s. w.), Pflanzen, Thiere u. s. w., III. über Räucherungen u. s. w. Ein chaldäischer König soll das Buch durch zwei Gesandte, *Rajimasail* (?) und *Zazoret*, an Salomo geschickt und Letzterer es erläutert haben. Ueber Ausgaben des Rasiel oder der *Clavicula* s. *d'Artigny*, *Noveaux Mém. d'Histoire etc.* (1749) *I*, 29 und Freytag, *Analecta litt. de libris variis etc.* 8. Lips. 1850 S. 802.

S. 386 Nr. 42. *Salomo* (vergl. zu 41); a. c., und noch *lib. IX annulorum*, werden einem Astrologen *Cauda* (?) beigelegt von Pastriegicus bei Gessner (Arpe S. 104).

S. 387. Chael etc. (Arpe S. 104); vergl. Bexel oder Beyel *de annulis septem planetarum*, anfangend: *Septem sunt stellae erratici*; Picatrix bei Trithemius (Arpe S. 103).

S. 387 Nr. 44. *Toz*, *Thocz* nach Tritbemius (bei Arpe S. 109), *de composit. et virtute imaginum*, und *de quatuor annulis et imag. Veneris*. Vielleicht auch Thomas über *praestigia* und Ringe nach den 28 Mondstationen bei Arpe l. c. ohne Quelle. — Albert *de mineral. III*, 3, S. 240 citirt *Magot Graecus et Germa Babylonicus* (oben Nr. 23) *et Hermes Aegyptus*. Unter den babylonischen Philosophen, von welchen die an Rehabeam gerichtete *Clavicula Salomonis* enthüllt wird (!), erscheint ein *Zoe graecus* (lateinische Einleitung bei Wolf, *Bibl. hebr. IV* S. 982).

XVI.

Ueber die Genauigkeit einfacher geodätischer Operationen.

Von

Professor WILHELM JORDAN

in Karlsruhe.

(Hierzu Tafel IV—VII, Fig. 1—14.)

I. Mittlerer Fehler des Schnittpunktes zweier Geraden.

Wenn ein Punkt einer Ebene durch Messung von Längen oder Winkeln gegen andere Punkte derselben festgelegt worden ist, so kann noch die Frage nach der mittleren zu fürchtenden Unsicherheit dieser Festlegung aufgeworfen werden. Wenn zur Beantwortung dieser Frage die mittleren Fehler zweier solcher Functionen der gemessenen Grössen dienen sollen, welche den Punkt in der Ebene möglichst einfach bestimmen, etwa rechtwinkliger Coordinaten, so bietet die Methode der kleinsten Quadrate unter allen Umständen die Mittel hierzu, indem bei einer einfachen Bestimmung des Punktes (ohne überschüssige Beobachtungen) aus bekannten mittleren Fehlern der beobachteten Grössen, und bei mehrfacher Bestimmung (mit überschüssigen Beobachtungen) aus Messungswidersprüchen auf die zu fürchtenden Fehler der Functionen geschlossen werden kann.

Damit hat man aber nur die mittleren, nach zwei gewissen Richtungen zu fürchtenden Verschiebungen des Punktes, und wenn man die Verschiebungen nach allen Richtungen ins Auge fassen will, so ist die Frage nach dem mittleren Fehler des Punktes überhaupt aufzuwerfen, indem als Fehler des Punktes die geradlinige Entfernung des aus fehlerhaften Beobachtungen bestimmten Punktes von demjenigen Punkte, der aus fehlerfreien Beobachtungen erhalten würde, bezeichnet wird.

Wir betrachten zuerst den einfachen Fall der Bestimmung eines Punktes durch den Schnitt zweier Geraden, deren Richtungen fehlerfrei bestimmt sind, die aber infolge von Beobachtungsfehlern gewisse Parallelver-

schiebungen fürchten lassen, indem umständlichere Fälle von Punktbestimmungen sich leicht auf diesen einfachen zurückführen lassen.

Um den mittleren Fehler M eines Punktes zu finden, der durch zwei sich unter dem Winkel φ schneidende Gerade bestimmt wird, deren mittlere zu fürchtende Parallelverschiebungen m und n sind, betrachten wir den bestimmten Fehler Δ des Punktes, welcher zweien bestimmten Parallelverschiebungen u und v der Geraden entspricht, und finden

$$\Delta^2 = \left(\frac{u}{\sin\varphi}\right)^2 + \left(\frac{v}{\sin\varphi}\right)^2 + 2\,\frac{u}{\sin\varphi}\,\frac{v}{\sin\varphi}\cos\varphi.$$

Das Quadrat des mittleren Fehlers M findet sich nach der Gauss-schen Definition als arithmetisches Mittel aller überhaupt vorkommenden Werthe Δ^2. In dem deswegen zu rechnenden Werthe

$$\sum(\Delta^2) = \sum\left(\frac{u}{\sin\varphi}\right)^2 + \sum\left(\frac{v}{\sin\varphi}\right)^2 + 2\cos\varphi\sum\frac{u}{\sin\varphi}\,\frac{v}{\sin\varphi}$$

ist das letzte Glied $=0$, weil gleich grosse positive und negative Werthe u und v als gleich möglich angenommen sind, und es wird demzufolge

$$M^2 = \frac{m^2+n^2}{\sin^2\varphi}. \tag{1}$$

Diese Gleichung wurde zuerst von Helmert (Schlömilch's Zeitschrift etc., Jahrgang 1868 S. 84) veröffentlicht; die nachfolgenden Anwendungen dieser Gleichung wurden indessen unabhängig hiervon zum Theil schon im Jahre 1867 gemacht.

Der wahrscheinliche Fehler R des Punktes wird als Function der wahrscheinlichen Parallelverschiebungen r_1 und r_2 der Geraden von Helmert (a. a. O. S. 83) gegeben durch die Gleichung

$$R^2 = 1{,}5236\,\frac{r_1^2+r_2^2}{\sin^2\varphi},$$

wozu uns die Bemerkung gestattet sein möge, dass, sofern an der Gauss-schen Definition des wahrscheinlichen Fehlers (*error probabilis*), wie sie in der Abhandlung: „Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen“ in der Zeitschrift von Lindenau und Bohnenberger, 1816, März und April, S. 186, und in der *theoria combinationis*, *art.* 9, aufgestellt ist, festgehalten werden soll, obiger Werth R nur in dem Falle, dass $r_1 = r_2$ ist, den „wahrscheinlichen Fehler“ vorstellt. Der wahrscheinliche Fehler lässt sich nach unserer Ansicht wegen Unausführbarkeit der nöthigen Integration nicht allgemein angeben, weshalb es uns geboten erscheint, die folgenden Betrachtungen lediglich auf den Begriff des mittleren Fehlers zu stützen, um so mehr, als dieser in seiner Eigenschaft als Mass des Schadens (*jactura*), nach der von Gauss in der *theoria combinationis* (Art. 6) dargelegten Auffassung, in unserem Falle der Verschiebungen nach verschiedenen Richtungen aufzutreten geeignet erscheint.

Der mittlere Fehler M des Schnittpunktes zweier Geraden ist eine Function des Schnittwinkels φ und der mittleren Parallelverschiebungen m und n der Geraden; lässt man nun letztere in ihrer Ebene sich stetig nach irgendwelchem Gesetz unabhängig von einander bewegen, wobei auch m und n sich stetig ändern sollen, so wird jedem Punkte der Ebene, welcher überhaupt Schnittpunkt werden kann, ein gewisser Werth M zukommen, und die Aufeinanderfolge der Punkte, in welchen M einen und denselben Werth hat, giebt stetige Curven, welche „Curven gleicher Genauigkeit“ oder einfach „Genauigkeitscurven“ genannt werden können. Die Auffindung und Untersuchung solcher Curven für einzelne einfache Gesetze der Aenderung von φ, m und n (d. h. für einzelne Arten der Bestimmung von P) soll hier unsere Aufgabe sein.

II. Mittlerer Fehler eines durch Polarcoordinaten bestimmten Punktes.

Wenn ein Punkt P in Bezug auf ein Polarcoordinatensystem, dessen Axe OX und dessen Pol O ist, festgelegt wird durch Messung des Winkels $XOP = \varphi$ mit dem mittleren Fehler δ und der Entfernung r mit dem mittleren Fehler Δ, so erscheint P als Schnitt einer Geraden mit einem Kreisbogen, und wenn man letzterem seine Tangente im Schnittpunkt substituirt, kann P betrachtet werden als bestimmt durch den Schnitt zweier Geraden, wobei die Grössen m, n, φ der Gleichung 1) sind:

$$m = r\delta, \quad n = \Delta, \quad \varphi = 90^\circ,$$

also

$$M = \sqrt{r^2\delta^2 + \Delta^2}.$$

M ist jedenfalls unabhängig von φ, daher sind die Genauigkeitscurven Kreise um den Mittelpunkt O.

Δ ist eine Function von r; deren Gestalt von der Art und Weise der Messung von r abhängt:

1. Wenn r durch Latten- oder Kettenmessung bestimmt wird, so ist Δ proportional der Quadratwurzel aus r, etwa $\Delta = k\sqrt{r}$, womit

$$M = \sqrt{r^2\delta^2 + k^2 r}.$$

2. Wenn r mittels eines Distanzmessers mit constantem Fadenabstand bestimmt wird (Reichenbach'scher Distanzmesser), so ist Δ proportional r, $\Delta = kr$, womit

$$M = r\sqrt{\delta^2 + k^2}.$$

3. Wenn r mittels eines Distanzmessers mit veränderlichem Fadenabstand und constantem Lattenabschnitt, oder durch Messen des Winkels, unter welchem ein constanter Lattenabschnitt erscheint (Stampfer's Distanzmesser) bestimmt wird, so ist r proportional r^2, $\Delta = kr^2$, womit

$$M = r\sqrt{\delta^2 + k^2 r^2}.$$

Die Zunahme von M kann man dadurch veranschaulichen, dass man die Werthe M als Ordinaten zu den Werthen r als Abscissen aufträgt, wodurch im ersten Falle eine Hyperbel, im zweiten eine gerade Linie, im dritten eine Curve vierten Grades entsteht.

III. Mittlerer Fehler eines durch rechtwinklige Coordinaten bestimmten Punktes.

Wenn die Lage eines Punktes P in Beziehung auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem dadurch festgelegt wird, dass von ihm ein Loth PP_0 auf die Abscissenaxe gefällt und die Länge y desselben, sowie die Entfernung x des Fusspunktes P_0 vom Ursprung gemessen werden, so sind drei Fehlerquellen vorhanden:

1. der Fehler des rechten Winkels, als Bogen in Theilen des Halbmessers ausgedrückt $= l$;
2. der Fehler in der Messung der Abscisse $= \delta x$;
3. der Fehler in der Messung der Ordinate $= \delta y$;

der Gesammtfehler der Abscisse wird $\Delta x = \delta x \pm ly$;
der Gesammtfehler der Ordinate wird $\Delta y = \delta y$.

Versteht man unter diesen Bezeichnungen die einzelnen mittleren Fehler, so ist der mittlere Fehler des Punktes P:

$$M = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + l^2 y^2}.$$

Wäre die Festlegung von P ausgeführt worden durch Fällen eines Lothes auf die Ordinate, so hätte man erhalten

$$M = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + l^2 x^2},$$

was vom Vorigen wesentlich verschieden ist.

Die Fehler δx und δy sind gewisse, aus der Art und Weise der Messung sich ergebende Functionen von x und y; wir werden hier nur den praktisch wichtigsten Fall der unmittelbaren Messung mit Latten oder Kette betrachten, so dass

$$\delta x = k\sqrt{x}, \quad \delta y = k\sqrt{y},$$

und hiermit wird

$$M = \sqrt{k^2(x+y) + l^2 y^2},$$

wobei für x und y nur die absoluten Werthe zu nehmen sind.

Betrachtet man x und y als veränderlich, so stellt die letzte Gleichung die Genauigkeitscurve vor, welche ein Kegelschnitt ist, und zwar eine Parabel mit dem Parameter $p = \frac{k}{2l^2}$, deren Axe im Abstand p von der x-Axe dieser parallel ist (auf der Seite der $-y$), und deren Scheitel den Abstand $\frac{M^2}{k^2} + \frac{p}{2}$ von der y-Axe hat, wie sich zeigt, wenn man die Gleichung in die Form

$$\left(y+\frac{k^2}{2l^2}\right)^2=\frac{k^2}{l^2}\left(\frac{M^2}{k^2}+\frac{k^2}{4l^2}-x\right)$$

bringt. Diese Parabel gilt übrigens nur zwischen der $+x$- und $+y$-Axe als Genauigkeitscurve; in den drei anderen Quadranten gilt je ein entsprechendes Parabelstück als solche.

Um Zahlenwerthe einzuführen, nehmen wir an, es seien x und y mit gewöhnlichen Messplatten mit einem mittleren Fehler von 2 Zoll auf 100 Ruthen, und der rechte Winkel mittels der Kreuzscheibe mit einem mittleren Fehler von 1 Zoll auf 10 Ruthen (Winkelfehler $=3{,}4$ Minuten) bestimmt, so dass, wenn x und y in Ruthen, M in Zollen verstanden wird, zu setzen ist:

$$k=0{,}2, \quad l=0{,}1,$$

und hiermit wird die Gleichung der Genauigkeitscurve:

$$y=-2+2\sqrt{1-x+25\,M^2}.$$

Für $M=1$, 2 und 3 sind die entsprechenden Curven in Fig. 1 gezeichnet; sie bestätigen die Thatsache, dass das mit Messlatten und Kreuzscheibe aufnehmbare Gebiet eine ziemlich bedeutende Länge, aber geringe Breite hat.

Bestimmung der Coordinaten mit Hilfe von Parallelen zur Abscissenaxe.

Um den Hauptfehler der vorigen Methode, nämlich den der Kreuzscheibenmessung (l) zu vermindern und dadurch das Vermessungsgebiet nach der Breite auszudehnen, kann man eine Anzahl Parallelen zur Abscissenaxe legen, und zwar so, dass jede auf die vorhergehende mit Hilfe zweier gleichlanger Lothe gegründet wird, und dass die Fusspunkte aller dieser Lothe in der Richtung der Abscissenaxe gegen einander festgelegt werden; dann wird zur Bestimmung eines Punktes P von ihm eine Senkrechte PP_0 auf die nächstliegende Parallele gefällt und der Fusspunkt P_0 auf dieser Parallelen gegen den Endpunkt des sie auf die nächstvorhergehende Parallele stützenden Lothes durch Messung festgelegt. Wir setzen der Einfachheit wegen voraus, dass alle Parallelen den gleichen Abstand h unter sich haben, und machen die in Wirklichkeit nicht erfüllte, aber das Wesen der Methode bei einer grösseren Anzahl von Parallelen nicht angreifende Annahme, dass y ein ganzes Vielfaches von h sei ($y=nh$); dann hat man an der Abscisse x folgende Fehler: 1. den Fehler der Längenmessung: $k\sqrt{x}$, 2. den Fehler der $n$fachen Kreuzscheibenmessung: $lh\sqrt{n}=l\sqrt{hy}$. Die Ordinate y hat den Fehler der Längenmessung $k\sqrt{y}$, und hieraus ergiebt sich der mittlere Fehler M' des Punktes P:

$$M'=\sqrt{k^2(x+y)+l^2hy}.$$

Die verschiedenen Werthen M entsprechenden Genauigkeitscurven bestehen aus einem System von parallelen Geraden; mit $k=0{,}2$ und $l=0{,}1$, wie oben, wird die Gleichung

$$y = \frac{25 M'^2 - x}{1 + \frac{1}{4} h},$$

welche mit $h = 10$ die in Fig. 1 gezeichneten Geraden für $M' = 2$ und $M' = 3$ giebt. Diese Geraden schneiden die Abscissenaxe in denselben Punkten, wie die entsprechenden Parabeln der einfachen Coordinatenmessung, dagegen die Ordinatenaxe in bedeutend entfernteren Punkten, und begrenzen daher ein viel grösseres Gebiet, als die Parabeln, woraus die Zweckmässigkeit dieser „Parallelenmethode" (bei der Württembergischen Landesvermessung allgemein angewendet) sich klar ergiebt. Nur in der unmittelbaren Nähe der Abscissenaxe sind die Parabelordinaten grösser, als die der Geraden, weshalb dort die Parallelenmethode ungenauer erscheint; indessen ist dort die Annahme, dass die Ordinate ein ganzes Vielfaches des Parallelenabstands h sei, durchaus nicht erfüllt, und es haben die Geraden an jenen Stellen keine Berechtigung, sondern nur die Parabeln. Aus diesem Grunde ist auch die dem Werthe $M = 1$ entsprechende Gerade nicht gezeichnet.

IV. Mittlerer Fehler eines durch „Vorwärtseinschneiden" bestimmten Punktes. (Fig. 2.)

Wenn ein Punkt P gegen zwei feste Punkte A und B festgelegt wird durch Messen der zwei Winkel BAP und ABP, mit den mittleren Fehlern δ und δ', so hat man zur Bestimmung von P die zwei geometrischen Oerter AP und BP, denen mit Vernachlässigung der kleinen Convergenz der den Winkeln BAP und $BAP + \delta$ entsprechenden Strahlen etc. die mittleren Parallelverschiebungen $AP.\delta$ und $BP.\delta'$ zugeschrieben werden können, und die sich unter dem Winkel $APB = \varphi$ schneiden. Es ist daher der mittlere Fehler M des Punktes P nach Massgabe von 1):

$$M = \frac{1}{\sin\varphi} \sqrt{(AP.\delta)^2 + (BP.\delta')^2}$$

und speciell mit $\delta' = \delta$:

$$M = \frac{\delta}{\sin\varphi} \sqrt{AP^2 + BP^2}. \tag{2}$$

Um die Gleichung der Genauigkeitscurve in Beziehung auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu erhalten, legen wir den Ursprung eines solchen in die Mitte von AB und die x-Axe in die Richtung AB, bezeichnen $AB = a$, $\frac{M}{a\delta} = \mu$ und erhalten zunächst folgende Gleichung sechsten Grades:

$$a^4 \mu^2 y^2 = 2(x^2 + y^2 + \tfrac{1}{4}a^2)\{(x^2 + y^2 + \tfrac{1}{4}a^2)^2 - a^2 x^2\}, \tag{3}$$

welche zu erkennen giebt, dass die Curve nach x und y symmetrisch ist, und dass die Punkte A und B, in welchen $y = 0$ und $x^2 = \frac{1}{4}a^2$ der Curve

doppelt angehören, während kein anderer Punkt der Geraden AB auf der Curve liegt.

Die Gleichung 3) lässt sich in folgende Gestalt bringen:

$$(x^2+y^2-\tfrac{1}{4}a^2)(x^4+2x^2y^2+y^4-\tfrac{1}{16}a^4+a^2y^2)+\tfrac{1}{2}a^4y^2(1-\mu^2)=0,$$

woraus ersichtlich ist, dass in dem speciellen Falle $\mu=1$ die Curve zerfällt in einen Kreis um den Durchmesser AB und eine Curve vierten Grades, deren Gleichung ist

$$x^4+2x^2y^2+y^4-\tfrac{1}{16}a^4+a^2y^2=0.$$

Dass der erwähnte Kreis die Bedingung

$$\frac{AP^2+BP^2}{\sin^2 APB}=AB^2$$

erfüllt, lässt sich unmittelbar einsehen. Die Curve vierten Grades hat Aehnlichkeit mit einer Ellipse, deren grosse Axe $=AB=a$ und deren kleine Halbaxe y_0 sich aus der Gleichung 3) findet mit $x=0$:

$$y_0=\frac{a}{2}\sqrt{\sqrt{5}-2}=0{,}2429\,a.$$

Der Kreis und die ellipsenartige Curve sind in Fig. 2 construirt (mit 1 bezeichnet).

In Beziehung auf Maxima oder Minima von M $\left(\text{oder } \mu=\frac{M}{a\,\delta}\right)$ zeigt Gleichung 3), dass dei constantem y das Minimum von μ eintritt mit $x=0$; es wird deshalb ein absolutes Minimum nur auf der y-Axe zu suchen sein. Setzt man zu diesem Zweck in der Curvengleichung 3) $x=0$, so erhält man

$$\frac{\mu^2a^2}{2}=\frac{(y^2+\frac{1}{4}a^2)^3}{y^2},$$

woraus sich durch Differentiirung findet, dass das Minimum von μ erreicht wird mit

$$y=\pm\tfrac{1}{4}a\sqrt{2}=\pm\,0{,}3536\,a,$$

und hiermit wird

$$\mu_{min}=\sqrt{\tfrac{27}{32}}=0{,}9185.$$

Wenn μ diesen Werth hat, so besteht die Genauigkeitscurve lediglich aus den zwei in Fig. 2 mit *Min* bezeichneten Punkten der y-Axe, und wenn $\mu<\mu_{min}$, so existirt die Curve nicht mehr.

Der günstigste Schnitt findet also nicht statt, wie vielleicht vermuthet wurde, unter dem Winkel 90°, sondern dem Winkel $2\,arctang\sqrt{2}=109^\circ 28'$, was auch bei näherer Betrachtung ganz dem praktischen Gefühl entspricht, indem, so lange der Winkel noch nahe an 90°, bei einer Vergrösserung desselben, die Verkürzung der Strahlen AP und BP die in der Verschlimmerung des Schnittwinkels liegende Ungunst überwiegt.

Die Tangenten der Genauigkeitscurven in den Punkten A und B lassen sich leicht construiren; denn wenn BT eine Tangente in B, so geht für den Punkt B als Curvenpunkt der Winkel φ in ABT über, daher

$$a^2\mu^2 = \frac{a^2 + o^2}{\sin^2\varphi}, \quad \sin\varphi = \frac{1}{\mu}.$$

Wenn $\mu > 1$, so hat man zwei supplementäre Werthe φ; sie entsprechen zwei Tangenten in jedem der Punkte A und B.

Wenn $\mu = 1$, so fallen sie zusammen in eine Senkrechte zu AB, und wenn $\mu < 1$, so existirt keine Tangente und kein Curvenpunkt A oder B.

Was die Construction von Curven für verschiedene Werthe μ betrifft, so bietet die Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten wenig Vortheile; bequemer ist das Bildungsgesetz der Gleichung 2):

$$a\mu = \frac{\sqrt{AP^2 + BP^2}}{\sin\varphi}.$$

Für alle Punkte eines durch A und B gehenden Kreises ist $\sin\varphi$ constant, und da sich $\sqrt{AP^2 + BP^2}$ sehr einfach construiren lässt, so wird man für verschiedene Punkte solcher Kreise die Werthe $a\mu$ bestimmen und durch Interpolation die Punkte auffinden, in welchen μ gewisse Werthe, etwa 1, 3, 6, 12 annimmt, so dass die stetige Verbindung dieser Punkte die Genauigkeitscurven ergiebt. Diese Construction ist ganz analog der Construction von Horizontalcurven aus zerstreuten Höhenpunktbestimmungen, wie denn überhaupt der Verlauf der Curven am leichtesten zur Anschauung kommt, wenn man sie als Schnitte von Parallelebenen zur xy-Ebene mit einer krummen Fläche, deren Gleichung die Form $\mu = f(x, y)$ hat, betrachtet. In dieser Art wurden die Curven der Fig. 2 construirt.

Verfolgen wir die Gestalt der Curven für verschiedene Werthe μ, so erinnern wir uns zuerst, dass für $\mu < 0{,}9185$ keine Curven existiren und dass mit $\mu = 0{,}9185$ die zwei Minimumspunkte eine solche repräsentiren. Wenn sodann μ zwischen 0,9185 und 1, so besteht die Curve aus zwei getrennten, die Minimumspunkte umschliessenden Zweigen, wie z. B. die Curve 0,95 in Fig. 2. Für $\mu = 1$ zerfällt sie, wie schon erwähnt, in einen Kreis um AB und eine ellipsenartige, den Kreis in A und B berührende Curve. Wenn $\mu > 1$, so besteht die Curve wieder aus zwei getrennten, sich in A und B schneidenden symmetrischen Theilen, wie die Zeichnung für $\mu = 1$, $1\frac{1}{3}$, 3, 6, 12 darstellt. Wenn $\mu = \infty$, so ist die Gleichung 3) erfüllt mit $y^2 = 0$ oder $(x^2 + y^2)^2 = \infty$; die Curve besteht also aus der doppelt gedachten Geraden AB und einem ebenfalls doppelt gedachten, unendlich grossen Kreis um den Halbirungspunkt von AB, was ganz der Anschauung entspricht.

Anmerkung. Der Ausdruck 2) kann ausser dem mittleren Fehler eines durch Vorwärtseinschneiden bestimmten Punktes auch darstellen den mittleren Fehler eines durch Messung der zwei Entfernungen AP und BP bestimmten Punktes, unter der Voraussetzung, dass der mittlere Fehler der Längenmessung der Länge selbst proportional ist, was bei der Bestimmung durch einen Distanzmesser mit constantem Fadenabstand der Fall ist; denn ist der Fehler Δl einer Länge l: $\Delta l = l.\delta$, so sind die Werthe m, n und

φ des allgemeinen Ausdrucks 1) beziehungsweise $m = \delta . AP$, $n = \delta . BP$, $\varphi = APB$ (Schnittwinkel der zwei um A und B mit AP und BP gezogenen Kreise), daher

$$M = \frac{\delta}{\sin\varphi} \sqrt{\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2}$$

wie oben 2).

Wenn, wie bei Latten- und Kettenmessung, der Fehler der Länge proportional der Wurzel der Länge ist: $\Delta l = k\sqrt{l}$, so wird

$$M = \frac{k}{\sin\varphi} \sqrt{AP + BP}$$

und die Genauigkeitscurven, auf die wir hier nicht eingehen, werden ziemlich complicirter.

V. Mittlerer Fehler eines durch Rückwärtseinschneiden bestimmten Punktes. (Fig. 3.)

Wenn ein Punkt P gegen zwei feste Punkte A und B festgelegt wird durch Messen der zwei Winkel BAP und APB mit den mittleren Fehlern δ und δ', so sind zur Bestimmung von P zwei geometrische Oerter vorhanden: 1. die Gerade AP mit einer in der Gegend von P zu $AP.\delta$ anzunehmenden mittleren Parallelverschiebung, 2. ein Kreis um AB, welcher den Winkel APB fasst; statt dieses Kreises kann seine Tangente in P in Betracht gezogen werden, sofern ihre Parallelverschiebung als Function der Aenderung δ' des Winkels APB angegeben werden kann.

Wenn M (Fig. 4) der Mittelpunkt des Kreises ABP, welcher den Winkel φ fasst, und M' der Mittelpunkt des Kreises ABP', welcher den Winkel $\varphi + d\varphi$ fasst, so ist MM' die Aenderung von MC, und da $MC = \frac{a}{2} \cotg \varphi$, so ist der absolute Werth

$$MM' = \tfrac{1}{2} \frac{a}{\sin^2\varphi} d\varphi.$$

$M'P'$ ist der geänderte Kreishalbmesser $r + dr$, und da $r = \frac{1}{2} \frac{a}{\sin\varphi}$, so ist

$$dr = -\tfrac{1}{2} \frac{a \cos\varphi}{\sin^2\varphi} d\varphi.$$

Als Parallelverschiebung der Tangente in P kann PP' genommen werden, indem die Convergenz MPM' zweier Tangenten mit demselben Rechte vernachlässigt wird, wie die Convergenz zweier Strahlen AP und AP' beim Vorwärtseinschneiden. (IV.)

PP' findet sich durch Betrachtung des Dreiecks $MM'P$, in welchem der Winkel MPM' sehr klein, und der Winkel $PM'M = 180 - (\varphi + 2\alpha)$ angenommen werden darf, so dass

$$M'P = r + dr + PP' = r - MM' \cos(\varphi + 2\alpha),$$

woraus

$$PP' = \frac{1}{2}\frac{a\cos\varphi}{\sin^2\varphi}d\varphi - \frac{1}{2}\frac{a\cos(\varphi+2\alpha)}{\sin^2\varphi}d\varphi,$$

4) $$PP' = \frac{a\sin\alpha\sin(\varphi+\alpha)}{\sin^2\varphi}d\varphi = \frac{PD}{\sin\varphi}d\varphi.$$

Der Winkel, unter dem sich AP und der Kreis um AB schneiden, ist $ABP=\beta$, somit der mittlere Fehler M des Punktes P, mit $d\varphi=\delta'$:

$$M^2 = \frac{1}{\sin^2\beta}\left\{AP^2.\delta^2 + \frac{PD^2.\delta'^2}{\sin^2\varphi}\right\}$$

oder speciell mit $\delta'=\delta$:

$$M = \frac{\delta}{\sin\beta}\sqrt{AP^2 + \frac{PD^2}{\sin^2\varphi}},$$

was sich so umformen lässt:

5) $$M = \frac{\delta}{\sin\varphi}\sqrt{AB^2 + PB^2}$$

oder, wie oben, mit $\frac{M}{a\delta}=\mu$:

$$\mu a = \frac{\sqrt{AB^2 + BP^2}}{\sin\varphi}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich vergleichen mit dem ganz ähnlich gebauten 2) für Vorwärtseinschneiden, und es fällt sofort in die Augen, dass Rückwärtseinschneiden den Vorzug verdient, wenn der Punkt weit von A und B entfernt ist. Ist dieses in so bedeutendem Masse der Fall, dass man näherungsweise AB^2 gegen BP^2 vernachlässigen kann, was zugleich in sich schliesst, dass AP und BP verwechselt werden dürfen, so wird

für Vorwärtseinschneiden $\Delta_v = \frac{\delta}{\sin\varphi}\sqrt{2AP^2}$,

„ Rückwärtseinschneiden $\Delta_r = \frac{\delta}{\sin\varphi}\sqrt{AP^2}$;

also giebt Vorwärtseinschneiden einen $\sqrt{2}$mal grösseren Fehler, als Rückwärtseinschneiden.

Um die Gleichung der Genauigkeitscurven in rechtwinkligen Coordinaten zu erhalten, ist es am besten, den Ursprung nach B und die $+x$-Axe nach BA zu legen; die Curvengleichung ist dann mit $\mu=\frac{M}{a\delta}$:

6) $$\mu^2 a^4 y^2 = a^2[(a-x)^2+y^2](x^2+y^2) + [(a-x)^2+y^2](x^2+y^2)^2.$$

Die Punkte A und B sind, wie beim Vorwärtseinschneiden, Doppelpunkte der Curve, und kein anderer Punkt der Geraden AB kann der Curve angehören, so lange μ endlich ist. Die x-Axe, aber nicht die y-Axe, ist Symmetralaxe der Curve.

Die Untersuchung auf Minima geschieht am bequemsten mit der ursprünglichen Gleichung 5).

Da BP und φ unabhängige Veränderliche sind, so ist ersichtlich, dass das Minimum von μ erreicht wird mit $BP = 0$ und $\varphi = 90^0$, also im Punkte B, und es ist daselbst

$$\mu_{min} = 1.$$

Die Tangenten der Curven in A und B finden sich folgendermassen: In B ist

$$\mu^2 a^2 = \frac{a^2}{sin^2 \varphi},$$

wobei φ der Winkel der Tangente mit AB, also

$$sin\,\varphi = \frac{1}{\mu}.$$

Je nachdem $\mu \gtreqless 1$, hat man zwei supplementäre, einen, oder keinen Werth φ, und entsprechend zwei symmetrisch gegen AB liegende, eine rechtwinklig zu AB liegende, oder keine Tangente. Die Tangenten in B sind somit dieselben wie beim Vorwärtseinschneiden. In A ist

$$\mu^2 a^2 = \frac{2a^2}{sin^2 \varphi}, \quad \text{also} \quad sin\,\varphi = \frac{\sqrt{2}}{\mu}.$$

Je nachdem $\mu \gtreqless \sqrt{2}$, hat man $\begin{matrix}2\\1\\0\end{matrix}$ Tangenten.

Um die Curven zu construiren, kann man zuerst ihre Schnitte mit der y-Axe rechnen, denn die Curvengleichung 6) giebt mit $x = 0$

$$y = \pm a\sqrt{\mu - 1},$$

woraus sich die genannten Schnitte leicht finden.

Ebenso lassen sich die Schnitte der Curven mit der in A rechtwinklig zu AB gezogenen Geraden rechnen, denn mit $x = +a$ giebt die Curvengleichung 6)

$$y^2 = a^2 \left(-\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{1 + 4\mu^2}\right).$$

Sonstige Punkte lassen sich leichter mit Benutzung des in Gleichung 5) ausgesprochenen Bildungsgesetzes, als mit Hilfe der Coordinatengleichung construiren, und zwar wird man ähnlich verfahren, wie bei den Curven für Vorwärtseinschneiden, und dabei beachten, dass je zwei Punkten, welche auf einem durch A und B gehenden Kreis liegen (φ constant) und gleiche Abstände von B haben, gleiche Werthe von μ angehören. Die auf diese Art construirten Curven für $\mu = 1{,}2,\ 1{,}5,\ 3,\ 6,\ 12$ zeigt Fig. 3. So lange $\sqrt{2} > \mu > 1$, hat die Curve ungefähr die Gestalt der für $\mu = 1{,}2$ giltigen; wenn $\mu > \sqrt{2}$, so hat man die aus zwei getrennten Aesten bestehende Form wie 1,5, 3, 6, 12.

Die Vergleichung der bei Vor- und Rückwärtseinschneiden zu befürchtenden Fehler findet am einfachsten statt durch Aufeinanderlegen der betreffenden Curven; beobachtet man hierbei die Schnitte je zweier entsprechender Curven für gleiche Genauigkeit, so giebt deren

stetige Verbindung eine neue Curve: die „Grenzcurve" zwischen den zwei Gebieten, in welchen die eine oder andere Operation günstiger ist. Da ein Punkt dann auf der Grenzcurve liegt, wenn für ihn die beiden Ausdrücke 2) und 5) gleich sind, so folgt, dass die Grenzcurve ein mit dem Halbmesser AB um A gezogener Kreis ist (s. Fig. 3), und zwar ist im Innern des Kreises Vorwärtseinschneiden günstiger als Rückwärtseinschneiden, und umgekehrt. Betrachtet man die Genauigkeitscurven als Horizontalcurven krummer Flächen, wie oben zur Veranschaulichung des Constructionsprincips geschah, so hat man die Grenzcurve aufzufassen als Horizontalprojection der Schnittlinie zweier solcher Flächen.

VI. Mittlerer Fehler eines „pothenotisch" bestimmten Punktes.

Ein Punkt P wird gegen drei gegebene Punkte ABC festgelegt durch Messen der zwei Winkel $APB=\alpha$ und $BPC=\beta$, mit den mittleren Fehlern δ und δ'; dann hat man zur Bestimmung von P zwei geometrische Oerter, nämlich die zwei Kreise, welche um AB und BC beschrieben werden und beziehungsweise die Winkel α und β fassen. Um den mittleren Fehler M von P zu bestimmen, hat man die Tangenten der Kreise im Schnittpunkte P zu betrachten, und wenn m und n deren mittlere Querverschiebungen, und φ ihr Schnittwinkel ist, so hat man

$$M=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{\sin\varphi}.$$

Die Werthe m und n sind nach Massgabe von Gleichung 4)

$$m=\frac{p}{\sin\alpha}\cdot\delta,\quad n=\frac{q}{\sin\beta}\cdot\delta',$$

wenn p und q die Abstände des Punktes P von AB und BC. Um φ allgemein anzugeben, muss man zwei verschiedene Fälle der Lage von ABC gegen P betrachten, welche in Fig. 5 und 6 gezeichnet sind. Wenn eine sich um P drehende Gerade die drei Punkte in der Aufeinanderfolge ABC oder CBA trifft, so hat man im Wesentlichen die Fig. 5, in jedem andern Falle die Fig. 6. Bezeichnet man nun consequent $BAP=u$ und $PCB=v$ (wobei z. B. $PCB=360-BCP$), so findet man allgemein giltig, jedoch ohne Rücksicht auf das Vorzeichen

$$\varphi=BAP+PCB=u+v \tag{7}$$

und hiermit wird

$$M^2=\frac{1}{\sin^2(u+v)}\left(\frac{p^2\delta^2}{\sin^2\alpha}+\frac{q^2\delta'^2}{\sin^2\beta}\right)$$

und speciell mit $\delta'=\delta$:

$$M^2=\frac{\delta^2}{\sin^2(u+v)}\left(\frac{p^2}{\sin^2\alpha}+\frac{q^2}{\sin^2\beta}\right). \tag{8}$$

Da sich zwischen drei Punkten $A\ B\ C$ drei Winkel messen lassen, so kann die Bestimmung von P, welche nur zwei Winkel erfordert, auf drei

verschiedene Arten vorgenommen werden, welchen im Allgemeinen auch verschieden genaue Resulte (verschiedene M) entsprechen werden. Den Fall, dass alle drei Winkel oder reine Richtungen beobachtet sind, lassen wir vorläufig ausser Betracht.

Die Gleichung 8) zeigt zuerst die bekannte Thatsache, dass $M=\infty$, wenn $\sin(u+v)=0$, d. h. wenn P auf dem um ABC gehenden Kreise liegt; sie zeigt ferner, was ebenfalls klar, dass $M=\infty$, wenn p und $q=\infty$, d. h. wenn alle drei Punkte sehr weit entfernt liegen. Wenn nur einer oder zwei Punkte sehr weit entfernt sind, so kann dennoch p und q klein und damit die Bestimmung gut sein.

Mit Hilfe des Ausdrucks 8) kann man unter verschiedenen Winkeln, welche zur Bestimmung eines Punktes P gemessen werden können, diejenigen, welche die beste Bestimmung versprechen, auswählen.

Die beste Uebersicht über die auf verschiedenen Standpunkten bei gegebenen $A\,B\,C$ zu fürchtenden Fehler liefern Genauigkeitscurven, welche wir in zwei speciellen Fällen construiren wollen, nämlich 1. wenn ABC in einer Geraden liegen und $AB=BC$, 2. wenn Winkel $ABC=90^0$ und $AB=BC$.

Pothenotische Bestimmung. Erster specieller Fall. (Fig. 7.)

Ein Punkt P wird pothenotisch bestimmt aus drei Punkten ABC, welche in gleichen Abständen auf einer Geraden liegen, durch Messen derjenigen zwei Winkel, unter welchen die gleichen Strecken AB und BC erscheinen. Die Gleichung 8) geht in diesem Falle über in

$$M=\frac{\delta}{\sin(\alpha+\beta)}\,y\,\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha+\operatorname{cosec}^2\beta}.$$

wenn y der Abstand von P von der Geraden ABC.

Um die Gleichung der Genauigkeitscurve in rechtwinkligen Coordinaten zu erhalten, sei B der Ursprung und BA die x-Axe eines rechtwinkligen Systems; dann findet sich mit $AB=a$

$$\frac{1}{\sin^2(\alpha+\beta)}=\frac{(a^2+x^2+y^2)-4a^2x^2}{4a^2y^2},$$

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}=2\,\frac{x^2+y^2}{a^2y^2}\,(x^2+y^2+a^2)$$

und damit die Curvengleichung

$$9)\qquad 2a^6\mu^2y^2=(a^2+x^2+y^2)\,(x^2+y^2)\,\{(a^2+x^2+y^2)^2-4a^2x^2\},$$

wobei, wie früher, $\mu=\frac{M}{a\delta}$.

Die Gleichung zeigt, dass $A\,B\,C$ Doppelpunkte der Curve sind und dass ausser ihnen kein Punkt der Geraden ABC auf der Curve liegt. Um die Curvenschnitte mit der y-Axe zu untersuchen, giebt die Gleichung 9) mit $x=0$:

$$y^2\,(a^2+y^2)\,(a^2+y^2)^2=2\mu^2a^6y^2.$$

Ausser der schon bekannten Doppelwurzel $y = 0$ hat man hieraus

$$10) \qquad y^2 = a^2(-1 + \sqrt[3]{2\mu^2}),$$

woraus sich $\begin{matrix}2\\1\\0\end{matrix}$ Werthe y ergeben, je nachdem $\mu \gtreqless \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Das Minimum von μ in Beziehung auf x tritt ein mit $x = 0$, wie die Differentiirung von 9) zeigt, und sodann findet sich mit $y = 0$ das absolute Minimum

$$\mu_{min} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707.$$

Die Curvengleichung 9) lässt sich folgendermassen umformen:

$$(x^2 + y^2 - a^2)\{(x^2 + y^2)^2 + a^2y^2(4y^2 + 7a^2) - a^2x^2(a^2 - 4y^2)\} - 2a^6y^2(\mu^2 - 4) = 0,$$

woraus hervorgeht, dass mit $\mu = 2$ die Curve zerfällt in einen Kreis um B mit dem Halbmesser a (wie sich unmittelbar einsehen lässt) und eine Curve sechsten Grades, deren Gleichung

$$(x^2 + y^2)^3 = a^2x^2(a^2 - 4y^2) - a^2y^2(7a^2 + 4y^2)$$

die Construction durch Probiren gestattet, wodurch die ∞artige Curve 2) in Fig. 7 erhalten wird.

Um mehrere Curven für verschiedene Werthe μ zu construiren, rechnet man zuerst nach Gleichung 10) die Schnitte mit der y-Axe, dann schreibt man mit $a = 1$ und $x^2 + y^2 = r^2$ die Curvengleichung in die Form

$$2\mu^2y^2 = (1 + r^2)r^2\{(1 + r^2)^2 - (2x)^2\},$$

berechnet einzelne Werthe $(1 + r^2)r^2$ und $(1 + r^2)^2$ und zeichnet die diese Functionen darstellenden Curven, mit deren Hilfe sich die Genauigkeitscurven empirisch construiren lassen. Die so entstandenen Curven für $\mu = 1$, $1\frac{1}{2}$, 2, 3, 8 sind in Fig. 7 zusammengestellt. So lange μ zwischen 0,707 und 2 liegt, besteht die Curve aus einer hochstehenden 8, welche mit $\mu = 2$ in die schon erwähnte liegende ∞ und einen Kreis übergeht, während für jeden Werth $\mu > 2$ eine bretzelartige Curve, ähnlich der für $\mu = 3$ und 8 gezeichneten entsteht.

In praktischer Beziehung ist zu bemerken, dass die Bestimmungen in unmittelbarer Nähe eines der drei gegebenen Punkte sehr gut sind, sofern man sich vor bedeutender Annäherung an die Gerade ABC hütet, welche hier an Stelle des in anderen Fällen pothenotischer Bestimmung gefährlichen Kreises tritt. Wenn die Wahl des Standpunktes in der Nähe eines der drei Punkte einigermassen willkürlich ist, so hat man sich möglichst dem durch den Punkt gezogenen Loth zu ABC zu nähern.

Um eine Vergleichung mit Vor- und Rückwärtseinschneiden zu machen, kann man etwa AC (also $2a$) als Basis der letzteren Operationen ansehen; dann ist der Kreis um den Durchmesser AC Genauigkeitscurve mit $M = 2a\delta$, sowohl für Vorwärtseinschneiden, als auch für pothenotische Bestimmung. Zur Vergleichung innerhalb dieses Kreises dienen unsere Curven. Ausserhalb des Kreises ist pothenotische Bestimmung ungenauer, als die beiden

anderen Methoden, was sich am klarsten zeigt, wenn man einen Punkt P in so grosser Entfernung r vom Kreise betrachtet, dass dagegen dessen Durchmesser $2a$ vernachlässigt werden kann; dann lässt sich annehmen, dass

$$AP = CP = r \text{ und } \sin APB = \sin BPC = \tfrac{1}{2} \sin\varphi$$

und es ist

1. für Vorwärtseinschneiden $\dfrac{M_1^2}{\delta^2} = \dfrac{2r^2}{\sin^2\varphi}$,

2. „ Rückwärtseinschneiden $\dfrac{M_2^2}{\delta^2} = \dfrac{r^2}{\sin^2\varphi}$,

3. „ pothenotische Bestimmung $\dfrac{M_3^2}{\delta^2} = \dfrac{y^2}{\sin^2\varphi}\,\dfrac{8}{\sin^2\varphi}$.

Mit $BAP = u$, wie oben, ist

$$y = r \sin u = \frac{r^2 \sin\varphi}{2a},$$

$$\frac{M_3^2}{\delta^2} = \frac{2r^2}{\sin^2\varphi}\,\frac{r^2}{a^2},$$

$$M_1^2 : M_2^2 : M_3^2 = 2 : 1 : \frac{2r^2}{a^2}.$$

Da nach unserer Annahme r viel grösser als a, so ist die pothenotische Bestimmung in diesem Falle die ungünstigste der drei Operationen.

Pothenotische Bestimmung. Zweiter specieller Fall. (Fig. 8.)

Ein Punkt P wird bestimmt aus drei Punkten $A\ B\ C$, welche ein bei P rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck bilden, durch Messen der zwei Winkel APB und BPC, unter welchen die zwei Katheten erscheinen.

Um vermittelst des in Gleichung 8) ausgesprochenen Bildungsgesetzes der Genauigkeitscurven die Gleichung derselben in rechtwinkligen Coordinaten zu erhalten, legen wir die x-Axe eines rechtwinkligen Systems in die Hypotenuse des gegebenen Dreiecks und die $+y$-Axe so, dass sie durch den Scheitel des rechten Winkels geht. Wenn die halbe Hypotenuse $=a$, so ist

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \left(\frac{x^2+y^2-a(x+y)}{a^2-a(x+y)}\right)^2,$$

$$\frac{1}{\sin^2\beta} = 1 + \left(\frac{x^2+y^2-a(x+y)}{a^2-a(x+y)}\right)^2,$$

$$\frac{1}{\sin^2(u+v)} = \frac{(a^2+x^2+y^2)^2 - 4a^2x^2}{a^2-r^2},$$

$$p^2 = \frac{(a-x-y)^2}{2}, \quad q^2 = \frac{(a+x-y)^2}{2}$$

und die Curvengleichung mit $\mu = \dfrac{M}{a\delta}$

$$11)\quad a^4\mu^2 = \frac{a^2+x^2+y^2}{(a^2-x^2-y^2)^2}\,(a^2+x^2+y^2-2ay)\{(a^2+x^2+y^2)^2 - 4a^2x^2\}.$$

Der Nenner $(a^2-x^2-y^2)^2$ zeigt, dass $\mu=\infty$, wenn der zu bestimmende Punkt P auf dem Kreise ABC liegt; ferner zeigt der Bau der Gleichung, dass die drei Punkte $A\ B\ C$ Doppelpunkte der Curve sind.

In Beziehung auf x hat man das Minimum von μ mit $x=0$, womit

$$\mu^2 a^4 = \frac{(a^2+y^2)^3}{(a+y)^2}. \tag{12}$$

Differentiirung zeigt, dass zwei Minima stattfinden, nämlich bei

$$y = \frac{a}{4}(-3 \pm \sqrt{17}) = \begin{cases} +0{,}2808\,a, \\ -1{,}7808\,a. \end{cases}$$

Die entsprechenden Minima selbst sind

$$\mu_{min} = \begin{cases} 0{,}875, \\ 10{,}911. \end{cases}$$

Das absolute Minimum 0,875 liegt im Innern des Dreiecks nahe an seinem Schwerpunkt.

Um die Curven zu construiren, kann man zuerst ihre Schnitte mit der y-Axe berechnen, indem man nach Gleichung 11) für verschiedene Werthe y die zugehörigen μ rechnet und durch (graphische) Interpolation die bestimmten μ entsprechenden y ermittelt. Sodann findet man in ähnlicher Weise die Curvenschnitte mit einer unter 45° gegen die Axe geneigten Geraden, indem man in der Gleichung 11) $y=x$ setzt, und erhält

$$\mu^2 a^4 = \frac{a^2+2x^2}{(a^2-2x^2)^2}(a^2+2x^2-2ax)(a^4+4x^4).$$

Ebenso lassen sich die Schnitte mit anderen durch den Ursprung gehenden Strahlen construiren, von denen z. B. die durch $x=3y$ und $y=3x$ bezeichneten besondere Bequemlichkeit der Rechnung gewähren. Auf diese Weise sind die in Fig. 8 gezeichneten Curven erhalten worden.

Verfolgt man die Curven in den Veränderungen, die sie erleiden, wenn μ von 0 bis ∞ wächst, so sieht man, dass, wenn $\mu<0{,}875$, keine Curve existirt; mit $\mu=0{,}875$ tritt der Punkt $y=+0{,}2808$ auf, und wenn μ grösser als 0,875 und kleiner als $\sqrt{2}$, so hat man eine ganz im Innern des Kreises liegende, den Minimumspunkt umschliessende Curve. Wenn μ grösser als $\sqrt{2}$ wird, so tritt die Curve in B mit einer Schleife aus dem Kreise heraus, was auch bei A und C der Fall wird, sobald μ grösser als 2 wird. Wenn μ bis zu einem gewissen, zwischen 4 und 5 liegenden Betrage gewachsen ist, so schlagen die drei an A, B und C heraustretenden Schleifen zwischen A und B, sowie B und C zusammen, so dass z. B. für $\mu=7$ die mit 7 bezeichnete Curve entsteht. Mit weiter wachsendem μ nähern sich die unteren Enden der Curve immer mehr, bis sie mit $\mu=10{,}911$ (zweites Minimum) im Punkte $y=-1{,}7808$ zusammenschlagen. Für weiter wachsende μ besteht dann die Curve aus zwei getrennten Theilen, wie z. B. die Curve 12, und behält diese Form bei bis $\mu=\infty$, womit der innere Zweig mit dem Kreis ABC zusammenfällt, während der äussere ins Unendliche rückt.

Als wichtigstes praktisches Resultat finden wir, dass alle Bestimmungen im Innern des Dreiecks ABC sehr gut und einer Triangulirung aus zweien der drei Punkte vorzuziehen sind, während ausserhalb des Dreiecks nur die Bestimmungen in der Nähe der drei Punkte gut sind und im Allgemeinen einer Triangulirung nachstehen.

Es scheint noch geboten, den oben schon berührten Fall dreier gemessener Winkel ins Auge zu fassen. Wenn ausser $APC = \alpha$ und $BPC = \beta$ auch noch $CPA = \gamma$ gemessen ist, so hat man zur Bestimmung von P drei geometrische Oerter, welche sich wegen der Messungsfehler im Allgemeinen nicht in einem Punkte schneiden werden. Zur Auffindung des wahrscheinlichsten Schnittpunktes können zwei Wege eingeschlagen werden: 1. man vertheilt den Widerspruch $360^0 - (\alpha + \beta + \gamma)$ auf die drei Winkel gleich (oder bei ungleichen Gewichten diesen entsprechend), was mit Rücksicht auf die einzige vorhandene Bedingungsgleichung der Methode der kleinsten Quadrate gemäss ist; 2. man geht von Näherungswerthen $x_0\, y_0$ der Coordinaten von P aus, und hat als Beziehung zwischen den wahrscheinlichsten Correctionen $x\,y$ dieser Näherungswerthe drei (wegen der Kleinheit von x und y lineare) Gleichungen von der Form

$$13)\qquad \left\{ \begin{aligned} a_1 x + b_1 y + w_1 &= 0, \\ a_2 x + b_2 y + w_2 &= 0, \\ -(a_1 + a_2)\, x - (b_1 + b_2)\, y + w_3 &= 0, \end{aligned} \right.$$

welche, nach den Vorschriften der Methode der kleinsten Quadrate weiter behandelt, sowohl x und y, als auch deren mittlere Fehler $\varDelta x$ und $\varDelta y$ liefern. Beide Methoden geben denselben wahrscheinlichsten Schnittpunkt, und wenn man nur diesen selbst will, so ist offenbar die erste der Einfachheit wegen weit vorzuziehen. Die zweite Methode liefert aber auch noch den mittleren Fehler $\sqrt{\varDelta x^2 + \varDelta y^2}$ des Punktes P, welcher sich auf dem andern Wege nicht ermitteln lässt.

Um endlich den Fall reiner Richtungsbeobachtungen zu betrachten, machen wir, an das Vorhergehende anknüpfend, die Annahme, es sei zufälligerweise bei der Winkelmessung obiger Werth

$$w = 360 - (\alpha + \beta + \gamma) = 0$$

geworden, dann wird zwischen den Absolutgliedern der drei Bedingungsgleichungen 13) die Beziehung bestehen

$$w_1 + w_2 + w_3 = 0,$$

und wenn man unbekümmert darum weiter rechnet, so findet man (mit den üblichen Bezeichnungen)

$$(\delta\delta) = [ww.2] = 0$$

und damit auch $\varDelta x$ und $\varDelta y = 0$.

Wenn infolge absolut genauer Winkelmessung $w = 0$ geworden ist, so war dieses Resultat zu erwarten; wenn aber die gemessenen Winkel, ehe sie in die Rechnung eingeführt wurden, zuvor „auf der Station“ aus-

geglichen wurden, oder wenn Richtungsbeobachtungen vorliegen, deren Fehler auf der Station gar nicht zu Tage treten, so hat man für $[ww.2]$, welches $=[\delta\delta]$ sein soll, statt 0 denjenigen Werth zu nehmen, welcher der Ausgleichung auf der Station, oder bei Richtungsbeobachtungen einer aus anderweitigen Anhaltspunkten hervorgehenden Schätzung gemäss ist, und damit bekommt man die richtigen Werthe von Δx und Δy.

Wenn diese etwas weitläufige Rechnung nicht angestellt werden will, so bekommt man einen immerhin für praktische Zwecke genügenden Näherungswerth für den mittleren Fehler des bestimmten Punktes, wenn man bei drei gemessenen Winkeln den mittleren Fehler jedes nicht ausgeglichenen Winkels ermittelt oder bei Richtungsbeobachtungen sich anderweitig eine Schätzung des Fehlers einer Richtungsdifferenz verschafft, und dann drei Werthe M durch dreifache Auswahl je zweier Winkel nach Gleichung 8) bestimmt, deren kleinster eine obere Grenze des gesuchten mittleren Fehlers ist, weil der aus drei Winkeln bestimmte Punkt jedenfalls genauer sein muss, als der aus nur zweien bestimmte, wie das auch bei der Triangulirung mit drei Winkeln oben bemerkt wurde. Wenn man diese obere Grenze mit vermindernder Abrundung als Resultat selbst nimmt, so wird der Anforderung der Praxis Genüge geleistet sein.

Es dürfte nicht unzweckmässig sein, dieses Verfahren durch ein Zahlenbeispiel zu erläutern:

Der Punkt P(olytechnikum) wurde bestimmt aus M(ichael), W(arte) und D(axlanden) (Fig. 9). Die gegebenen Coordinaten sind

	y	x
M	$-\ 34{,}623$,	$+27{,}639$,
W	$-107{,}306$,	$-27{,}930$,
D	$+\ 98{,}868$,	$-\ 6{,}706$.

Gemessen wurde

M – W	$53^\circ\ 11'\ 41'',03$
W – D	$161^\circ\ 32'\ 16'',82$
D – M	$145^\circ\ 17'\ 2'',15$
Summe	$360^\circ\ 1'\ 0{,}00''$.

Vermindert man zum Zwecke der Ausgleichung auf der Station jeden Winkel um 20″ und rechnet dann die Coordinaten von P, so findet man

$$y = +\,1169{,}416, \quad x = +\,17682{,}198.$$

Geht man andererseits aus von den Näherungswerthen

$$y_0 = +\,1169{,}460, \quad x_0 = +\,17682{,}140,$$

so wird man zur Bestimmung der hieran anzubringenden Correctionen y und x folgende drei (durch Differentiirung der transcendenten Gleichungen zwischen $x_0 + x$, $y_0 + y$, den Coordinaten der gegebenen Punkte und den beobachteten Winkeln, nach x und y erhaltenen) Gleichungen aufstellen:

$$-\ 72{,}683\,x - 55{,}569\,y - 18{,}19 = 0,$$
$$+\ 206{,}174\,x + 21{,}222\,y - 31{,}08 = 0,$$
$$-\ 133{,}491\,x + 34{,}347\,y - 10{,}73 = 0,$$

deren weitere Behandlung auf die Normalgleichungen

$$65625\,x + 3822\,y - 3660 = 0,$$
$$3822\,x + 4723\,y - \quad 15 = 0$$

führt, deren Auflösung giebt

$$x = +\,0{,}058, \quad y = -\,0{,}044,$$

was zu x_0 und y_0 zugefügt, dieselben Coordinaten giebt, wie die unmittelbare Rechnung. Ferner ergiebt sich mit Zuhilfenahme von $(ww) = 72504$:

$$(\delta\delta) = (ww.2) = 1200,$$

wie zu erwarten:

$$(1200 = 3.20^2)$$

und die Gewichte

$$p_x = 62532, \quad p_y = 4500,$$

und damit die mittleren Fehler

$$\Delta x = 0{,}139, \quad \Delta y = 0{,}516$$

und endlich

$$M = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 0{,}535.$$

Wenn andererseits die Winkel auf der Station ausgeglichen wurden, so hat man den mittlern Fehler δ eines Winkels vor der Ausgleichung:

$$\delta = \frac{w}{\sqrt{3}} = 34{,}6$$

und nach der Ausgleichung:

$$\delta' = \tfrac{1}{3}\sqrt{2}\,.\,w = 28{,}3.$$

Unter Zugrundelegung von δ giebt Gleichung 8)

1. aus MW und WD $M = 0.785$,
2. „ WD und DM $M = 0{,}870$,
3. „ DM und MW $M = 0{,}576$.

Der mittlere Fehler des ausgeglichenen Punktes muss also kleiner sein als 0,576, und man kann ihn für praktische Zwecke genähert = 0,5 annehmen, was mit dem genauen Werth 0,535 nahezu übereinstimmt.

VII. Mittlerer Fehler eines durch mehr als zwei geometrische Oerter bestimmten Punktes.

Die letzten Betrachtungen führen unmittelbar noch zu der allgemeinen Auflösung der wichtigen Aufgabe: den mittleren Fehler eines Punktes zu bestimmen, dessen Lage nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt wurde aus mehr als zwei Beobachtungen, deren jede einen geometrischen Ort des Punktes liefert. Ganz wie in dem speciellen Falle des vorigen Abschnitts führen wir diese Aufgabe zurück auf diejenige der Bestimmung der mittleren Fehler M_x und M_y der rechtwinkligen Coordinaten

des Punktes, indem diese sofort nach Gleichung 1) den mittleren Fehler M des Punktes geben:

$$14)\qquad M=\sqrt{M_x^2+M_y^2}.$$

M_x und M_y lassen sich aber in bekannter Weise gleichzeitig mit den wahrscheinlichsten Werthen x und y ermitteln, sobald zwischen den wahrscheinlichsten Verbesserungen $\delta_1\delta_2\ldots$ der beobachteten Grössen, welche die genannten geometrischen Oerter geliefert haben, und den wahrscheinlichsten Verbesserungen xy irgendwelcher Näherungswerthe der gesuchten Coordinaten, lineare Gleichungen aufgestellt worden sind von der Form

$$15)\qquad \left\{\begin{array}{l} \delta_1=a_1x+b_1y+w_1, \\ \delta_2=a_2x+b_2y+w_2, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \end{array}\right.$$

denn dann verlangt die Methode der kleinsten Quadrate bekanntlich, dass x und y zu bestimmen sind aus den zwei Gleichungen

$$16)\qquad \left\{\begin{array}{l} (paa)\,x+(pab)\,y+(paw)=0, \\ (pab)\,x+(pbb)\,y+(pbw)=0 \end{array}\right.$$

(wobei p die Gewichte der Beobachtungen und die Klammern Summen bezeichnen), und bei der Auflösung dieser zwei Gleichungen findet man gelegentlich die Gewichte von y und x:

$$p_y=(pbb)-\frac{(pab)}{(paa)}(pab)=(bb.1),$$

$$p_x=(paa)-\frac{(pab)}{(pbb)}(pab)$$

und sodann, wenn δ den mittleren Fehler einer Beobachtung vom Gewicht 1 bezeichnet:

$$M_x^2=\frac{\delta}{p_x},\quad M_y^2=\frac{\delta}{p_y},$$

$$17)\qquad M^2=\delta^2\,\frac{(paa)+(pbb)}{(paa)\,(pbb)-(pab)\,(pab)}.$$

Gewöhnlich begnügt man sich mit der numerischen Berechnung von M_x und M_y in jedem einzelnen Falle und kann dann keine allgemeinen Resultate ziehen; dieses ist blos möglich, wenn die algebraische Substitution der Ausdrücke, welche $a_1a_2\ldots$, $b_1b_2\ldots$ als Function der gegebenen und gemessenen Grössen darstellen, in die Gleichung 17) ausgeführt wird, was allerdings im Allgemeinen äusserst complicirte Formeln liefert. Verhältnissmässig sehr einfach wird der Ausdruck für M werden in dem folgenden, schon am Ende des Abschnitts V erwähnten, praktisch wichtigen Beispiele.

VIII. Mittlerer Fehler eines durch einfache Triangulirung bestimmten Punktes.

Ein Punkt P wird als einfach triangulirt bezeichnet, wenn er gegen zwei gegebene Punkte A und B festgelegt wurde mit Hilfe eines Dreiecks ABP durch Messung der drei Winkel $APB=\alpha$, $PBA=\beta$, $BAP=\gamma$ desselben. Sind $p_1\, p_2\, p_3$ beziehungsweise die Gewichte von $\alpha\,\beta\,\gamma$, so findet man die wahrscheinlichste Lage von P dadurch, dass man den Widerspruch $\alpha+\beta+\gamma-180^0$ (beziehungsweise 180^0+ Excess) auf die drei Winkel umgekehrt proportional ihren Gewichten vertheilt und aus $AB=a$ die anderen Seiten $AP=b$ und $BP=c$, sowie nöthigenfalls die Coordinaten von P in irgendwelchem System rechnet. Da aber dieses Verfahren keinen Aufschluss über den mittleren Fehler von P giebt, so wenden wir das folgende an:

Unter Zugrundelegung eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen Ursprung in der Mitte von AB und dessen X-Axe auf AB liegt, seien $X_0\, Y_0$ Näherungswerthe der Coordinaten $X\,Y$ von P; dann bestehen zwischen den wahrscheinlichsten Verbesserungen $x\,y$ der letzteren und den wahrscheinlichsten Verbesserungen $\delta_1\, \delta_2\, \delta_3$ von $\alpha\,\beta\,\gamma$ die Beziehungen

$$\gamma+\delta_3=arctang\,\frac{Y_0+y_0}{a+X_0+x},$$

$$\beta+\delta_2=arctang\,\frac{Y_0+y}{a-X_0-x},$$

$$\delta_1+\delta_2+\delta_3=180-(\alpha+\beta+\gamma).$$

Durch Entwickelung der Werthe *arctang* nach dem Taylor'schen Satze in Potenzen von x und y findet man auf Glieder erster Ordnung genau, mit Benutzung geometrischer Beziehungen:

$$\delta_1=\left(-\frac{\sin\beta}{c}+\frac{\sin\gamma}{b}\right)x-\left(\frac{\cos\beta}{c}+\frac{\cos\gamma}{b}\right)y+w_1,$$

$$\delta_2=+\frac{\sin\beta}{c}\,x+\frac{\cos\beta}{c}\,y+w_2,$$

$$\delta_3=-\frac{\sin\gamma}{b}+\frac{\cos\gamma}{b}\,y+w_3,$$

wobei $w_1\, w_2\, w_3$ gewisse uns nicht weiter interessirende Constante sind. Diese Gleichungen sind Repräsentanten der allgemeinen Form 15) und es finden sich daher die Summencoefficienten der Gleichung 16):

$$(paa)=\left(\frac{\sin\gamma}{b}-\frac{\sin\beta}{c}\right)^2 p_1+\left(\frac{\sin\beta}{c}\right)^2 p_2+\left(\frac{\sin\gamma}{b}\right)^2 p_3,$$

$$(pbb)=\left(\frac{\cos\beta}{c}+\frac{\cos\gamma}{b}\right)^2 p_1+\left(\frac{\cos\beta}{c}\right)^2 p_2+\left(\frac{\cos\gamma}{b}\right)^2 p_3,$$

$$(pab)=\left(\frac{\sin\beta}{c}-\frac{\sin\gamma}{b}\right)\left(\frac{\cos\beta}{c}+\frac{\cos\gamma}{b}\right)p_1+\frac{\sin\beta\cos\beta}{bc}\,p_2-\frac{\sin\gamma\cos\gamma}{bc}\,p_3.$$

Ehe wir weiter gehen, dürfte es von Interesse sein, zu untersuchen, ob Gleichung 17) mit $p_1=0$ und $p_2=p_3=1$ den schon bekannten Werth für Vorwärtseinschneiden (2) und mit $p_1=1$, $p_2=1$ und $p_3=0$ denjenigen für Rückwärtseinschneiden (5) liefert, und in der That wird im ersten Fall

$$(paa)+(pbb)=\frac{1}{c^2}+\frac{1}{b^2},$$

$$(paa)(pbb)-(pab)(pab)=\left(\frac{\sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma}{bc}\right)^2$$

und

$$M^2=\delta^2\frac{b^2+c^2}{\sin^2\alpha},$$

wie 2), und im zweiten Falle

$$(paa)+(pbb)=\frac{1}{b^2}+\frac{2}{c^2}+\frac{2\cos(\beta+\gamma)}{bc},$$

$$(paa)(pbb)-(pab)(pab)=\left(\frac{\sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma}{bc}\right)^2,$$

$$M^2=\delta^2\frac{a^2+b^2}{\sin^2\alpha},$$

wie 5).

Die weitere Rechnung lässt sich, wenn man ein übersichtliches Resultat haben will, nicht mehr allgemein durchführen; wir betrachten deswegen nur den wichtigsten speciellen Fall: $p_1=p_2=p_3=1$, womit

$$(paa)+(pbb)=\frac{a^2+b^2+c^2}{b^2c^2},$$

$$(paa)(pbb)-(pab)(pab)=\frac{3\sin^2\alpha}{b^2c^2}$$

und

$$M^2=\delta^2\frac{a^2+b^2+c^2}{3\sin^2\alpha}. \tag{18}$$

Dieser durch seine Einfachheit interessante Ausdruck fordert zur Vergleichung mit 2) und 5) auf. Man hat für die Bestimmung von P

$$\text{aus } \alpha \text{ und } \beta\text{:}\quad M_\gamma^2=\frac{a^2+b^2}{\sin^2\alpha},$$

$$\text{aus } \alpha \text{ und } \gamma\text{:}\quad M_\beta^2=\frac{a^2+c^2}{\sin^2\alpha},$$

$$\text{aus } \beta \text{ und } \gamma\text{:}\quad M_\alpha^2=\frac{b^2+c^2}{\sin^2\alpha},$$

somit

$$M^2=\frac{1}{2}\,\frac{M_\alpha^2+M_\beta^2+M_\gamma^2}{3}. \tag{19}$$

M^2 ist unter allen Umständen kleiner als jede der Grössen, deren halbes arithmetisches Mittel es ist, was sich aus der Beziehung zwischen den drei Seiten eines Dreiecks unmittelbar folgern lässt.

Ist P so weit von A und B entfernt, dass AB gegen $AP = r$ vernachlässigt werden kann, so hat man

1. für Vorwärtseinschneiden: $M^2 = \frac{2 r^2}{\sin^2 \alpha}$,

2. für Rückwärtseinschneiden: $M^2 = \frac{r^2}{\sin^2 \alpha}$,

3. für Triangulirung: $M^2 = \frac{2 r^2}{3 \sin^2 \alpha}$.

Diese drei Werthe verhalten sich wie

$$\sqrt{3} : \sqrt{1,5} : 1 \quad \text{oder wie} \quad 1,732 : 1,225 : 1,$$

genähert wie 7 : 5 : 4.

Zu allgemeineren Vergleichungen sollen Genauigkeitscurven construirt werden. Die Gleichung derselben findet sich nach Massgabe des Bildungsgesetzes 18):

$$3 a^4 \mu^2 y^2 = \left[(x^2 + y^2 + \tfrac{1}{4} a^2)^2 - a^2 x^2\right] \left[\tfrac{3}{2} a^2 + 2 x^2 + 2 y^2\right]$$

und lässt sich so umformen:

$$0 = (x^2 + y^2 - \tfrac{1}{4} a^2) \left[2 x^4 + 4 x^2 y^2 + a^2 x^2 + 3 a^2 y^2 + 2 y^4 - \tfrac{3}{8} a^4\right] + a^4 y^2 (2 - 3 \mu^2),$$

woraus zu ersehen ist, dass mit $\mu^2 = \frac{3}{2}$ die Curve zerfällt in einen Kreis um AB und eine ellipsenartige Curve vierten Grades, deren Gleichung sich so schreiben lässt:

$$4 y^2 = -(3 a^2 + 4 x^2) + 2 a \sqrt{3 a^2 + 4 x^2}$$

und damit die Construction ermöglicht.

Die Tangenten in A und B lassen sich leicht construiren; denn wenn BT eine Tangente in B, so ist $ABT = \varphi$ derjenige Werth α, welcher den Werthen $b = a$, $c = 0$ in Gleichung 18) entspricht, also

$$M^2 = \delta^2 \frac{2 a^2}{3 \sin^2 \varphi}, \qquad \sin \varphi = \frac{1}{\mu} \sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

Man hat $\left\{\begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right\}$ Tangenten, wenn $\mu \gtreqless \sqrt{\frac{2}{3}}$.

In Betreff ausgezeichneter Werthe von μ ist klar, dass solche nur auf der Y-Axe zu suchen sind; man hat daher mit $x = 0$ aus der Curvengleichung

$$3 a^4 \mu^2 = \frac{(y^2 + \frac{1}{4} a^2)^2 (\frac{3}{2} a^2 + 2 y^2)}{y^2},$$

woraus sich durch Differentiirung findet, dass ein Minimum von μ eintritt, wenn

$$y^2 = \tfrac{3}{16} a^2 \left(-1 + \sqrt{\tfrac{11}{3}}\right), \qquad y = 0,4142\, a,$$

und es ist

$$\mu_{min} = 0,7978.$$

Die Construction der Curven kann in der oben (Abschn. IV und V) beschriebenen Weise ausgeführt werden und liefert die Fig. 10, welche vollkommen den Charakter der für Vorwärtseinschneiden gültigen hat.

IX. Mittlerer Fehler eines durch drei Strahlen vorwärts eingeschnittenen Punktes.

Als weiteren besonderen Fall der im Abschnitt VII behandelten Aufgabe betrachten wir die Bestimmung eines Punktes P durch Messung dreier Winkel in den Ecken $A\,B\,C$ eines gegebenen Dreiecks, wodurch drei Strahlen AP, BP, CP festgelegt werden. Da die Richtungen AB, BC, CA fehlerfrei sind, so sind die wahrscheinlichsten Winkelverbesserungen gleich den wahrscheinlichsten Richtungsverbesserungen. Bezeichnet man mit $X_1 Y_1$, $X_2 Y_2$, $X_3 Y_3$ die Coordinaten der Punkte $A\,B\,C$, mit $X_0\,Y_0$ Näherungswerthe der Coordinaten von P, mit $x\,y$ deren wahrscheinlichste Verbesserungen, mit φ_1, φ_2, φ_3 die Richtungen AP_0, BP_0, CP_0, und endlich mit δ_1, δ_2, δ_3 deren wahrscheinlichste Verbesserungen, so erhält man drei Beziehungen zwischen δ_1, δ_2, δ_3 und x, y, von denen die erste ist:

$$\varphi_1 + \delta_1 = arctang\,\frac{Y_0 + y - Y_1}{X_0 + x - X_1}.$$

Die zwei anderen Gleichungen unterscheiden sich hiervon nur durch die Zeiger 2 und 3 an φ, δ, X, Y. Durch Entwickelung von *arctang* nach Potenzen von x und y bekommt man auf Glieder erster Ordnung genau drei Gleichungen von der Form

$$\delta = ax + by + w,$$

wobei

$$20)\qquad \left\{\begin{aligned} a_1 &= -\frac{\sin\varphi_1}{r_1}, & b_1 &= \frac{\cos\varphi_1}{r_1},\\ a_2 &= -\frac{\sin\varphi_2}{r_2}, & b_2 &= \frac{\cos\varphi_2}{r_2},\\ a_3 &= -\frac{\sin\varphi_3}{r_3}, & b_3 &= \frac{\cos\varphi_3}{r_3}, \end{aligned}\right.$$

wenn r_1, r_2, r_3 die drei Strahlenlängen AP, BP, CP bedeuten.

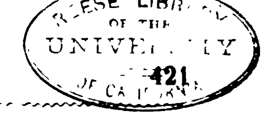
Nach Anleitung der Gleichung 17) bildet man

$$(paa) + (pbb) = \frac{p_1}{r_1^2} + \frac{p_2}{r_2^2} + \frac{p_3}{r_3^2},$$

$$(paa)\,(pbb) - (pab)\,(pab) = \frac{p_1 p_2}{r_1^2 r_2^2}\sin^2(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{p_1 p_3}{r_1^2 r_3^2}\sin^2(\varphi_1 - \varphi_3) + \frac{p_2 p_3}{r_2^2 r_3^2}\sin^2(\varphi_2 - \varphi_3).$$

Die Differenzen $(\varphi_1 - \varphi_2)\ldots$ sind die Winkel an P und mögen mit α_3, α_2, α_1 bezeichnet werden, und dann ist

$$21)\qquad \frac{M^2}{\delta^2} = \frac{\dfrac{p_1}{r_1^2} + \dfrac{p_2}{r_2^2} + \dfrac{p_3}{r_3^2}}{\dfrac{p_1 p_2}{r_1^2 r_2^2}\sin^2\alpha_3 + \dfrac{p_1 p_3}{r_1^2 r_3^2}\sin^2\alpha_2 + \dfrac{p_2 p_3}{r_2^2 r_3^2}\sin^2\alpha_1}.$$



Dieser Ausdruck geht in den für Vorwärtseinschneiden mit zwei Strahlen giltigen 2) über, wenn $p_3 = 0$ und $p_1 = p_2$ gesetzt werden.

In der Folge beschränken wir die Allgemeinheit der Aufgabe dadurch, dass alle Gewichte gleich (=1) und das Dreieck ABC gleichseitig mit der Seite 1 angenommen wird. Setzt man dann noch $\frac{M}{1.\delta} = \mu$, so geht 21) über in

$$22) \qquad \mu^2 = \frac{r_1^2 r_2^2 + r_1^2 r_3^2 + r_2^2 r_3^2}{r_1^2 \sin^2 \alpha_1 + r_2^2 \sin^2 \alpha_2 + r_3^2 \sin^2 \alpha_3}.$$

Für einzelne Punkte in der Ebene des Dreiecks lässt sich nun μ sofort angeben:

1. In der Dreiecksmitte wird

$$r_1 = r_2 = r_3 = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 120^0$$

und hiermit

$$\mu^2 = \tfrac{4}{9}, \quad \mu = \tfrac{2}{3}.$$

2. In der Mitte einer Seite wird

$$r_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \quad r_2 = r_3 = \tfrac{1}{2}, \quad \alpha_1 = 180^0, \quad \beta_1 = \gamma_1 = 90,$$
$$\mu^2 = \tfrac{7}{8}, \quad \mu = 0{,}935.$$

3. In der Ecke des Dreiecks wird μ unbestimmt, wie bei allen bisher betrachteten Fällen; es lässt sich jedoch angeben, wenn gesagt wird, dass die Dreiecksecke als Punkt einer bestimmten, durch sie gehenden Geraden aufgefasst werden soll, und demnach ist

a) In der Ecke auf der Winkelhalbirungslinie

$$r_1 = 0, \quad r_2 = r_3 = 1, \quad \alpha_1 = 60, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 150,$$
$$\mu^2 = 2, \quad \mu = 1{,}414.$$

b) In der Ecke auf einer Dreiecksseite

$$r_1 = 0, \quad r_2 = r_3 = 1, \quad \alpha_1 = 60^0, \quad \alpha_2 = 180, \quad \alpha_3 = 120,$$
$$\mu^2 = \tfrac{4}{3}, \quad \mu = 1{,}155.$$

Zu weiteren Untersuchungen eignen sich am besten Genauigkeitscurven, welche deshalb in Fig. 11 gezeichnet sind. (Die eingezeichnete „Grenzcurve" bleibt vorläufig ausser Betracht.) Die Construction geschah durch Ermittelung von μ für eine grössere Anzahl von Punkten mit Hilfe der Gleichung 22) und graphische Interpolation, also ohne Benutzung der Curvengleichung in rechtwinkligen Coordinaten, weil diese nach den bisher gemachten Erfahrungen die Construction nicht wesentlich fördert.

Ausgezeichnete Werthe von μ können offenbar nur auf der Winkelhalbirungslinie des Dreiecks vorkommen und zeigen sich am deutlichsten in der Curve, nach der die Fläche, als deren Horizontalschnitte die Genauigkeitscurven betrachtet werden können, geschnitten wird von der durch die Winkelhalbirungslinie gelegten verticalen Ebene. Diese Curve ist in Fig. 11 gezeichnet (durch den Zusatz „Vorwärtseinschneiden" kenntlich gemacht). Sie zeigt, dass das absolute Minimum von μ stattfindet in der Dreiecks-

mitte. Ein zweites Minimum zeigt sich ausserhalb des Dreiecks, ungefähr an der Stelle, wo die Winkelhalbirungslinie den um das Dreieck beschriebenen Kreis schneidet; ein relatives Maximum findet statt beim Ueberschreiten der Dreiecksseite und erklärt sich sehr einfach durch das Werthloswerden derjenigen zwei Strahlen, welche sich dort unter 180° schneiden.

Die sonstigen Genauigkeitsverhältnisse erklärt der blose Anblick der Curven.

X. Mittlerer Fehler eines aus drei Winkeln pothenotisch bestimmten Punktes.

Als letzten und interessantesten Fall betrachten wir die Bestimmung eines Punktes P durch Messung der drei Winkel, unter welchen die drei Verbindungslinien der gegebenen Punkte ABC in ihm erscheinen. Wir behalten die Bezeichnungen des vorigen Abschnittes bei und erhalten auf demselben Wege, wie dort, drei lineare Gleichungen zwischen den wahrscheinlichsten Winkelverbesserungen $\delta_1\ \delta_2\ \delta_3$ und den wahrscheinlichsten Coordinatenverbesserungen $x\ y$ von der Form

$$\delta = ax + by + w,$$

wobei

$$a_1 = \frac{\sin\varphi_2}{r_2} - \frac{\sin\varphi_3}{r_3}, \quad b_1 = -\frac{\cos\varphi_2}{r_2} + \frac{\cos\varphi_3}{r_3},$$

$$a_2 = \frac{\sin\varphi_3}{r_3} - \frac{\sin\varphi_1}{r_1}, \quad b_2 = -\frac{\cos\varphi_3}{r_3} + \frac{\cos\varphi_1}{r_1},$$

$$a_3 = \frac{\sin\varphi_1}{r_1} - \frac{\sin\varphi_2}{r_2}, \quad b_3 = -\frac{\cos\varphi_1}{r_1} + \frac{\cos\varphi_2}{r_2}.$$

Rechnet man nun geradezu nach Anleitung von Gleichung 17), so erhält man sehr verwickelte Ausdrücke, denen schwer ein geometrischer Sinn abzugewinnen ist. Besser ist es, die geometrische Bedeutung der a und b aufzusuchen, welche in einfacher Beziehung zu den Tangenten der drei Kreise stehen, die sich um ABP, ACP und BCP beschreiben lassen.

Wenn man alle Richtungen φ von der Dreiecksseite CB als Anfangsrichtung zählt (d. h. wenn man CB parallel der X-Axe des Coordinatensystems legt), so zeigt Fig. 12:

$$23)\quad \begin{cases} a_1 = \dfrac{r_3 \sin\varphi_2 - r_2 \sin\varphi_3}{r_2 r_3} = -\dfrac{s_1}{r_2 r_3} \sin\psi_1, \\ b_1 = -\dfrac{r_3 \cos\varphi_2 + r_2 \cos\varphi_3}{r_2 r_3} = \dfrac{s_1}{r_2 r_3} \cos\psi_1, \end{cases}$$

wobei φ_1 die Richtung der Tangente des Kreises BCP in P ist. Dass CB als Anfangsrichtung gewählt wurde, schadet der allgemeinen Giltigkeit der Gleichungen 23) nicht; denn wenn die Richtung CB nicht $=0$, sondern etwa $=\lambda$ ist, so erhält man durch Multiplication der Gleichungen 23) mit $\cos\lambda$ und $\sin\lambda$ oder umgekehrt, und Addition oder Subtraction zwei Gleichungen,

welche genau so gebaut sind, wie 23), jedoch statt φ_2 und φ_3 die Winkel $(\varphi_2 - \lambda)$ und $(\varphi -_3\lambda)$ enthalten. Man kann daher allgemeingiltig schreiben:

$$a_1 = -\frac{s_1}{r_2 r_3} \sin\psi_1, \quad b_1 = \frac{s_1}{r_2 r_3} \cos\psi_1,$$

$$a_2 = -\frac{s_2}{r_1 r_3} \sin\psi_2, \quad b_2 = \frac{s_2}{r_1 r_3} \cos\psi_2,$$

$$a_3 = -\frac{s_3}{r_1 r_2} \sin\psi_3, \quad b_3 = \frac{s_3}{r_1 r_2} \cos\psi_3.$$

Es haben also die Coefficienten a, b der Bedingungsgleichungen genau die Form 20) und man findet daher auch den Werth M für gleiche Gewichte, wenn in Gleichung 21)

$$r_1 \text{ durch } \frac{r_2 r_3}{s_1}, \quad r_2 \text{ durch } \frac{r_1 r_3}{s_2}, \quad r_3 \text{ durch } \frac{r_1 r_2}{s_3}$$

ersetzt wird und statt $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ die Schnittwinkel $\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3$ der drei Kreistangenten gesetzt werden. Hierdurch erhält man

$$24) \qquad \frac{M^2}{\delta^2} = \frac{\left(\frac{r_1 r_3}{s_2} - \frac{r_1 r_2}{s_3}\right)^2 + \left(\frac{r_2 r_3}{s_1} - \frac{r_1 r_2}{s_3}\right)^2 + \left(\frac{r_2 r_3}{s_1} - \frac{r_2 r_3}{s_2}\right)^2}{\left(\frac{r_2 r_3}{s_1}\right)^2 \sin^2\sigma_1 + \left(\frac{r_1 r_3}{s_2}\right)^2 \sin^2\sigma_2 + \left(\frac{r_1 r_2}{s_3}\right)^2 \sin^2\sigma_3}.$$

Die Schnittwinkel der drei Kreistangenten in P sind nach Gleichung 7):

$$\sigma_1 = ACP + PBA, \quad \sigma_2 = BAP + PCB, \quad \sigma_3 = CBP + PAC,$$

wobei jedoch immer in demselben Sinne zu zählen ist, so dass z. B.

$$ACP = 360^0 - PCA.$$

Bei der numerischen Berechnung des Ausdrucks 24) fiel auf, dass die drei Grössen im Nenner gleich wurden, was zur Auffindung einer geometrischen Bedeutung derselben führte. Dass diese Ausdrücke $\frac{r_2 r_3}{s_1} \sin\sigma_1$ etc. und die in der Gleichung 8) vorkommenden $\frac{p}{\sin\alpha}$ und $\frac{q}{\sin\beta}$ identisch sind, lässt sich sofort mit Hilfe des Sinusgesetzes einsehen, und die geometrische Bedeutung kommt also auch den letzteren zu. Der Winkel ϑ_1, unter dem sich die Kreise ABP und ACP schneiden, ist, wie oben bemerkt:

$$\sigma_1 = ACP + PBA,$$

oder auch, da es sich blos um $(\sin\sigma_1)^2$ handelt, mit Beziehung auf Fig. 13:

$$\sigma_1 = \beta - \alpha \quad \text{und} \quad \frac{r_2 r_3}{s_1} \sin\sigma_1 = \frac{PB \,.\, PB'}{s_1 \operatorname{cosec}\alpha}.$$

Das Product $PB \,.\, PB'$ ist aber bekanntlich constant gleich dem Product $\varrho\varrho'$ der zwei Abschnitte, in welche der durch P gehende Kreisdurchmesser im Punkte P getheilt wird, und $s_1 \operatorname{cosec}\alpha$ ist der Durchmesser D des um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises, daher

25) $$\frac{r_2 r_3}{s_1} \sin \sigma_1 = \frac{\varrho \varrho'}{D}.$$

Dieser Beweis ändert sich nicht wesentlich, wenn P ausserhalb des Kreises liegt. Die Gleichung 24) geht demnach über in

$$\frac{M^2}{\delta^2} = \tfrac{1}{3} \left(\frac{D}{\varrho \varrho'}\right)^2 r_1^2 r_2^2 r_3^2 \left\{ \left(\frac{r_1}{s_2 s_3}\right)^2 + \left(\frac{r_2}{s_1 s_3}\right)^2 + \left(\frac{r_3}{s_1 s_2}\right)^2 \right\},$$

wonach sich die numerische Rechnung am Schlusse des Abschnitts VI sehr einfach controliren und bestätigen lässt.

Wenn P auf den Kreis der drei gegebenen Punkte selbst fällt, so wird $\varrho = 0$, also $M = \infty$, wie es sein muss, ausgenommen, wenn zugleich einer der Werthe $r = 0$ wird, d. h. wenn P mit einem gegebenen Punkte zusammenfällt; dann wird M unbestimmt und lässt sich nur angeben, wenn P als ein Punkt einer bestimmten, durch den gegebenen Punkt gehenden Linie betrachtet wird. Wenn $D = \infty$, d. h. wenn die drei Punkte auf einer Geraden liegen, so wird ϱ der Abstand h des Punktes P von der Geraden ABC, und $\varrho' = \infty$, aber offenbar $\frac{\varrho'}{D} = 1$, also $\frac{D}{\varrho \varrho'} = \frac{1}{h}$, wie sich auch mit Hilfe von Gleichung 25) nachweisen lässt.

Um eine Vergleichung mit der früheren, bei zwei gemessenen Winkeln giltigen Formel 8) anzustellen, setzen wir

$$\frac{r_2 r_3}{s_1} = e_1, \quad \frac{r_1 r_3}{s_2} = e_2, \quad \frac{r_1 r_2}{s_3} = e_3$$

und finden:

Gemessen CPA und APB giebt $\frac{M_1^2}{\delta^2} = \left(\frac{D}{\varrho \varrho'}\right)^2 (e_1^2 e_2^2 + e_1^2 e_3^2)$,

APB „ BPC „ $\frac{M_2^2}{\delta^2} = \left(\frac{D}{\varrho \varrho'}\right)^2 (e_2^2 e_3^2 + e_2^2 e_1^2)$,

BPC „ CPA „ $\frac{M_3^2}{\delta^2} = \left(\frac{D}{\varrho \varrho'}\right)^2 (e_3^2 e_1^2 + e_3^2 e_2^2)$,

CPA, APB „ BPC „ $\frac{M^2}{\delta^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{D}{\varrho \varrho'}\right)^2 (e_1^2 e_2^2 + e_2^2 e_3^2 + e_3^2 e_1^2)$,

$$M^2 = \tfrac{1}{2} \, \frac{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}{3},$$

wodurch eine Beziehung zwischen den Fehlern M gebildet ist, ganz entsprechend der Beziehung zwischen den bei Vorwärtseinschneiden, Rückwärtseinschneiden mit zwei Winkeln und Triangulirung zu fürchtenden Fehlern 19).

Nunmehr betrachten wir den speciellen Fall, dass ein gleichseitiges Dreieck ABC gegeben ist, dessen Seite $s = 1$, womit $D = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ und

$$\frac{M^2}{\delta^2} = \mu^2 = \tfrac{1}{3} \left(\frac{D}{\varrho \varrho_1}\right)^2 r_1^2 r_2^2 r_3^2 (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2).$$

Hiernach lässt sich μ rechnen für jeden beliebigen Punkt, z. B.:

1. Dreiecksmitte giebt $r_1 = r_2 = r_3 = \varrho = \varrho' = \frac{1}{3}\sqrt{3}$,

$$\mu^2 = \tfrac{4}{27}, \quad \mu = 0{,}385.$$

2. Seitenmitte: $r_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $r_2 = r_3 = \frac{1}{2}$, $\varrho\varrho' = \frac{1}{4}$,

$$\mu^2 = \tfrac{5}{12}, \quad \mu = 0{,}645.$$

3. In der Ecke des Dreiecks ist μ unbestimmt, wenn nicht zugleich eine durch sie gehende Linie angegeben wird, auf welcher P liegen soll, daher:

a) auf der Winkelhalbirungslinie: $r_1 = 0$, $r_2 = r_3 = 1$,

$$\varrho = 0, \quad \varrho' = D, \quad \frac{r_1}{\varrho} = \frac{0}{0} = 1,$$

$$\mu^2 = \tfrac{2}{3}, \quad \mu = 0{,}816;$$

b) auf einer Dreiecksseite: $r_1 = 0$, $r_2 = r_3 = 1$,

$$\varrho = 0, \quad \varrho' = D, \quad \frac{r_1}{\varrho} = \frac{1}{\cos 30^0} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$\mu^2 = \tfrac{8}{9}, \quad \mu = 0{,}943.$$

Die Vergleichung mit den entsprechenden Werthen des vorigen Abschnittes zeigt, dass dieselben durchaus grösser sind, und insbesondere ist in der Mitte des Dreiecks der Fehler des Vorwärtseinschneidens $\sqrt{3}$ mal so gross, als der der pothenotischen Bestimmung.

Zu allgemeineren Vergleichungen dienen die in Fig. 14 gezeichneten Genauigkeitscurven, welche im Wesentlichen den Charakter der für pothenotische Bestimmung mit zwei Winkeln giltigen (Fig. 8) haben. Die Curve für $\mu = 2{,}3$, welche den Uebergang zwischen den zwei Hauptformen bildet, ist im Innern des Kreises, wo sie nichts Besonderes zeigt, der Uebersichtlichkeit wegen weggelassen.

Von Interesse ist noch eine besondere Vergleichung der pothenotischen Bestimmung mit Vorwärtseinschneiden durch Uebereinanderlegen der betreffenden Curven, ebenso, wie die Vergleichung des Vor- und Rückwärtseinschneidens mit je zwei Winkeln (s. o.), wodurch die in Fig. 11 gezeichnete Grenzcurve erhalten wird, welche die Gebiete scheidet, in denen die eine oder andere der betreffenden Operationen günstiger ist. Vorwärtseinschneiden ist genauer als pothenotische Bestimmung innerhalb der drei beutelartig gestalteten Flächentheile, welche naturgemäss den für pothenotische Bestimmung vollkommen ungünstigen Kreis ABC in seiner ganzen Ausdehnung enthalten. Der ganze Flächenraum des Dreiecks selbst gehört zum Gebiete der pothenotischen Bestimmung. Will man die durch die Grenzcurve getrennten Gebiete ihrer Grösse nach vergleichen, so hat dieses nur einen Sinn, wenn man nicht die ganze unbegrenzte Ebene in Betracht zieht, weil sonst das Gebiet für pothenotische Bestimmung unbegrenzt, das andere aber begrenzt wäre. Setzt man aber z. B. voraus, dass keine Bestimmung gemacht wird ausserhalb des Kreises, der durch

die drei äussersten Punkte der Grenzcurve geht, so zeigt eine planimetrische Bestimmung, dass sich die zwei Gebiete verhalten wie 32 zu 68, oder genähert wie 1 zu 2.

Da die Grenzcurve betrachtet werden kann als Horizontalprojection der Schnittlinie der zwei krummen Flächen, deren Horizontalcurven die Genauigkeitscurven der zwei betrachteten Operationen sind, so sind noch die in Fig. 11 gezeichneten Schnittlinien einer durch die Winkelhalbirungslinie des Dreiecks gelegten Verticalebene mit beiden in einander gelegt gedachten Flächen von Interesse; die Schnittpunkte dieser zwei Schnittlinien unter sich liefern Punkte der Grenzcurve, wie durch projicirende Lothe angedeutet ist.

Die Schnittlinie der Fläche der pothenotischen Bestimmung hat eine dem Uebergang über den Kreis ABC entsprechende Asymptote, an welche sich zwei Curvenäste anlegen, die beide nicht weit entfernt von der Asymptote je ein Minimum zeigen. Es ist jedoch nur das dem Dreiecksmittelpunkte entsprechende ein eigentliches Minimum der Fläche; das andere entspricht einem Sattelpunkt der Fläche, deren diese drei hat an den Stellen, wo die Curve (2,3) Doppelpunkte hat.

Nachwort.

Mit den letzten zwei Abschnitten IX und X sind die vorstehenden Untersuchungen in so nahe Berührung mit den „Studien über rationelle Vermessungen im Gebiete der höheren Geodäsie“ von Friedrich Robert Helmert (Schlömilch, Zeitschrift etc. XIII, Jahrg. 1868, S. 73flgg.) gekommen, dass es geboten ist, die Beziehung, welche hierzu stattfindet, zu erörtern:

Den Ausdruck 1) $M^2 = \frac{m^2 + n^2}{sin^2 \varphi}$, welcher den mittleren Fehler des Schnittpunktes zweier unter dem Winkel φ geneigter Geraden als Function der mittleren Parallelverschiebungen m und n der Geraden giebt, benutzte ich schon im J. 1867 und wandte ihn damals insbesondere auf die pothenotische Aufgabe (Abschn. VI) an; ich betrachtete denselben als eine dem praktischen Gefühl entsprechende Näherungsformel für mittlere und wahrscheinliche Fehler, und wurde in der Folge durch meinen Freund und Collegen Lüroth auf den sehr naheliegenden Beweis der strengen Giltigkeit für mittlere Fehler aufmerksam gemacht, den ich nachher auch in der Helmert'schen Abhandlung (Abschn. 11) fand.

Ausser den diesen Ausdruck betreffenden ersten Abschnitten, welche zu der oben Abschn. I nach Gleich. 1) gemachten Bemerkung über die Hel-

mert'sche Gl. 15) veranlassten, blieb mir diese (nicht rasch zu lesende) Abhandlung fremd bei Bearbeitung der in den Abschn. I bis IX mitgetheilten Gegenstände; dagegen wurde ich zu ihrem weiteren Studium geführt durch die Schwierigkeiten des Abschnitts X (pothenotische Bestimmung mit drei Winkeln), und fand dabei die interessante Gleichung 37), welche vor der von mir bis dahin allein benutzten, entsprechenden Gleichung 17) des Abschnitts VII den Vorzug geometrischer Anschaulichkeit hat; zugleich fand ich, dass ich bereits im Besitz eines einfachen Beweises dieser Gleichung 37), nämlich in der Entwickelung der Gleichung 21) des Abschnitts IX war, welche der Helmert'schen Auseinandersetzung vorzuziehen ist, wenn es sich um Anwendungen wie diejenige des Abschnitts X handelt.

Demnach ist als von Helmert entlehnt zu bezeichnen der in dem letzten Abschnitt benutzte Gedanke, die linearen Bedingungsgleichungen statt in der gewöhnlichen Form

$$0 = ax + by + w,$$

in der trigonometrischen Form

$$0 = \frac{\sin\varphi}{m} x - \frac{\cos\varphi}{n} x + p$$

anzuwenden.

In den Punkten, in welchen die vorliegenden Untersuchungen sich mit den Helmert'schen „Studien" berühren, glaube ich eine Erweiterung der betreffenden Theorieen geliefert zu haben.

Ich ergreife diese Gelegenheit, Herrn Helmert für die durch seine interessante Abhandlung erzielte Förderung meiner Untersuchungen den gebührenden Dank auszusprechen.

Druckfehlerberichtigung. Auf S. 165 dieses Bandes, 19. Zeile, lies: „Multiplication" statt „Modification".

XVII.

Integration der Differenzengleichung

$$(n+\varkappa+1)(n+\lambda+1)\,\Delta^2\varphi(n)+(a+bn)\,\Delta\varphi(n)+c\varphi(n)=0.$$

Von

Dr. J. Thomae,
Docent in Halle.

(Fortsetzung der Abhandlung in Bd. XVI S. 146—158 dieser Zeitschrift.)

Artikel 4.

In diesem Artikel stellen wir nun einige Betrachtungen an über hypergeometrische Reihen dritter Ordnung mit einem unendlich grossen Exponenten. Er bildet daher eine Ergänzung meines Aufsatzes über diese Reihen in den Leipziger Mathematischen Annalen, Bd. II S. 427. Es behält die Reihe

$$F_\varepsilon\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', & x\\ \beta, & \beta', & \beta'', & \end{pmatrix}$$

für ein über alle Grenzen wachsendes β dann einen Sinn, wenn x in dem nämlichen Verhältnisse abnimmt, als β zunimmt. Wir führen bei Behandlung dieses Grenzfalles zum Gebrauch in diesem Aufsatze die abkürzende Bezeichnung ein:

$$W_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', & x\\ & \beta', & \beta'' & \end{pmatrix}=\lim_{w=\infty} w^\alpha F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \alpha''; & \frac{x}{w}\\ w, & \beta', & \beta'', & \end{pmatrix}$$

$$\text{20)}\qquad =x^\alpha\Big(1+\tfrac{1}{1}\cdot\frac{\alpha+\beta'}{\alpha-\alpha'+1}\cdot x$$

$$+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{\alpha+\beta'.\alpha+\beta'+1}{\alpha-\alpha'+1.\alpha-\alpha'+2}\cdot\frac{\alpha+\beta''.\alpha+\beta''+1}{\alpha-\alpha''+1.\alpha-\alpha''+2}\cdot x^2+\ldots\Big),$$

woraus durch Vertauschung von α mit α' und α'' die Functionen

$$W_{\alpha'}\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', & x\\ & \beta', & \beta'', & \end{pmatrix},\quad W_{\alpha''}\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', & x\\ & \beta', & \beta'', & \end{pmatrix}$$

hervorgehen. Wo keine Verwechselung möglich ist, werden wir diese Ausdrücke mit $W_\alpha(x)$, $W_{\alpha'}(x)$, $W_{\alpha''}(x)$ bezeichnen. Es sind aber $W_\alpha(x)$, $W_{\alpha'}(x)$, $W_{\alpha''}(x)$ drei particuläre Integrale der Differentialgleichung

$$\text{21)}\quad \frac{d^3y}{d(lg\,x)^3} - (\alpha+\alpha'+\alpha''+x)\frac{d^2y}{d(lg\,x)^2}$$
$$+[\alpha\alpha'+\alpha'\alpha''+\alpha''\alpha-(\beta'+\beta'')\,x]\frac{d^2y}{d(lg\,x)^2} - (\alpha\alpha'\alpha''+\beta'\beta''x)\,y = 0,$$

welche man aus der allgemeinen Gleichung 3) der Mathematischen Annalen, II S. 429, leicht herleitet. An derselben Stelle findet sich die mit 4) bezeichnete Gleichung vor:

$$\text{22)}\quad F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'', & x\\ \beta, & \beta', & \beta'', & \end{pmatrix} = \frac{\Pi(\alpha-\alpha')\,.\,\Pi(\alpha-\alpha'')\,.\,x^\alpha}{\Pi(\alpha+\beta'-1)\,.\,\Pi(\alpha+\beta''-1)\,.\,\Pi(-\alpha'-\beta')\,.\,\Pi(-\alpha''-\beta'')}$$
$$\times\int_0^1 ds\int_0^1\frac{d\sigma\,.\,s^{\alpha+\beta'-1}\,.\,\sigma^{\alpha+\beta''-1}}{(1-s)^{\alpha'+\beta'}\,.\,(1-\sigma)^{\alpha''+\beta''}\,.\,(1-xs\sigma)^{\alpha+\beta}},$$

aus welcher die Gleichung folgt

$$\text{23)}\quad W_\alpha(x) = \frac{\Pi(\alpha-\alpha')\,\Pi(\alpha-\alpha'')\,.\,x^\alpha}{\Pi(\alpha+\beta'-1)\,\Pi(\alpha+\beta''-1)\,\Pi(-\alpha'-\beta')\,\Pi(-\alpha''-\beta'')}$$
$$\times\int_0^1 ds\int_0^1\frac{d\sigma\,.\,s^{\alpha+\beta'-1}\,.\,\sigma^{\alpha+\beta''-1}\,.\,e^{xs\sigma}}{(1-s)^{\alpha'+\beta'}\,(1-\sigma)^{\alpha''+\beta''}}.$$

Durch Vertauschung von α mit α' und α'' erhält man ebenso $W_{\alpha'}(x)$ und $W_{\alpha''}(x)$ durch bestimmte Doppelintegrale dargestellt, welche wir benutzen, um den Grenzwerth dieser Functionen für ein unendlich grosses x zu finden.

Dabei setzen wir voraus, dass der reelle Theil von β' grösser als der von β'' sei. Ist nun t eine positive, ins Unendliche zunehmende Zahl, so ist

$$\lim_{t=\infty}\frac{(-t)^{\beta''}\,.\,W_\alpha(-t)\,.\,\Pi(\alpha+\beta'-1)\,\Pi(\alpha+\beta''-1)\,\Pi(-\alpha'-\beta')\,\Pi(-\alpha''-\beta'')}{\Pi(\alpha-\alpha')\,\Pi(\alpha-\alpha'')}$$
$$=\lim_{t=\infty}(-t)^{\alpha+\beta''}\int_0^1 ds\int_0^1 d\sigma\,\frac{s^{\alpha+\beta'-1}\,.\,\sigma^{\alpha+\beta''-1}\,.\,e^{-ts\sigma}}{(1-s)^{\alpha'+\beta'}\,(1-\sigma)^{\alpha''+\beta''}},$$

welcher Ausdruck durch Einführung der neuen Variabeln u für σ mittels der Gleichung

$$u = \sigma t$$

in den folgenden übergeht:

$$\lim_{t=\infty}(-1)^{\alpha+\beta''}\int_0^1 ds\int_0^t\frac{du\,.\,s^{\alpha+\beta'-1}\,.\,u^{\alpha+\beta''-1}\,.\,e^{-us}}{(1-s)^{\alpha'+\beta'}\left(1-\frac{u}{t}\right)^{\alpha''+\beta''}}.$$

Nun ist aber

$$\lim_{t=\infty}\int_0^t \frac{u^{\alpha+\beta''-1}.\,e^{-us}}{\left(1-\frac{u}{t}\right)^{\alpha''+\beta''}}.\,du = \int_0^\infty u^{\alpha+\beta''-1}.\,e^{-us}\,du = s^{-\alpha-\beta''}.\,\Pi(\alpha+\beta''-1),$$

und unser Grenzwerth nimmt daher die Gestalt an:

$$(-1)^{\alpha+\beta''}.\int_0^1 \frac{\Pi(\alpha+\beta''-1).\,s^{\beta'-\beta''-1}\,ds}{(1-s)^{\alpha'+\beta'}}$$

$$= \frac{(-1)^{\alpha+\beta''}.\,\Pi(\alpha+\beta''-1)\,\Pi(\beta'-\beta''-1)\,\Pi(-\alpha'-\beta')}{\Pi(-\alpha'-\beta'')}$$

unter der Bedingung, dass β' einen grösseren reellen Theil als β'' hat. Und so finden wir das Resultat

$$\text{24)}\quad \begin{aligned} &\lim_{t=\infty} t^{\beta''}.\,W_\alpha\begin{pmatrix}\alpha,\ \alpha',\ \alpha'', \\ \beta',\ \beta'', \end{pmatrix}-t\Bigg) \\ &= (-1)^\alpha.\,\frac{\Pi(\beta'-\beta''-1)\,\Pi(\alpha-\alpha')\,\Pi(\alpha-\alpha'')}{\Pi(\alpha+\beta'-1)\,\Pi(-\alpha'-\beta'')\,\Pi(-\alpha''-\beta'')}.\end{aligned}$$

Wir untersuchen auch noch den Grenzwerth

$$\lim_{t=\infty}\frac{W_\alpha(t).\,\Pi(\alpha+\beta'-1)\,\Pi(\alpha+\beta''-1)\,\Pi(-\alpha'-\beta')\,\Pi(-\alpha''-\beta'')}{e^t.\,t^{\alpha+\alpha'+\alpha''+\beta''+\beta'-2}.\,\Pi(\alpha-\alpha').\,\Pi(\alpha-\alpha'')}.$$

Er ist gleich

$$\lim_{t=\infty} t^{2-\alpha'-\alpha''-\beta'-\beta''}.\int_0^1 ds\int_0^1 \frac{d\sigma\ s^{\alpha'+\beta'-1}.\,\sigma^{\alpha+\beta''-1}.\,e^{t(s\sigma-1)}}{(1-s)^{\alpha'+\beta'}(1-\sigma)^{\alpha''+\beta''}}$$

und geht durch die Substitution

$$1-s=\frac{u}{t},\quad 1-\sigma=\frac{v}{t}$$

in den Ausdruck über:

$$\lim_{t=\infty}\int_0^t du\int_0^t \frac{dv\left(1-\frac{u}{t}\right)^{\alpha+\beta'-1}\left(1-\frac{v}{t}\right)^{\alpha+\beta''-1}}{u^{\alpha'+\beta'}.\,v^{\alpha''+\beta''}}.\,e^{-u-v+\frac{u.v}{t}}$$

$$=\int_0^\infty du\int_0^\infty dv\,u^{-\alpha'-\beta'}.\,e^{-u}.\,v^{-\alpha''-\beta''}.\,e^{-v}$$

$$=\Pi(-\alpha'-\beta').\,\Pi(-\alpha''-\beta''),$$

und man gewinnt so das Resultat

$$\text{25)}\quad \lim_{t=\infty}\frac{W_\alpha\begin{pmatrix}\alpha,\ \alpha',\ \alpha'', \\ \beta',\ \beta'', \end{pmatrix}t\Bigg)}{e^t.\,t^{\alpha+\alpha'+\alpha''+\beta'+\beta''-2}} = \frac{\Pi(\alpha-\alpha')\,\Pi(\alpha-\alpha'')}{\Pi(\alpha+\beta'-1)\,\Pi(\alpha+\beta''-1)}.$$

Vertauscht man in 24) und 25) β' mit β'' und setzt dann $\beta''=-\alpha''+1$, so erhält man die beiden Gleichungen

$$\lim_{t=\infty} t^{\beta'} \cdot \lim_{w=\infty} F\left(\alpha+w,\ \alpha+\beta',\ \alpha-\alpha'+1,\ \frac{-t}{w}\right)=(-1)^{\alpha}\frac{\Pi(\alpha-\alpha')}{\Pi(-\alpha'-\beta')},$$

$$\lim_{t=\infty}\frac{\lim_{w=\infty} F\left(\alpha+w,\ \alpha+\beta',\ \alpha-\alpha'+1,\ \frac{t}{w}\right)}{e^{t}\,.\,t^{\alpha+\alpha'+\beta'-1}}=\frac{\Pi(\alpha-\alpha')}{\Pi(\alpha+\beta'-1)};$$

Resultate, welche der Theorie der Gauss'schen Reihen angehören.

Artikel 5.

Nach diesen Vorbereitungen suchen wir den Zusammenhang zwischen drei Integralen (Lösungen) der Differenzengleichung 3) oder der Recursionsformel 2), die aus den unter 6) und 7) verzeichneten beliebig ausgewählt werden können. Wir suchen den Zusammenhang zwischen den Functionen

$$F_{\alpha}\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \alpha''\\ n, & \beta', & \beta''\end{pmatrix},\quad \frac{\Pi(-\alpha-n)}{\Pi(\beta'-n)}\,.\,F_{\beta'}\begin{pmatrix}n, & \beta', & \beta''\\ \alpha, & \alpha', & \alpha''\end{pmatrix},$$
$$\frac{\Pi(-\alpha-n)}{\Pi(\beta''-n)}\,.\,F_{\beta''}\begin{pmatrix}n, & \beta', & \beta''\\ \alpha, & \alpha', & \alpha''\end{pmatrix}$$

(in denen wir das siebente Element der hypergeometrischen Reihen, welches 1 ist, fortgelassen haben, was fortan immer geschehen soll).

Zu dem Ende denken wir uns die zwischen drei Integralen einer Differenzengleichung nothwendig vorhandene Beziehung in die Form gebracht:

$$26)\qquad F_{\alpha}^{(n)}=k'(n)\frac{\Pi(-\alpha-n)}{\Pi(\beta'-n)}\,.\,F_{\beta'}^{(n)}+k''(n)\frac{\Pi(-\alpha-n)}{\Pi(\beta''-n)}\,.\,F_{\beta''}^{(n)},$$

worin zur Abkürzung

$$F_{\alpha}^{(n)} \text{ für } 1+\frac{\alpha+n}{1}\cdot\frac{\alpha+\beta'}{\alpha-\alpha'+1}\cdot\frac{\alpha+\beta''}{\alpha-\alpha''+1}$$
$$+\frac{\alpha+n}{1}\cdot\frac{\alpha+n+1}{2}\cdot\frac{\alpha+\beta'}{\alpha-\alpha'+1}\cdot\frac{\alpha+\beta'+1}{\alpha-\alpha'+2}\cdot\frac{\alpha+\beta''}{\alpha-\alpha''+1}\cdot\frac{\alpha+\beta''+1}{\alpha-\alpha''+2}+\ldots,$$

$$F_{\beta'}^{(n)} \text{ für } 1+\frac{\beta'+\alpha}{1}\cdot\frac{\beta'+\alpha'}{\beta'-n+1}\cdot\frac{\beta'+\alpha''}{\beta'-\beta''+1}+\ldots,$$

$$F_{\beta''}^{(n)} \text{ für } 1+\frac{\beta''+\alpha}{1}\cdot\frac{\beta''+\alpha'}{\beta''-\beta'+1}\cdot\frac{\beta''+\alpha''}{\beta''-n+1}+\ldots$$

gesetzt ist, $k'(n)$, $k''(n)$ aber noch zu bestimmende periodische Functionen bedeuten.

Nun setzen wir voraus, β' besitze einen grösseren reellen Theil als β'', und ersetzen in der unter 26) aufgestellten Gleichung $F_{\alpha}^{(n)}$ durch den Integralausdruck

$$\frac{\Pi(\alpha-\alpha'')}{\Pi(\alpha+\beta''-1)\,\Pi(-\alpha''-\beta'')}\cdot\int_0^1\frac{F(\alpha+n,\ \alpha+\beta',\ \alpha-\alpha'+1,\ s)\,ds}{s^{1-\alpha-\beta''}\,.\,(1-s)^{\alpha''+\beta''}}$$

und ersetzen dann noch n durch $n-m$, worin m eine positive ganze Zahl bedeuten soll. Führt man in dieses Integral für s die neue Variabele σ durch die Gleichung ein: $s=\frac{\sigma}{m}$, so gewinnt dadurch die Gleichung 26) die Gestalt

$$\frac{\Pi(\alpha-\alpha'')}{\Pi(\alpha+\beta''-1)\,\Pi(-\alpha''-\beta'')}\cdot\int_0^m\frac{F\left(\alpha+n-m,\ \alpha+\beta',\ \alpha-\alpha'+1,\ \frac{\sigma}{m}\right)d\sigma}{\sigma^{1-\alpha-\beta''}\,.\left(1-\frac{\sigma}{m}\right)^{\alpha''+\beta''}}$$

$$=\frac{m^{\alpha+\beta''}\,.\,\Pi(m-\alpha-n)}{\Pi(m+\beta'-n)}\cdot F_{\beta'}^{(n-m)}+\frac{m^{\alpha+\beta''}\,.\,\Pi(m-\alpha-n)}{\Pi(m+\beta''-n)}\cdot F_{\beta''}^{(n-m)}.$$

In dieser Gleichung gehen wir mit der ganzen positiven Zahl m zur Grenze Unendlich über und beachten, dass

$$\lim_{m=\infty}F_{\beta'}^{(n-m)}=1,\quad \lim_{m=\infty}F_{\beta''}^{(n-m)}=1,$$

$$k'(n-m)=k'(n),\quad k''(n-m)=k''(n),$$

$$\lim_{m=\infty}\frac{m^{\alpha+\beta''}\,.\,\Pi(m-\alpha-n)}{\Pi(m+\beta'-n)}=0,\quad \lim_{m=\infty}\frac{m^{\alpha+\beta''}\,.\,\Pi(m-\alpha-n)}{\Pi(m+\beta''-n)}=1\ *$$

ist, so kann die Gleichung geschrieben werden:

$$\lim_{m=\infty}\int_0^m\frac{F\left(\alpha+n-m,\ \alpha+\beta',\ \alpha-\alpha'+1,\ \frac{\sigma}{m}\right)d\sigma}{\sigma^{1-\alpha-\beta''}\left(1-\frac{\sigma}{m}\right)^{\alpha''+\beta''}}$$

$$=k''(n)\,\frac{\Pi(\alpha+\beta''-1)\,\Pi(-\alpha''-\beta'')}{\Pi(\alpha-\alpha'')}.$$

Die linke Seite ist aber gleich

---

* Vergl. Anm. 2 S. 150 Bd. XVI.

$$\lim_{m=\infty}\int_0^m d\sigma \sum_{0\,(\mu)}^{\infty} \frac{\sigma^{\alpha+\beta''-1}}{\left(1-\frac{\sigma}{m}\right)^{\alpha''+\beta''}} \cdot \frac{1-\frac{\alpha+n}{m}}{1} \cdot \frac{1-\frac{\alpha+n+1}{m}}{2} \cdots \frac{1-\frac{\alpha+n+\mu-1}{m}}{\mu}$$

$$\times \frac{\alpha+\beta'}{\alpha-\alpha'+1} \cdot \frac{\alpha+\beta'+1}{\alpha-\alpha'+2} \cdots \frac{\alpha+\beta'+\mu-1}{\alpha-\alpha'+\mu} \cdot (-\sigma)^\mu$$

$$= \int_0^\infty d\sigma \sum_{0\,(\mu)}^{\infty} \cdot \frac{(-1)^\mu \cdot \sigma^{\alpha+\beta''+\mu-1}}{\mu!} \cdot \frac{\alpha+\beta'}{\alpha-\alpha'+1} \cdot \frac{\alpha+\beta'+1}{\alpha-\alpha'+2} \cdots \frac{\alpha+\beta'+\mu-1}{\alpha-\alpha'+\mu}$$

$$= \lim_{\sigma=\infty} \frac{\sigma^{\alpha+\beta''}}{\alpha+\beta''} \Big\{ 1 + \frac{1}{1} \cdot \frac{\alpha+\beta'}{\alpha-\alpha'+1} \cdot \frac{\alpha+\beta''}{\alpha+\beta''+1} \cdot (-\sigma)$$
$$+ \frac{1}{1.2} \cdot \frac{\alpha+\beta'}{\alpha-\alpha'+1} \cdot \frac{\alpha+\beta'+1}{\alpha-\alpha'+2} \cdot \frac{\alpha+\beta''}{\alpha+\beta''+2} \cdot (-\sigma)^2$$
$$+ \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{\alpha+\beta'}{\alpha-\alpha'+1} \cdot \frac{\alpha+\beta'+1}{\alpha-\alpha'+2} \cdot \frac{\alpha+\beta'+2}{\alpha-\alpha'+3} \cdot \frac{\alpha+\beta''}{\alpha+\beta''+2} \cdot (-\sigma)^3 + \dots \Big\}$$

$$= \lim_{\sigma=\infty} \frac{\sigma^{\beta''}}{(-1)^\alpha \cdot (\alpha+\beta'')} \cdot W_\alpha \begin{pmatrix} \alpha, & \alpha', & -\beta'', & \\ \beta', & \beta'', & & -\sigma \end{pmatrix},$$

was nach 24) gleich

$$\frac{\Pi(\beta'-\beta''-1)\,\Pi(\alpha-\alpha')\,\Pi(\alpha+\beta''-1)}{\Pi(\alpha+\beta'-1)\,\Pi(-\alpha'-\beta'')}$$

ist. So finden wir also

$$\frac{\Pi(\beta'-\beta''-1)\,\Pi(\alpha-\alpha')\,\Pi(\alpha+\beta''-1)}{\Pi(\alpha+\beta'-1)\,\Pi(-\alpha'-\beta'')} = k''(n)\,\frac{\Pi(\alpha+\beta''-1)\,\Pi(-\alpha''-\beta'')}{\Pi(\alpha-\alpha'')}.$$

Setzt man nun dies Resultat in die Gleichung 26) ein und beachtet, dass die linke Seite sich nicht ändert, wenn β' und β'' mit einander vertauscht werden, die rechte Seite also dieselbe Eigenschaft haben muss, so findet man, dass dies nur möglich ist, wenn $k'(n)$ aus $k''(n)$ dadurch hervorgeht, dass man darin β' mit β'' vertauscht, so dass also $k'(n)$ nicht besonders gesucht zu werden braucht. Die Gleichung 26) erhält somit die Gestalt:

27)
$$F_\alpha \begin{pmatrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ n, & \beta', & \beta'' \end{pmatrix}$$
$$= \frac{\Pi(\beta''-\beta'-1)\,\Pi(\alpha-\alpha')\,\Pi(\alpha-\alpha'')}{\Pi(\alpha+\beta''-1)\,\Pi(-\alpha'-\beta)\,\Pi(-\alpha''-\beta')} \cdot \frac{\Pi(-\alpha-n)}{\Pi(\beta'-n)} \cdot F_{\beta'} \begin{pmatrix} n, & \beta', & \beta'' \\ \alpha, & \alpha', & \alpha'' \end{pmatrix}$$
$$+ \frac{\Pi(\beta'-\beta''-1)\,\Pi(\alpha-\alpha')\,\Pi(\alpha-\alpha'')}{\Pi(\alpha+\beta'-1)\,\Pi(-\alpha'-\beta'')\,\Pi(-\alpha''-\beta'')} \cdot \frac{\Pi(-\alpha-n)}{\Pi(\beta''-n)} \cdot F_{\beta''} \begin{pmatrix} n, & \beta', & \beta'' \\ \alpha, & \alpha', & \alpha'' \end{pmatrix}.*$$

---

* Macht man in dieser Gleichung die Substitution und den Grenzübergang der Anmerkung von S. 148 und 149, Bd. XVI, was jedoch nur möglich ist, wenn x negativ während dieser Operation gedacht wird, so findet man:

Vertauscht man hierin α mit α' und multiplicirt nachher, um Integrale von 3) zu erhalten, mit $\Pi(-\alpha-n):\Pi(-\alpha'-n)$, so erhält man:

$$28)\quad \frac{\Pi(-\alpha-n)}{\Pi(-\alpha'-n)}\cdot F_{\alpha'}\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \alpha''\\ n, & \beta', & \beta''\end{pmatrix}$$
$$=\frac{\Pi(\beta''-\beta'-1)\,\Pi(\alpha'-\alpha)\,\Pi(\alpha'-\alpha'')}{\Pi(\alpha'+\beta''-1)\,\Pi(-\alpha-\beta')\,\Pi(-\alpha''-\beta')}\cdot\frac{\Pi(-\alpha-n)}{\Pi(\beta'-n)}\cdot F_{\beta'}\begin{pmatrix}n, & \beta', & \beta''\\ \alpha, & \alpha', & \alpha''\end{pmatrix}$$
$$+\frac{\Pi(\beta'-\beta''-1)\,\Pi(\alpha'-\alpha)\,\Pi(\alpha'-\alpha'')}{\Pi(\alpha'+\beta'-1)\,\Pi(-\alpha-\beta'')\,\Pi(-\alpha''-\beta'')}\cdot\frac{\Pi(-\alpha-n)}{\Pi(\beta''-n)}\cdot F_{\beta''}\begin{pmatrix}n, & \beta', & \beta''\\ \alpha, & \alpha', & \alpha''\end{pmatrix}$$

und ähnlich

$$29)\quad \frac{\Pi(-\alpha-n)}{\Pi(-\alpha''-n)}\cdot F_{\alpha''}\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \alpha''\\ n, & \beta', & \beta''\end{pmatrix}$$
$$=\frac{\Pi(\beta''-\beta'-1)\,\Pi(\alpha''-\alpha)\,\Pi(\alpha''-\alpha')}{\Pi(\alpha''-\beta''-1)\,\Pi(-\alpha-\beta')\,\Pi(-\alpha'-\beta')}\cdot\frac{\Pi(-\alpha-n)}{\Pi(\beta'-n)}\cdot F_{\beta'}\begin{pmatrix}n, & \beta', & \beta''\\ \alpha, & \alpha', & \alpha''\end{pmatrix}$$
$$+\frac{\Pi(\beta'-\beta''-1)\,\Pi(\alpha''-\alpha)\,\Pi(\alpha''-\alpha')}{\Pi(\alpha''+\beta'-1)\,\Pi(-\alpha-\beta'')\,\Pi(-\alpha'-\beta'')}\cdot\frac{\Pi(-\alpha-n)}{\Pi(\beta''-n)}\cdot F_{\beta''}\begin{pmatrix}n, & \beta', & \beta''\\ \alpha, & \alpha', & \alpha''\end{pmatrix}.$$

Vertauscht man in 27) β' und n mit einander, so erhält man

$$30)\quad F_{\alpha}\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \alpha''\\ n, & \beta', & \beta''\end{pmatrix}$$
$$=\frac{\Pi(\alpha-\alpha')\,\Pi(\alpha-\alpha'')\,\Pi(-\alpha-\beta')}{\Pi(\alpha+\beta''-1).(-1)^n\,cosec\,(\beta'-n)\pi}\cdot\frac{(-1)^n\,\Pi(\beta'-n-1)\,\Pi(\beta''-n-1)}{\pi.\Pi(-\alpha'-n)\,\Pi(-\alpha''-n)}\cdot F_n\begin{pmatrix}n, & \beta', & \beta''\\ \alpha, & \alpha', & \alpha''\end{pmatrix}$$
$$+\frac{\Pi(\alpha-\alpha')\,\Pi(\alpha-\alpha'')\,\Pi(-\alpha-\beta').\sin(\alpha+n)\pi}{\Pi(\beta''-\beta')\,\Pi(-\alpha'-\beta'')\,\Pi(-\alpha''-\beta'').\sin(n-\beta'')\pi}\cdot\frac{\Pi(-\alpha-n)}{\Pi(\beta'-n)}\cdot F_{\beta'}\begin{pmatrix}n, & \beta', & \beta''\\ \alpha, & \alpha', & \alpha''\end{pmatrix}.$$

Eliminirt man aus 27), 28), 29) die Functionen $F_{\beta'}^{(n)}$, $F_{\beta''}^{(n)}$, so erhält man als Bedingung das Verschwinden der Determinante

$$\begin{vmatrix}\dfrac{F_{\alpha}^{(n)}}{\Pi(-\alpha-n)}, & \dfrac{\Pi(\alpha-\alpha')\,\Pi(\alpha-\alpha'')}{\Pi(\alpha+\beta''-1)\,\Pi(-\alpha'-\beta')\,\Pi(-\alpha''-\beta')}, & \dfrac{\Pi(\alpha-\alpha')\,\Pi(\alpha-\alpha'')}{\Pi(\alpha+\beta'-1)\,\Pi(-\alpha'-\beta'')\,\Pi(-\alpha''-\beta'')}\\ \dfrac{F_{\alpha'}^{(n)}}{\Pi(-\alpha'-n)}, & \dfrac{\Pi(\alpha'-\alpha)\,\Pi(\alpha'-\alpha'')}{\Pi(\alpha'+\beta''-1)\,\Pi(-\alpha-\beta')\,\Pi(-\alpha''-\beta')}, & \dfrac{\Pi(\alpha'-\alpha)\,\Pi(\alpha'-\alpha'')}{\Pi(\alpha'+\beta'-1)\,\Pi(-\alpha-\beta'')\,\Pi(-\alpha''-\beta'')}\\ \dfrac{F_{\alpha''}^{(n)}}{\Pi(-\alpha''-n)}, & \dfrac{\Pi(\alpha''-\alpha)\,\Pi(\alpha''-\alpha')}{\Pi(\alpha''+\beta''-1)\,\Pi(-\alpha-\beta')\,\Pi(-\alpha'-\beta')}, & \dfrac{\Pi(\alpha''-\alpha)\,\Pi(\alpha''-\alpha')}{\Pi(\alpha''+\beta'-1)\,\Pi(-\alpha-\beta'')\,\Pi(-\alpha'-\beta'')}\end{vmatrix}.$$

Der Coefficient von $F_{\alpha}^{(n)}:\Pi(-\alpha-n)$ ist hierin

---

$$F(\mathfrak{a}+\mathfrak{b},\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b}',\ \mathfrak{a}-\mathfrak{a}'+1,\ x)$$
$$=\frac{\Pi(\mathfrak{a}-\mathfrak{a}')\,\Pi(\mathfrak{b}-\mathfrak{b}'-1)}{\Pi(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}-1)\,\Pi(-\mathfrak{a}'-\mathfrak{b}')}\cdot(-1)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}'}.\left(\frac{1}{x}\right)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}'}.F\left(\mathfrak{b}'+\mathfrak{a},\ \mathfrak{b}'+\mathfrak{a}',\ \mathfrak{b}'-\mathfrak{b}+1,\ \frac{1}{x}\right)$$
$$+\frac{\Pi(\mathfrak{a}-\mathfrak{a}')\,\Pi(\mathfrak{b}'-\mathfrak{b}-1)}{\Pi(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}'-1)\,\Pi(-\mathfrak{a}'-\mathfrak{b})}\cdot(-1)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}.\left(\frac{1}{x}\right)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}.F\left(\mathfrak{b}+\mathfrak{a},\ \mathfrak{b}+\mathfrak{a}'\ \ \mathfrak{b}-\mathfrak{b}'+1,\ \frac{1}{x}\right).$$

$$\frac{\Pi(\alpha'-\alpha)\,\Pi(\alpha'-\alpha'')\,\Pi(\alpha''-\alpha)\,\Pi(\alpha''-\alpha')}{\Pi(-\alpha-\beta')\,\Pi(-\alpha-\beta'')\,.\,\pi^2}$$

$$\times\left\{\frac{\mathrm{cosec}\,(\alpha'+\beta')\pi\,.\,\mathrm{cosec}\,(\alpha''+\beta'')\pi-\mathrm{cosec}\,(\alpha'+\beta'')\pi\,.\,\mathrm{cosec}\,(\alpha''+\beta')\pi}{\mathrm{cosec}\,(\alpha'+\beta')\pi\,.\,\mathrm{cosec}\,(\alpha'+\beta'')\pi\quad\mathrm{cosec}\,(\alpha''+\beta')\pi\,.\,\mathrm{cosec}\,(\alpha''+\beta'')\pi}\right\}$$

$$=\frac{\alpha'-\alpha''}{\pi\,.\,\sin(\alpha'-\alpha'')\pi}\cdot\frac{\Pi(\alpha'-\alpha)\,\Pi(\alpha''-\alpha)}{\Pi(-\alpha-\beta')\,\Pi(-\alpha-\beta'')}$$

$$\times\{\sin(\alpha'+\beta'')\pi\,.\,\sin(\alpha''+\beta')\pi-\sin(\alpha'+\beta')\pi\,.\,\sin(\alpha''+\beta'')\pi\}$$

$$=\frac{\alpha'-\alpha''}{\pi}\cdot\frac{\Pi(\alpha'-\alpha)\,\Pi(\alpha''-\alpha)}{\Pi(-\alpha-\beta')\,\Pi(-\alpha-\beta'')}\,.\,\sin(\beta'-\beta'')\pi.$$

Der Coefficient von $F_{\alpha'}^{(n)}:\Pi(-\alpha'-n)$ ist

$$\frac{\alpha''-\alpha}{\pi}\cdot\frac{\Pi(\alpha''-\alpha')\,\Pi(\alpha-\alpha')}{\Pi(-\alpha'-\beta')\,\Pi(-\alpha'-\beta'')}\,\sin(\beta'-\beta'')\,\pi,$$

und der Coefficient von $F_{\alpha''}^{(n)}:\Pi(-\alpha''-n)$ ist

$$\frac{\alpha-\alpha'}{\pi}\cdot\frac{\Pi(\alpha'-\alpha'')\,\Pi(\alpha-\alpha'')}{\Pi(-\alpha''-\beta')\,\Pi(-\alpha''-\beta'')}\,\sin(\beta'-\beta'')\pi.$$

Der Factor $\sin(\beta'-\beta'')\,\pi$ ist den Coefficienten gemeinsam und kann daher fortgelassen werden, wenn man die Determinante gleich Null setzt. Ausserdem multipliciren wir sie mit

$$\pi\,.\,\Pi(-\alpha-n),$$

um sie zu einer Relation zwischen den Integralen 6) zu machen, und dividiren mit

$$-(\alpha'-\alpha'')\,(\alpha''-\alpha)\,(\alpha-\alpha'),$$

und erhalten so die Gleichung

$$\begin{aligned}
&0=\frac{\Pi(\alpha'-\alpha-1)\,\Pi(\alpha''-\alpha-1)}{\Pi(-\alpha-\beta')\,\Pi(-\alpha-\beta'')}\,.\,F_{\alpha}^{(n)}\\
\text{31)}\qquad&+\frac{\Pi(\alpha-\alpha'-1)\,\Pi(\alpha''-\alpha'-1)}{\Pi(-\alpha'-\beta')\,\Pi(-\alpha'-\beta'')}\cdot\frac{\Pi(-\alpha-n)}{\Pi(-\alpha'-n)}\,.\,F_{\alpha'}^{(n)}\\
&+\frac{\Pi(\alpha-\alpha''-1)\,\Pi(\alpha'-\alpha''-1)}{\Pi(-\alpha''-\beta')\,\Pi(-\alpha''-\beta'')}\cdot\frac{\Pi(-\alpha-n)}{\Pi(-\alpha''-n)}\,.\,F_{\alpha''}^{(n)}.
\end{aligned}$$

Es findet also in der That eine lineare homogene Relation mit periodischen (sogar mit constanten) Coefficienten statt zwischen den drei unter 6) aufgestellten Integralen. Vertauschen wir darin α mit n, α' mit β', α'' mit β'', so finden wir eine Relation zwischen den unter 7) verzeichneten Integralen, wenn wir die Gleichung mit einem passenden Coefficienten multipliciren, wie folgt:

$$\begin{aligned}
\text{32)}\qquad&\frac{(-1)^n\,\Pi(\beta'-n-1)\,\Pi(\beta''-n-1)}{\Pi(-\alpha'-n)\,\Pi(-\alpha''-n)}\,F_n\begin{pmatrix}n, & \beta', & \beta''\\ \alpha, & \alpha', & \alpha''\end{pmatrix}\\
&+\frac{(-1)^n\,\pi}{\sin(\beta'-n)\,\pi}\cdot\frac{\Pi(\beta''-\beta'-1)}{\Pi(-\alpha-\beta')\,\Pi(-\alpha'-\beta')\,\Pi(-\alpha''-\beta')}\cdot\frac{\Pi(-\alpha-n)}{\Pi(-\alpha'-n)}\,F_{\beta'}^{(n)}\\
&+\frac{(-1)^n\,\pi}{\sin(\beta''-n)\,\pi}\cdot\frac{\Pi(\beta'-\beta''-1)}{\Pi(-\alpha-\beta'')\,\Pi(-\alpha'-\beta'')\,\Pi(-\alpha''-\beta'')}\cdot\frac{\Pi(-\alpha-n)}{\Pi(-\alpha''-n)}\,F_{\beta''}^{(n)}=0,
\end{aligned}$$

in welcher die Coefficienten periodisch sind.

Setzt man in 31) $\beta''=-\alpha''+1$, so fällt das letzte Glied fort und die Gleichung verwandelt sich in die folgende:

$$\frac{\Pi(\alpha'-\alpha-1)}{\Pi(-\alpha-\beta')}\cdot F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \\ n, & \beta', & 1\end{pmatrix}$$
$$+\frac{\Pi(\alpha-\alpha'-1)}{\Pi(-\alpha'-\beta')}\cdot\frac{\Pi(-\alpha-n)}{\Pi(-\alpha'-n)}\cdot F_{\alpha'}\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \\ n, & \beta', & 1\end{pmatrix}=0,$$

oder in der Gauss'schen Bezeichnung:

$$\frac{\Pi(\alpha'-\alpha-1)}{\Pi(-\alpha-\beta')}\cdot F(\alpha+n,\ \alpha+\beta',\ \alpha-\alpha'+1,\ 1)$$
$$+\frac{\Pi(\alpha-\alpha'-1)}{\Pi(-\alpha'-\beta')}\cdot\frac{\Pi(-\alpha-n)}{\Pi(-\alpha'-n)}\cdot F(\alpha+n,\ \alpha'+\beta',\ \alpha'-\alpha+1,\ 1)=0,$$

welche Gleichung sich durch die bekannten Formeln

$$F(\alpha+\beta,\ \alpha+\beta',\ \alpha-\alpha'+1,\ 1)=\frac{\Pi(\alpha-\alpha')\,\Pi(-\alpha-\alpha'-\beta'-n)}{\Pi(-\alpha'-\beta')\,\Pi(-\alpha'-n)},$$
$$F(\alpha'+\beta,\ \alpha'+\beta',\ \alpha'-\alpha+1,\ 1)=\frac{\Pi(\alpha'-\alpha)\,\Pi(-\alpha-\alpha'-\beta'-n)}{\Pi(-\alpha-\beta')\,\Pi(-\alpha-n)}$$

leicht *a posteriori* verificiren lässt.

Artikel 6.

Es erübrigt noch, Relationen zwischen den unter 6) oder 7) aufgestellten Integralen und den unter 14) oder 15) verzeichneten herzuleiten. Dies soll hier geschehen. Vertauschen wir in der ersten der unter 18) sich befindenden Gleichungen α mit n, α' mit β', α'' mit β'', so erhalten wir die Gleichung:

$$F_n\begin{pmatrix}n, & \beta', & \beta'' \\ \alpha, & \alpha', & \alpha''\end{pmatrix}$$
$$=\frac{\Pi(n-\beta'')\,\Pi(-\lambda-n)}{\Pi(-\alpha''-\beta'')\,\Pi(\alpha''-\lambda)}\cdot F_{1-\alpha-\alpha'-\beta'}\begin{pmatrix}1-\alpha-\alpha'-\beta', & 1-\alpha-\alpha'-n, & \beta'' \\ \alpha & , \alpha' & , n+\lambda-\beta''\end{pmatrix}.$$

Setzen wir dann in der Function

$$F_{1-\alpha-\alpha'-\beta'}\begin{pmatrix}1-\alpha-\alpha'-\beta', & 1-\alpha-\alpha'-n, & \beta'' \\ \alpha & , \alpha' & , n+\lambda-\beta''\end{pmatrix},$$

die wir zur Abkürzung mit $F^{(n)}_{1-\alpha-\alpha'-\beta'}$ bezeichnen, $n+m$ für n, so ist

$$F^{(n+m)}_{1-\alpha-\alpha'-\beta'}=1+\frac{1-\alpha-\beta'}{1}\cdot\frac{1-\alpha'-\beta'}{\alpha''-\lambda+1}\cdot\frac{n+m+\alpha''}{n+m-\beta''+1}+\ldots,$$

und daher, wenn m positiv ist,

$$\lim_{m=\infty}F^{(n+m)}_{1-\alpha-\alpha'-\beta'}=\lim_{m=\infty}1+\frac{1-\alpha-\beta'}{1}\cdot\frac{1-\alpha'-\beta'}{\alpha''-\lambda+1}+\ldots$$
$$=F(1-\alpha-\beta',\ 1-\alpha'-\beta',\ 2-\alpha-\beta'-\beta'',\ 1),$$

welcher Ausdruck einen Sinn hat, wenn der reelle Theil von β'' kleiner als der von β' ist und in diesem Falle gleich

$$\frac{\Pi(\beta'-\beta''-1).\Pi(\alpha''-\lambda)}{\Pi(-\alpha-\beta'').\Pi(-\alpha'-\beta'')}$$

ist. Daraus leitet man die unter der Bedingung, dass der reelle Theil von β'' kleiner als der von β' sei, giltige Gleichung ab

$$33) \lim_{m=\infty} \frac{m^{\alpha+\beta''}.(-1)^{n+m}.\Pi(\beta'-n-m-1)\,\Pi(\beta''-n-m-1)}{\Pi(-n-m-\alpha')\,\Pi(-n-m-\alpha'')}.F_{n+m}\begin{pmatrix} n+m, \beta', \beta'' \\ \alpha\;\;, \alpha', \alpha'' \end{pmatrix}$$

$$= \lim_{m=\infty} \frac{(-1)^{n+m}\pi}{\sin(\beta''-n-m)\pi}.\frac{m^{\alpha+\beta''}.\Pi(\beta'-n-m-1)\,\Pi(-n-m-\lambda)\,F^{(n+m)}_{1-\alpha-\alpha'-\beta'}}{\Pi(-n-m-\alpha')\,\Pi(-n-m-\alpha'')\,\Pi(\alpha''-\lambda)\,\Pi(-\alpha'-\beta'')}$$

$$= \lim_{m=\infty} \frac{(-1)^n.\pi.m^{\alpha+\beta''}}{\sin(\beta''-n)\pi}\,\frac{\sin(n+\alpha')\pi\,\sin(n+\alpha'')\pi}{\sin(\beta'-n)\pi\,\sin(n+\lambda)\pi}$$

$$\times \frac{\Pi(n+m+\alpha'-1)\,\Pi(n+m-\alpha''-1).F^{(n+m)}_{1-\alpha-\alpha'-\beta'}}{\Pi(n+m-\beta')\,\Pi(n+m+\lambda-1)\,\Pi(\alpha''-\lambda)\,\Pi(-\alpha''-\beta'')}$$

$$= \frac{(-1)^n\pi}{\sin(n-\beta'')\pi}.\frac{\sin(n+\alpha')\pi\,\sin(n+\alpha'')\pi}{\sin(n-\beta')\pi\,\sin(n+\lambda)\pi}\,\frac{\Pi(\beta'-\beta''-1)}{\Pi(-\alpha-\beta'')\,\Pi(-\alpha'-\beta'')\,\Pi(-\alpha''-\beta'')}.$$

Da nun zwischen je drei Integralen der Gleichung 3) eine lineare homogene Relation mit periodischen Coefficienten stattfinden muss, so können wir

$$\frac{(-1)^n\,\Pi(\beta'-n-1)\,\Pi(\beta''-n-1)}{\Pi(-\alpha'-n)\,\Pi(-\alpha''-n)}.F_n\begin{pmatrix} n, \beta', \beta'' \\ \alpha, \alpha', \alpha'' \end{pmatrix}$$

$$= \frac{c'(n)\,\Pi(n+\alpha'-1)}{\Pi(n+\alpha+\alpha'+\beta'-1)}.F_{1+\alpha+\alpha'+\beta'}\begin{pmatrix} 2-n\,, & 1+\alpha+\alpha'+\beta', & 1+\alpha+\alpha'+\beta'' \\ -\alpha-1, & -\alpha'-1\;\;, & -\lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{c''(n)\,\Pi(n+\alpha'-1)}{\Pi(n+\alpha+\alpha'+\beta''-1)}.F_{1+\alpha+\alpha'+\beta''}\begin{pmatrix} 2-n\,, & 1+\alpha+\alpha'+\beta', & 1+\alpha+\alpha'+\beta'' \\ -\alpha-1, & -\alpha'-1\;\;, & -\lambda-1 \end{pmatrix}$$

setzen, worin $c'(n)$, $c''(n)$ periodische Functionen sind. Für die beiden F-Functionen der rechten Seite dieser Gleichung wollen wir zur Abkürzung beziehentlich $F^{(n)}_{1+\alpha+\alpha'+\beta'}$, $F^{(n)}_{1+\alpha+\alpha'+\beta''}$ setzen. Man bemerkt leicht, dass

$$\lim F^{(n+m)}_{1+\alpha+\alpha'+\beta'} = 1, \quad \lim F^{(n+m)}_{1+\alpha+\alpha'+\beta''} = 1$$

sei. Da ferner

$$c'(n+m) = c'(n), \quad c''(n+m) = c''(n)$$

ist, wenn m eine ganze Zahl bedeutet, so folgt aus der oben aufgestellten Gleichung mit Rücksicht auf 32) und mit Rücksicht darauf, dass unter den über β'' und β' gemachten Bedingungen

$$\lim_{m=\infty} m^{\beta''-\beta'} = 0$$

ist, die Gleichung

$$\lim_{m=\infty} \frac{(-1)^{n+m}\,\Pi(\beta'-n-m-1)\,\Pi(\beta''-n-m-1)}{\Pi(-n-m-\alpha')\,\Pi(-n-m-\alpha'')}.m^{\alpha+\beta''}.F_{n+m}\begin{pmatrix} n+m, \beta', \beta'' \\ \alpha\;\;, \alpha', \alpha'' \end{pmatrix}$$

$$= \frac{(-1)^n\pi}{\sin(n-\beta'')\pi}.\frac{\sin(n+\alpha')\pi\,\sin(n+\alpha'')\pi}{\sin(n-\beta')\pi\,\sin(n+\lambda)\pi}$$

$$\times \frac{\Pi(\beta'-\beta''-1)}{\Pi(-\alpha-\beta'')\,\Pi(-\alpha'-\beta'')\,\Pi(-\alpha''-\beta'')} = c''(n).$$

Setzt man nun diesen Werth für $c''(n)$ in die Gleichung, die wir zwischen drei Integralen oben annahmen, ein und bemerkt, dass die linke Seite derselben in Bezug auf β', β'' symmetrisch ist, die rechte Seite es also auch sein muss, so folgt daraus

$$\frac{(-1)^n \pi}{\sin(n-\beta')\pi} \cdot \frac{\sin(n+\alpha')\pi \,.\, \sin(n+\alpha'')\pi}{\sin(n-\beta'')\pi \,.\, \sin(n+\lambda)\pi} \times \frac{\Pi(\beta''-\beta'-1)}{\Pi(-\alpha-\beta')\,\Pi(-\alpha'-\beta')\,\Pi(-\alpha''-\beta')} = c'(n).$$

Hieraus fliesst endlich die Gleichung, durch welche der an der Spitze dieses Artikels geforderte Zusammenhang zwischen drei Integralen hergestellt wird:

$$34)\quad \frac{(-1)^n\,\Pi(\beta'-n-1)\,\Pi(\beta''-n-1)}{\Pi(-n-\alpha')\,\Pi(-n-\alpha'')}\, F_n\begin{pmatrix} n, & \beta', & \beta'' \\ \alpha, & \alpha', & \alpha'' \end{pmatrix}$$
$$= \frac{(-1)^n \pi}{\sin(n-\beta')\pi} \cdot \frac{\sin(n+\alpha')\pi\,\sin(n+\alpha'')\pi}{\sin(n-\beta'')\pi\,\sin(n+\lambda)\pi}$$
$$\times \frac{\Pi(\beta''-\beta'-1)\,\Pi(n+\alpha'-1)\,.\,F^{(n)}_{1+\alpha+\alpha'+\beta'}}{\Pi(-\alpha-\beta')\,\Pi(-\alpha'-\beta')\,\Pi(-\alpha''-\beta')\,\Pi(n+\alpha+\alpha'+\beta'-1)}$$
$$+ \frac{(-1)^n \pi}{\sin(n-\beta'')\pi} \cdot \frac{\sin(n+\alpha')\pi\,\sin(n+\alpha'')\pi}{\sin(n-\beta')\pi\,\sin(n+\lambda)\pi}$$
$$\times \frac{\Pi(\beta'-\beta''-1)\,\Pi(n+\alpha'-1)\,.\,F^{(n)}_{1+\alpha+\alpha'+\beta''}}{\Pi(-\alpha-\beta'')\,\Pi(-\alpha'-\beta'')\,\Pi(-\alpha''-\beta')\,\Pi(n+\alpha+\alpha'+\beta''-1)},$$

welche Gleichung mit Fortlassung periodischer Factoren auch so geschrieben werden kann:

$$35)\quad \frac{\sin(n+\lambda)\pi\,.\,\Pi(n+\alpha''-1)}{\pi\,.\,\Pi(n-\beta')\,\Pi(n-\beta'')}\,.\,F_n\begin{pmatrix} n, & \beta', & \beta'' \\ \alpha, & \alpha', & \alpha'' \end{pmatrix}$$
$$= \frac{\Pi(\beta''-\beta'-1)\,.\,F^{(n)}_{1+\alpha+\alpha'+\beta'}}{\Pi(-\alpha-\beta')\,\Pi(-\alpha'-\beta')\,\Pi(-\alpha''-\beta')\,\Pi(n+\alpha+\alpha'+\beta'-1)}$$
$$+ \frac{\Pi(\beta'-\beta''-1)\,.\,F^{(n)}_{1+\alpha+\alpha''+\beta''}}{\Pi(-\alpha-\beta'')\,\Pi(-\alpha'-\beta'')\,\Pi(-\alpha''-\beta'')\,\Pi(n+\alpha+\alpha'+\beta''-1)}.$$

Setzt man darin $\beta'=-\alpha'+1$, so fällt das erste Glied der rechten Seite fort und man erhält

$$\frac{\Pi(n+\alpha''-1)}{\Pi(n+\alpha'-1)}\,\frac{\sin(n+\alpha+\alpha''+\beta'')\pi}{\pi\,.\,\Pi(n-\beta'')}\,.\,F(\alpha+n,\ \alpha'+n,\ n-\beta'+1,\ 1)$$
$$= \frac{F(\alpha+\beta'',\ \alpha'-\alpha'',\ n+\alpha+\alpha'+\beta'',\ 1)}{\Pi(-\alpha-\beta')\,\Pi(-\alpha'-\beta'')\,\Pi(n+\alpha+\alpha'+\beta''-1)},$$

was sich leicht *a posteriori* verificiren lässt.

Vertauscht man in 35) α mit n, α' mit β', α'' mit β'', so folgt noch

$$36)\quad \frac{\sin(\lambda+n)\pi \,.\, \Pi(\alpha+\beta''-1)}{\pi \,.\, \Pi(\alpha-\alpha')\,\Pi(\alpha-\alpha'')} F_\alpha\begin{pmatrix}\alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ n, & \beta', & \beta''\end{pmatrix}$$

$$= \frac{\Pi(\alpha''-\alpha'-1) \,.\, F_{1+\alpha'+\beta'+n}\begin{pmatrix}2-\alpha, & 1+\beta'+\alpha'+n, & 1+\alpha''+\beta'+n \\ -\beta'-1, & -n-1, & -n-\beta'-\beta''-\alpha'-\alpha''\end{pmatrix}}{\Pi(-n-\alpha')\,\Pi(-\beta'-\alpha')\,\Pi(-\beta''-\alpha')\,\Pi(n+\alpha+\alpha'+\beta'-1)}$$

$$+ \frac{\Pi(\alpha'-\alpha''-1) \,.\, F_{1+\alpha''+\beta'+n}\begin{pmatrix}2-\alpha, & 1+\alpha'+\beta'+n, & 1+\alpha''+\beta'+n \\ -\beta'-1, & -n-1, & -n-\beta'-\beta''-\alpha'-\alpha''\end{pmatrix}}{\Pi(-n-\alpha'')\,\Pi(-\beta'-\alpha'')\,\Pi(-\beta''-\alpha'')\,\Pi(n+\alpha+\alpha''+\beta'-1)}.$$

Hiermit ist das vorgesteckte Ziel erreicht.

Kleinere Mittheilungen.

XIX. Ueber Normalen an Curven zweiter Ordnung.

Theorem: „Die Fusspunkte der aus den einzelnen Punkten einer Geraden auf einen Kegelschnitt gefällten Normalenquadrupel bilden eine biquadratische Involution.“

Um dieses Theorem, aus welchem eine ganze Menge anderer Lehrsätze fliesst, nachzuweisen, beziehen wir unsern Kegelschnitt C_2 zunächst auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt ein Hauptscheitel und dessen Abscissenaxe eine Hauptaxe des Kegelschnittes ist. Die Gleichung der Curve C_2 hat dann bekanntlich die Form

$$1)\qquad y^2 = 2px + qx^2.$$

Andererseits wollen wir jedoch die einzelnen Punkte des Kegelschnittes dadurch eindeutig bestimmen, dass wir das Theilverhältniss u jenes Strahles einführen, welcher den betreffenden Punkt (xy) mit dem Coordinatenanfangspunkt verbindet, wobei das Theilverhältniss bezüglich des Paares der Coordinatenaxen bestimmt werden soll, so dass also

$$2)\qquad u = \frac{y}{x}$$

ist. Nun können wir sehr leicht die Coordinaten eines Punktes durch seinen Parameter ausdrücken. Aus 1) und 2) folgt nämlich sehr leicht

$$3)\qquad x = \frac{2p}{u^2 - q}, \quad y = \frac{2pu}{u^2 - q}.$$

Für die Richtungsconstante der Kegelschnittstangente im Punkte (u) erhält man

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u^2 + q}{2u}.$$

Soll nun die Verbindungslinie des Punktes (u) mit einem Punkte $(\xi\eta)$ der Kegelschnittsebene eine Normale des Kegelschnittes im ersten Punkte sein, so muss

$$\frac{y-\eta}{x-\xi}\cdot\frac{dy}{dx}+1=0,$$

oder wenn man für x, y und $\frac{dy}{dx}$ die u enthaltenden Werthe einführt und eine einfache Reduction vornimmt:

$$4)\qquad \eta\,(u^4-q^2)+2\xi u\,(u^2-q)-2pu\,(u^2+q+2)=0.$$

Bewegt sich nun der Punkt $(\xi\eta)$ auf einer Geraden G, so sind ξ, η an eine Gleichung von der Form

$$\eta=a\xi+b$$

gebunden. Führt man diesen Werth von η in 4) ein, so nimmt 4) die Form an:

$$5)\quad \xi\left[a(u^4-q^2)+2u\,(u^2-q)\right]+\left[b\,(u^4-q^2)-2up\,(u^2+q+2)\right]=0.$$

Diese Gleichung ist in u vom vierten und in ξ vom ersten Grade; jedem Werthe von ξ entspricht eine vierwerthige u-Gruppe, während ein Werth von u unzweideutig den entsprechenden ξ-Werth und damit auch die übrigen drei u-Werthe der Gruppe liefert. Das u-System ist demnach wirklich eine Involution vierten Grades, wie auch schon aus der Gleichung 5) zur Genüge ersichtlich ist.

Nun habe ich dargethan, dass, wenn auf einem Kegelschnitte eine Involution n^{ten} Grades sich befindet und man die Punkte jeder ihrer Gruppen unter einander durch Gerade verbindet, die Gesammtheit dieser Verbindungslinien eine Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Classe umhüllt. (Siehe Crelle, Band 72: „Ueber Involutionen höherer Grade" oder das vorige Heft dieser Zeitschr.) Unser Ergebniss bezüglich des Kegelschnittes C_2 kann man daher auch in folgender Weise ausdrücken:

„Ist in der Ebene eines Kegelschnittes C_2 eine Gerade G gelegen und fällt man von einem variablen Punkte p der Geraden die vier Normalen $\overline{pa_1}$, $\overline{pa_2}$, $\overline{pa_3}$, $\overline{pa_4}$ auf C_2, so umhüllen die sechs Seiten des vollständigen Vierecks $(a_1\,a_2\,a_3\,a_4)$ eine Curve dritter Classe (sechster Ordnung)."

Wir wollen diese der Geraden G so zu sagen entsprechende Curve dritter Classe mit G^3 bezeichnen.

Es geschieht dreimal, dass zwei von den vier durch p gehenden Normalen zusammenfallen, und sechsmal, dass zwei solche Normalen unendlich nahe zu einander rücken. Es seien nämlich p_1, p_2, p_3 resp. die Schnittpunkte der Geraden G mit der grossen (reellen), der kleinen (imaginären) Axe und der unendlich weiten Geraden der Ebene. Von den vier Normalen, die durch einen dieser Punkte gehen, fallen zwei zusammen, ohne dass jedoch gleichzeitig auch ihre Fusspunkte zusammenfielen. So z. B. stellt die grosse Axe zwei von den durch p_1 gehenden Normalen vor, während trotzdem die Fusspunkte der beiden zusammenfallenden Normalen verschie-

den sind, da sie die beiden Scheitel der grossen Axe sind. Diese Axe ist somit die Verbindungslinie zweier, einer und derselben Gruppe angehöriger Punkte, und folglich wird G^3 diese Axe berühren. Da dasselbe von der kleinen Axe und der unendlich weiten Geraden gilt, so können wir sagen:

„Die einer Geraden G entsprechende Curve G^3 berührt die beiden Hauptaxen des Kegelschnittes und die unendlich weite Gerade der Ebene."

Jeder der beiden Punkte p_1, p_2 ist Mittelpunkt eines den Kegelschnitt C_2 doppelt berührenden Kreises, so zwar, dass die Berührungssehne eine Tangente von G^3 ist. Die Berührungspunkte, verbunden mit den Scheiteln der zur Berührungssehne senkrechten Kegelschnittsaxe, liefern vier weitere Tangenten von G^3, so dass wir im Ganzen $3+2.4$, d. i. eilf Tangenten haben. Eine zwölfte erhält man als jenen Kegelschnittsdurchmesser, der conjugirt ist zu der zu G senkrechten Richtung. Er verbindet die Fusspunkte der beiden vom unendlich weiten Punkte p_3 gefällten Normalen des Kegelschnittes.

Unsere gesammten zwölf Tangenten sind offenbar mehr als genügend, um die der Geraden G entsprechende Curve G^3 zu fixiren. Die Haupteigenschaft der letzteren besteht darin, dass jede ihrer Tangenten den Kegelschnitt in einem Punktenpaare schneidet, dessen Normalen sich auf der Geraden G treffen. Die beiden Curven C_2 und G^3 besitzen sechs gemeinsame Tangenten, welche als Gerade aufzufassen sind, die den Kegelschnitt C_2 in zwei unendlich nahen Punkten schneiden. Die Kegelschnittsnormalen in solchen zwei Punkten sind zwei unendlich nahe Normalen, und ihr Schnittpunkt wird daher nicht nur der Geraden G, sondern auch der Evolute des Kegelschnittes angehören. Wir sehen also, dass die Normalen des Kegelschnittes C_2 in den Berührungspunkten seiner sechs mit G^3 gemeinschaftlichen Tangenten die Kegelschnittsevolute in Punkten berühren, die auf der Geraden G liegen. Diese Berührungspunkte sind somit nichts Anderes, als die Schnittpunkte von G mit der Kegelschnittsevolute.

Die sämmtlichen Curven G^3, welche den Geraden eines Strahlenbüschels entsprechen, bilden eine Curvenreihe, d. h. ein System von Curven dritter Classe mit neun gemeinschaftlichen Tangenten. In der That berühren alle Curven des Systems zunächst die unendlich weite Gerade und die beiden Hauptaxen des Kegelschnittes und ferner die sechs Seiten des vollständigen Vierecks, dessen Ecken die Fusspunkte der vier durch den Büschelscheitel gehenden Normalen sind. Hieraus folgt jedoch (siehe die erwähnte Abhandlung im Journal von Crelle, S. 291), dass dieses Viereck und das von der unendlich weiten Geraden und den beiden Kegelschnittsaxen gebildete Dreieck einem und demselben Kegelschnitte eingeschrieben sein müsse. Dieser Kegelschnitt ist offenbar die bekannte gleichseitige, durch den Mittelpunkt unsers ursprünglichen Kegelschnitts gehende Hyper-

bel, mittels deren die durch den Scheitel unsers Strahlenbüschels gehenden vier Normalen erhalten werden können.

Bekanntlich entspricht jedem Punkte in der Ebene unsers Kegelschnittes eine solche gleichseitige Hyperbel, die man erhält, wenn man aus dem Punkte auf die einzelnen Paare conjugirter Durchmesser D, D' resp. Senkrechte P, P' fällt und mit ersteren wechselweise zum Durchschnitt bringt, so dass also die gleichseitige Hyperbel sich als der Ort der Punkte (PD') und $(P'D)$ darstellt. Sie schneidet unsern Kegelschnitt in den vier Fusspunkten der Normalen, die man auf ihn aus dem der Hyperbel entsprechenden Punkte fällen kann.

Bewegt sich nun dieser Punkt auf der festen Geraden G, so wird die Schaar der entsprechenden Hyperbeln durch den Schnittpunkt dieser Geraden mit jenem Durchmesser unsers Kegelschnittes hindurchgehen, welcher conjugirt ist zu dem auf G senkrechten Durchmesser. Da nun alle diese Hyperbeln auch durch den Mittelpunkt und die beiden Axenrichtungen unsers Kegelschnittes hindurchgehen, so bildet die Hyperbelschaar, welche den einzelnen Punkten einer Geraden entspricht, ein Kegelschnittsbüschel. Jede Curve dieses Büschels schneidet unsern Kegelschnitt in vier solchen Punkten, deren Normalen sich in einem Punkte von G durchschneiden.

Eine biquadratische Involution geht sofort in eine cubische über, wenn ein festes Element allen Elementenquadrupeln gemeinschaftlich ist; in jedem Quadrupel existirt dann ausser dem festen Elemente ein Elemententripel, und die Gesammtheit dieser Elemententripel liefert eine cubische Involution. Bezüglich der von uns betrachteten Involution tritt dies ein, wenn die Gerade G zu dem Kegelschnitte C_2 eine Normale ist. Denn in der That wird dann der Fusspunkt von G allen Fusspunktsquadrupeln gemeinsam sein. Mit Rücksicht auf den von uns bezüglich der Involutionen auf Kegelschnitten ausgesprochenen allgemeinen Satz kann also behauptet werden:

„Fällt man von den einzelnen Punkten einer Kegelschnittsnormale auf den Kegelschnitt die drei weiteren Normalen, so bestimmen deren Fusspunkte Dreiecke, welche alle einem und demselben Kegelschnitte umschrieben sind.“

In dieser Weise entspricht jeder Normale G von C_2 ein Kegelschnitt G^2, welcher, da er die unendlich weite Gerade berührt, eine Parabel sein muss. Die beiden Hauptaxen von C_2 sind auch Tangenten der Parabel, so dass also deren Directrix durch den Mittelpunkt von C_2 gehen wird. Das Letztgesagte ergiebt sich sofort, wenn man bemerkt, dass in diesem Falle die Curve dritter Classe G^3 in den Fusspunkt der Kegelschnittsnormale G und einen Kegelschnitt — die Parabel G^2 — zerfallen ist.

Wird die Gerade G eine Doppelnormale von C_2, d. h. entweder eine der Hauptaxen oder die unendlich weite Gerade, so werden in der biquadratischen Involution zwei feste Punkte (die Schnittpunkte von G mit C_2) allen Gruppen gemeinschaftlich sein, so dass die biquadratische Involution in eine quadratische übergehen muss. Das Centrum dieser quadratischen Involution (d. i. der Schnittpunkt der Verbindungslinien der einzelnen Punktenpaare) ist entweder der Mittelpunkt von C_2 oder die Richtung der einen Hauptaxe, je nachdem die Gerade G unendlich weit oder aber die andere Hauptaxe ist.

Schliesslich wollen wir den Fall betrachten, welcher eintritt, sobald der Kegelschnitt C_2 eine Parabel ist. Wird C_2 eine Parabel, so wird $q=0$, und hieraus ergiebt sich für die Involutionsgleichung 5) die Form

$$u\xi\left[a u^3+2u^2\right]+u\left[b u^3-2p\left(u^2+2\right)\right]=0,$$

oder aber, nach Unterdrückung des Factors u:

$$\xi\left[a u+2\right]u^2+\left[b u^3-2p\left(u^2+2\right)\right]=0,$$

was offenbar die Grundgleichung einer cubischen Involution ist. Die biquadratische Involution geht in diesem Falle in eine cubische über, weil, des Factors $u=0$ wegen, alle Gruppen das Element, dessen Parameter Null ist, gemeinsam haben. Das Erscheinen dieses gemeinschaftlichen Elementes rührt davon her, dass man jede zur Parabelaxe parallele Gerade als Normale im unendlich weiten Punkte der Parabel ansehen kann.

Für eine Parabel gilt daher der Satz:

> „Fällt man von den einzelnen Punkten einer festen Geraden G auf eine Parabel C_2 die möglichen Normalentripel, so sind die durch die Fusspunkte bestimmten Dreiecke alle einem festen Kegelschnitte G^2 umschrieben.“

Auch in diesem Falle ist die Curve G^2 eine Parabel.

Wird G eine Normale der Parabel C_2, so geht die cubische Involution, eines festen Elementes wegen, in eine quadratische über. Dies giebt den Satz:

> „Fällt man aus den einzelnen Punkten einer Normalen G einer Parabel C_2 die noch möglichen Normalenpaare auf die Parabel, so gehen die Verbindungslinien der einzelnen Fusspunktenpaare alle durch einen festen Punkt g.“

Da die unendlich weite Gerade ein solches Normalenpaar und daher gleichzeitig die Verbindungslinie seiner Fusspunkte darstellt, so muss der Punkt g auf der unendlich weiten Geraden liegen. Es zeigt sich also auch umgekehrt, dass die Normalenpaare in den Endpunkten einer parallelen Sehnenschaar sich auf einer Normalen der Parabel schneiden.

Schliesslich bemerken wir, dass es eine leichte Aufgabe sei, die Berührungspunkte der einzelnen Tangenten der von uns betrachteten Curven

G^3 und G^2 zu finden, wenn man die Krümmungsmittelpunkte des Grundkegelschnittes C_2 zu geeigneter Anwendung bringt.

Mailand, März 1871. Dr. EMIL WEYR.

XX. Aufsuchung der parallelen Drehaxen, für welche ein materielles Pendel die nämliche Schwingungszeit besitzt.

Die in Poggendorff's Annalen, Bd. 134 S. 621, veröffentlichte Notiz meines Collegen Prof. Weinhold regte mich im Februar 1869 zu einer jene Notiz erweiternden Mittheilung in der Section für Physik und Chemie der hiesigen naturwissenschaftlichen Gesellschaft an. Vielleicht bietet der Inhalt dieser Mittheilung auch in weiteren Kreisen einiges Interesse und mag deshalb hier auf einem anderen und allgemeineren Wege abgeleitet werden.

I. Wirken auf die einzelnen materiellen Punkte der um die Drehaxe D_1 drehbaren Masse $M=\Sigma(m)$ eines physischen Pendels parallele Kräfte, deren Richtung auf der Drehaxe senkrecht steht und deren Grösse der Masse jener Punkte proportional ist und daher einfach dem n-fachen Producte aus der Masse und der Beschleunigung g des freien Falls, d. h. dem n-fachen Gewichte dieser Punkte gleichgesetzt werden mag, und wählen wir die Drehaxe D_1 als Z-Axe eines dreimal rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen XZ-Ebene parallel zur Richtung der auf die Massentheilchen wirkenden parallelen Kräfte liegt, dann liefert die auf das Massentheilchen m wirkende Kraft $k=nmg$ für die Drehung um D_1 ein Moment $ky=kr\sin\delta$, wenn y und r die Entfernungen des materiellen Punktes m von der XZ-Ebene und von der Drehaxe D_1 bedeuten, r aber unter dem Winkel δ gegen die XZ-Ebene geneigt ist. Die sämmtlichen Massentheilchen des materiellen Pendels liefern demnach für die Drehung um D_1 das Moment

$$\Sigma(ky)=ng\,\Sigma(mr\sin\delta)=ng\,\Sigma(my)=ng\,\eta_1\,\Sigma(m)=ng\,M\lambda_1\sin\delta_1,$$

wenn der Schwerpunkt S des materiellen Pendels um η_1 von der XZ-Ebene, um λ_1 von der Drehaxe D_1 entfernt ist und wenn λ_1 den Winkel δ_1 mit der XZ-Ebene macht. Ist $\eta_1=0$, so befindet sich das Pendel im Gleichgewichte.

II. Soll das Moment $\Sigma(ky)$ dem um D_1 schwingenden materiellen Pendel die Winkelbeschleunigung q_1 ertheilen, so muss

$$\Sigma(ky)=q_1\,\Sigma(mr^2)=q_1\,M\varrho_1^2$$

sein, wobei ϱ_1 den Trägheitshalbmesser der Masse M für die Drehaxe D_1 bedeutet. Hat die Masse M für eine durch ihren Schwerpunkt S gelegte, zu D_1 parallele Drehaxe D den Trägheitshalbmesser ϱ, so ist bekanntlich

$$\varrho_1^2=\varrho^2+\lambda_1^2.$$

30*

Sollen also die auf die einzelnen Massentheilchen m wirkenden Kräfte k der Masse M die Beschleunigung q_1 ertheilen, so muss die Gleichung

$$q_1 = \frac{n g \lambda_1 \sin\delta_1}{\varrho_1^2} = \frac{n g \lambda_1 \sin\delta_1}{\varrho^2 + \lambda_1^2} = A \sin\delta$$

bestehen.

Für die Bewegung gegen die Gleichgewichtslage hin ist die Winkelgeschwindigkeit in dem nächstfolgenden Zeitelement dt

$$w_1 = -\frac{d\delta_1}{dt},$$

die Winkelbeschleunigung aber

$$q_1 = \frac{dw_1}{dt} = -\frac{d^2\delta_1}{dt^2};$$

daher findet sich, wenn w_0 und δ_0 die Anfangswerthe von w_1 und δ_1 sind, weiter

$$\frac{d\left(\frac{d\delta_1}{dt}\right)^2}{dt} = -2A\frac{d\delta_1}{dt}\sin\delta_1 \quad \text{und} \quad \left(\frac{d\delta_1}{dt}\right)^2 - w_0 = 2A(\cos\delta_1 - \cos\delta_0),$$

woraus sich in bekannter Weise die Schwingungszeit t_1 durch Integration ermitteln lässt.

III. Ergiebt sich für eine andere, zu D_1 und D parallele Drehaxe D_2, deren Abstand von S die Länge λ_2 hat, während der Trägheitshalbmesser von M für D_2 mit ϱ_2 bezeichnet werden soll, bei dem Ausschlag δ_1 die nämliche Winkelbeschleunigung q_1, so hat das materielle Pendel, bei gleicher Anfangsgeschwindigkeit und Anfangslage, für beide Axen D_1 und D_2 dieselbe Schwingungszeit. Dazu bedarf es also nur der Erfüllung der Gleichung

$$\frac{\lambda_1}{\varrho_1^2} = \frac{\lambda_2}{\varrho_2^2};$$

weil nun aber auch $\varrho_2^2 = \varrho^2 + \lambda_2^2$ ist, so muss

$$(\varrho^2 + \lambda_1^2)\lambda_2 = (\varrho^2 + \lambda_2^2)\lambda_1, \quad (\varrho^2 - \lambda_1\lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1) = 0$$

sein, d. h. entweder

$$\lambda_2 = \lambda_1 \text{ oder } \varrho^2 = \lambda_1\lambda_2.$$

IV. Die Bedingung $\lambda_2 = \lambda_1$ verlangt, dass die beiden Drehaxen D_1 und D_2 auf einer geraden Kreiscylinderfläche vom Halbmesser λ_1 liegen, dessen Axe mit der Schweraxe D zusammenfällt. Bei $\lambda_1 = \lambda_2$ ist natürlich auch

$$\varrho_1 = \varrho_2 \text{ und } \varrho^2 = \varrho_1^2 - \lambda_1^2 = \varrho_2^2 - \lambda_2^2.$$

V. Soll dagegen bei $\lambda_2 \gtrless \lambda_1$ die Bedingung $\varrho^2 = \lambda_1\lambda_2$ erfüllt werden, so muss

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_1 + \frac{\varrho^2}{\lambda_1} = \frac{\varrho_1^2}{\lambda_1} = b$$

ein; aus der Gleichung für q_1 in II findet sich aber leicht, dass

$$b = \frac{\varrho_1^2}{\lambda_1} = \frac{\varrho_2^2}{\lambda_2}$$

die Länge des einfachen oder mathematischen Pendels ist, welches mit dem um D_1 schwingenden materiellen Pendel gleiche Schwingungszeit besitzt; für das einfache Pendel hätte man ja nur in II und I die Grössen r und δ constant zu nehmen, nämlich

$$r = b \text{ und } \delta = \delta_1.$$

Wenn also zwei parallele Drehaxen D_1 und D_2 nicht auf derselben geraden Kreiscylinderfläche um die zu ihnen parallele Schweraxe D liegen und doch das Pendel für beide Axen D_1 und D_2 die nämliche Schwingungszeit hat, so gleicht die Summe der Abstände λ_1 und λ_2 der beiden Drehaxen D_1 und D_2 vom Schwerpunkte S der Länge b des einfachen Pendels, dessen Schwingungszeit mit der des materiellen Pendels übereinstimmt.

VI. Die beiden Bedingungen $\lambda_2 = \lambda_1$ und $\varrho^2 = \lambda_1 \lambda_2$ lassen sich auch zugleich erfüllen. Dann wird aber

$$\lambda_1 = \varrho = \lambda_2,$$

ebenso

$$\varrho_1^2 = 2\lambda_1^2 = \varrho_2^2 \text{ und } b = 2\lambda_1 = 2\varrho.$$

Es fallen also dann die beiden concentrischen Cylinderflächen vom Halbmesser λ_1 und λ_2 in eine zusammen. Der Werth $\lambda_1 = \varrho$ liefert zugleich das Maximum der Winkelbeschleunigung q_1 und das Minimum der Pendellänge b oder der Schwingungszeit.

VII. Legt man durch den Schwerpunkt S eine zu D senkrechte Gerade, so schneidet sie jene beiden Cylinderflächen in vier Punkten A_1, A_2, A_3 und A_4, von denen je zwei als Aufhängepunkt und Schwingungspunkt zusammengenommen zu werden pflegen, sobald sie um b von einander entfernt sind, d. h. sobald sie nicht auf derselben Cylinderfläche und auch nicht auf derselben Seite von S liegen.

Besteht man indess bei der Aufsuchung des Schwingungspunktes nicht darauf, die Länge des dem materiellen Pendel entsprechenden einfachen Pendels in der bequemsten Weise zu finden, nämlich so, dass λ_1 und λ_2 in gerader Linie neben einander liegen und durch Addition b liefern, so kann man nach V den Begriff des Schwingungspunktes erweitern; man hat dann unter dem Schwingungspunkte nicht einen Punkt zu verstehen (wie unter dem Schwerpunkte S), auch nicht eine gerade Kreiscylinderfläche um D_1 (wie unter dem am Ende des Trägheitshalbmessers ϱ_1 liegenden Massenmittelpunkte), sondern eine gerade Kreiscylinderfläche um die zu D_1 parallele Schweraxe D. Dann haben aber nach V auch alle auf derselben geraden Kreiscylinderfläche um D liegende Drehaxen D_1 einen gemeinschaftlichen Schwingungspunkt D_2.

Chemnitz. Ed. ZETZSCHE.

———

XXI. Ueber die Abhängigkeit des Erdmagnetismus von der Rotation der Sonne.

Von Prof. Dr. Hornstein in Prag.

In einer der Wiener Akademie eingesendeten Abhandlung zeigt der Verfasser, dass die Aenderungen jedes der drei Elemente der erdmagnetischen Kraft: Declination, Inclination und horizontale Intensität eine Periode von 26½ Tagen andeuten. Die periodische Veränderung der Declination für Prag beträgt (1870):

$$0{,}705 \sin (x + 190^\circ 20'),$$

wo $x = 0$ ist am 0. Januar 1870 und $x = 360^\circ$ am 0. Januar 1871. Für Wien ist diese Oscillation noch etwas grösser. Die Oscillation der Inclination (1870) ist nahe ⅛ von jener der Declination, jene der Intensität nahe 24 Einheiten der vierten Decimale. Professor Hornstein hält diese periodischen Veränderungen des Erdmagnetismus für eine Wirkung der in Rotation begriffenen Sonne und findet im Mittel aus mehreren Bestimmungen als die Dauer der Periode 26,33 Tage. Diese Zahl kann daher als das Resultat eines ersten Versuches, die synodische Rotationszeit der Sonne mit Hilfe der Magnetnadel zu bestimmen, betrachtet werden. Die wahre Rotationszeit der Sonne ergiebt sich hieraus = 24,55 Tage, also fast genau übereinstimmend mit dem Werthe, welcher für die Rotationszeit der Sonnenflecke in der Aequatorialzone der Sonne aus astronomischen Beobachtungen gefunden wurde (nach Spörer 24,541 Tage).

XVIII.

Grundzüge der schiefen Parallelperspective.

Von

Dr. L. Burmester,
Privatdocent am Polytechnikum zu Dresden.

(Hierzu Taf. VIII u. IX, Fig. 1—19.)

§ 1.
Einleitung.

Die schiefe Parallelperspective ist von mehreren Autoren, welche die Berechtigung derselben nicht erkannt haben, in ungerechter Weise gegen die anderen Projectionsmethoden zurückgesetzt worden. Erst Delabar* hat sich bemüht, der schiefen Parallelperspective wieder Eingang zu verschaffen, indem er ihr eine analytische Begründung widmete, welche der von Weisbach** gegebenen analytischen Begründung der rechtwinkligen Parallelperspective (Axonometrie) analog ist. Die analytische Begründung einer Projectionsmethode ist aber, wie Delabar selbst sagt, ein Umweg. Auch bei der rechtwinkligen Parallelperspective ist man wieder auf die geometrische Begründung zurückgegangen, weil sie dem graphischen Zwecke der Projectionsmethode angemessener ist. Die schiefe Parallelperspective, welche doch nur ein specieller Fall der Polarperspective ist, hat noch nicht dieselbe freie Behandlung gefunden, durch welche die Polarperspective zu einer höheren Entwickelung befähigt wurde. Schlesinger*** hat in dieser Richtung einen Versuch gewagt, indem er, genau der Polarperspective nachahmend, in die Parallelperspective die Analogieen: Hilfs-

---

* Delabar, Abhandlung über die verschiedenen Projectionsarten etc., St. Gallen 1860. Delabar, Anleitung zum Linearzeichnen (die Polar- und Parallelperspective). Freiburg im Breisgau, 1871.

** Weisbach, Anleitung zum axonometrischen Zeichnen, Freiberg, 1857.

*** Schlesinger, Die darstellende Geometrie, § 45, Wien, 1870.

auge, Augpunkt, Distanzkreis, Fluchtpunkt etc. einführt und hierdurch die Constructionen vermittelt. Dies ist aber ein Fehlgriff; denn durch eine solche pünktliche Nachahmung werden die Constructionen der schiefen Parallelperspective nicht einfacher, sondern gar umständlicher als die Constructionen der Polarperspective.

Auch die von Delabar durch Grund- und Aufriss ausgeführten Constructionen der Bilder der schiefen Parallelperspective sind verwerflich, weil sie zu umständlich sind und der schiefen Parallelperspective keine Selbstständigkeit gewähren.

Durch eine zweckmässige geometrische Begründung der schiefen Parallelperspective und durch Einfachheit der Constructionen, welche theils reine Specialfälle, theils Modificationen der polarperspectivischen Constructionen sind, wollen wir die bis jetzt meist verkannte schiefe Parallelperspective in den Rang erheben, welcher ihr neben der Polarperspective gebührt; und sie muss ihrer Einfachheit und Nützlichkeit wegen dem Techniker das werden, was die Polarperspective dem Maler ist.

§ 2.

Von der Affinität.

1. Denken wir uns von allen Punkten eines Gegenstandes parallele Gerade gezogen, welche eine gegebene, gegen diese Geraden schiefgestellte Ebene schneiden, so sind die Durchschnittspunkte die schiefen Projectionen oder die parallelperspectivischen Bilder jener Punkte. Die gegebene Ebene heisst die Projections- oder Bildebene; die parallelen Geraden nennt man die Projections- oder Sehstrahlen und die Richtung derselben heisst die Projections- oder Sehrichtung.

Ziehen wir (Fig. 1) durch einen in der Ebene E liegenden Punkt a einen Sehstrahl $a a_1$, der die Bildebene E_1 in a_1 trifft, so ist a_1 das Bild von a, und ziehen wir ebenso durch einen Punkt b in E einen zu $a a_1$ parallelen Sehstrahl $b b_1$, so ist auch b_1 das Bild von b. Denken wir uns dieses Verfahren auf alle Punkte einer in E liegenden Geraden $a \alpha$ angewendet, welche die Durchschnittslinie $\alpha \beta$ der Ebenen E und E_1 in α schneidet, so liegen die zugehörigen Bilder auf der Geraden $a_1 \alpha$, welche das Bild oder die schiefe Projection der Geraden $a \alpha$ ist. Jedem Punkte in E entspricht also ein Punkt in E_1, jeder Geraden in E eine Gerade in E_1.

Je zwei entsprechende Punkte liegen auf einer parallelen Geraden und je zwei entsprechende Gerade schneiden sich in einem Punkte der Durchschnittslinie von E und E_1.

Wenn zwei ebene Figuren in einer solchen geometrischen Beziehung stehen, so heissen diese Figuren perspectivisch affine Figuren, und die Durchschnittslinie ihrer Ebenen wird die Affinitätsaxe genannt.

Ziehen wir die Gerade ab und die Gerade $a_1 b_1$, so schneiden sich diese, weil aa_1 und bb_1 parallel sind, in einem Punkte ν der Affinitätsaxe, und $a_1 b_1$ ist das Bild der Geraden ab. Durch zwei Paare entsprechender Punkte gehen also entsprechende Gerade. Ebenso leicht kann man auch nachweisen, dass zwei Paare entsprechende Gerade sich in entsprechenden Punkten schneiden. Ziehen wir in der Ebene E Parallelen, z. B. $a\alpha$, $b\beta$..., so sind auch ihre Bilder $a_1\alpha$, $b_1\beta$... parallel.

Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $a\alpha a_1$, $b\beta b_1$... ist

$$\frac{a\alpha}{a_1\alpha}=\frac{b\beta}{b_1\beta}=\ldots$$

und wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $a\nu a_1$, $b\nu b_1$... ist auch

$$\frac{a\nu}{a_1\nu}=\frac{b\nu}{b_1\nu}=\ldots.$$

Hieraus folgen die Sätze:

Parallele Strecken stehen zu ihren parallelen Bildern in einem constanten Verhältnisse.

Bestimmte Strecken auf einer Geraden stehen zu ihren Bildern in einem constanten Verhältnisse.

Die Bilder von bestimmten Strecken, die in einer zur Affinitätsaxe parallelen Geraden liegen, sind diesen Strecken gleich.

Sind die Ebenen E und E_1 parallel, dann liegt die Affinitätsaxe im Unendlichen, und das Bild einer in der Ebene E liegenden Figur ist dieser Figur congruent.

2. Drehen wir die Ebene E mit einer in ihr gedachten Figur Σ, deren Bild Σ_1 sein möge, um die Affinitätsaxe in der Richtung des Pfeiles φ oder φ', bis sie mit der Ebene E_1 zusammenfällt, wie resp. Fig. 2 oder Fig. 3 zeigt, so werden die angegebenen Beziehungen der Figuren Σ und Σ_1 nicht geändert. Die entsprechenden Geraden $a\alpha$, $a_1\alpha$ und $b\beta$, $b_1\beta$... behalten ihre Schnittpunkte α, β... in der Affinitätsaxe, und wegen der Gleichungen

$$\frac{a\alpha}{a_1\alpha}=\frac{b\beta}{b_1\beta}=\ldots$$

und des Parallelismus der Geraden $a\alpha$, $b\beta$... und $a_1\alpha$, $b_1\beta$... sind die Geraden aa_1, bb_1..., welche entsprechende Punkte verbinden, parallel. Diese Geraden, als unbegrenzt betrachtet, entsprechen sich selbst und heissen daher auch selbstentsprechende Gerade.

Wenn eine Figur Σ, die Affinitätsaxe und zwei entsprechende Punkte gegeben sind, so kann man leicht die in derselben Ebene liegende entsprechende Figur Σ_1 construiren.

In Fig. 2 oder 3 ist $\alpha\beta$ die Affinitätsaxe und a, a_1 sind entsprechende Punkte. Um nun zu einem beliebigen Punkte b in Σ den entsprechenden Punkt b_1 in Σ_1 zu bestimmen, ziehen wir die Gerade ab, welche die Affinitätsaxe in ν trifft, verbinden ν mit a_1 und ziehen durch b zu aa_1 eine Pa-

rallele bb_1. Diese schneidet a_1v in dem entsprechenden Punkte b_1. Auf diese Weise kann man leicht die Figur Σ_1 construiren, welche der Figur Σ entspricht.*

§ 3.

Die Grundriss- und Aufrisstrace einer Geraden.

1. Wir betrachten zuerst nur die Tracen einer Geraden, welche einen Sehstrahl und zugleich die Sehrichtung repräsentirt.

Dieser Sehstrahl rs ist in Fig. 4 durch seine Grundrissprojection r_1s_1 und durch seine Aufrissprojection r_2s_2 gegeben. Wir bestimmen auf bekannte Weise die Tracen t_1 und τ_2, welche der Sehstrahl rs mit der Grundriss- und der Aufrissebene bildet, indem wir, um t_1 zu erhalten, in dem Schnittpunkt t_2, in welchem r_2s_2 die Projectionsaxe A_1 schneidet, auf A_1 eine Senkrechte t_2t_1 ziehen, die r_1s_1 in der Grundrisstrace t_1 trifft. Ebenso ergiebt sich die Aufrisstrace τ_2. Wir errichten nämlich im Durchschnitt τ_1, welchen t_1s_1 mit A_1 bildet, auf A_1 die Senkrechte $\tau_1\tau_2$, und diese schneidet t_2s_2 in der Aufrisstrace τ_2.

Betrachten wir die Aufrissebene, auf der im Raume die Grundrissebene senkrecht steht, als Bildebene für die schiefe Projection, so ist die Aufrisstrace τ_2 das Bild oder die schiefe Projection der Grundrisstrace t_1. Da wir uns bei der rechtwinkligen Projection die Grundrissebene in die Aufrissebene (Bildebene) umgelegt denken, so können wir auch t_1 als die Umlegung der Grundrisstrace ansehen, und es sind t_1 und τ_2 entsprechende Punkte. Denken wir uns noch für mehrere zu rs parallelen Strahlen $r's'$, $r''s''$... die Tracen $t'_1\tau'_2$ und $t''_1\tau''_2$... bestimmt, so sind t_1, t'_1, t''_1... und $\tau_2\tau'_2\tau''_2$... zwei in der Bildebene liegende perspectivisch affine Figuren, deren Affinitätsaxe die Projectionsaxe A_1 ist, und $\tau_2\tau'_2\tau''_2$... ist das Bild einer Figur $tt't''$..., welche in der auf der Aufrissebene (Bildebene) senkrecht stehenden Grundrissebene liegt. Für unsere weitere Betrachtung genügen jedoch die entsprechenden Punkte t_1 und τ_2. Die durch diese Punkte gehende Gerade $t_1\tau_2$ ist eine selbstentsprechende Gerade, zu der alle übrigen selbstentsprechenden Geraden parallel sind. Der von t_1 auf die Affinitätsaxe A_1 gezogenen Senkrechten t_1t_2 entspricht als Bild die Gerade τ_2t_2, welche die Verlängerung der Aufrissprojection s_2r_2 des Sehstrahles sr ist.

2. Der Sehstrahl rs war durch seine senkrechten Projectionen r_1s_1 und r_2s_2 gegeben und hierdurch waren die Tracen t_1, τ_2 bestimmt. Nehmen wir nun aber umgekehrt die Tracen t_1, τ_2 im Voraus beliebig an, so ist auch durch diese Tracen die Lage des Sehstrahles rs bestimmt, und wir können

---

* Eine in dieser Art weitergehende Behandlung der Affinität findet man in: „Der mathematische Unterricht in der beschreibenden Geometrie auf Realschulen", von Dr. A. Flohr. Berlin, 1869.

rückwärtsgehend seine rechtwinkligen Projectionen $r_1 s_1$, $r_2 s_2$ construiren. Zu diesem Zwecke ziehen wir von t_1 und τ_2 auf die Projectionsaxe A_1 resp. die Senkrechten $t_1 t_2$ und $\tau_2 \tau_1$; dann liegt die Grundrissprojection $r_1 s_1$ in der Geraden $\tau_1 t_1$ und die Aufrissprojection $r_2 s_2$ in der Geraden $\tau_2 t_2$. Begrenzen wir diese Geraden eventuell durch die Punkte r_1, s_1 und r_2, s_2, so erhalten wir die Projectionen des begrenzten Sehstrahles rs. Mittels dieser Projectionen kann man auch leicht die Winkel bestimmen, welche die Sehrichtung mit der Grundrissebene und mit der Aufrissebene bildet. Ziehen wir $s_0 s_1$ senkrecht $r_1 s_1$ und gleich $s' s_2$, so ist der Winkel, welchen die Sehrichtung mit der Grundrissebene bildet, gleich dem Winkel $s_1 t_1 s_0$. Ebenso erhält man auch erforderlichenfalls den Winkel, welchen die Sehrichtung mit der Aufrissebene einschliesst.

§ 4.

Die Coordinatenaxen.

1. Nehmen wir in der Bildebene Fig. 5 zwei rechtwinklige Coordinatenaxen OX und OZ an, und betrachten wir OX als Projectionsaxe, so wissen wir nach § 3 Nr. 1, wenn die Sehrichtung durch die senkrechten Projectionen $Y_0 s_1$ und Os_2 gegeben ist, dass die schiefe Projection OY der in O auf der Bildebene senkrechten Y-Axe mit der Geraden Os_2, der Aufrissprojection der Sehrichtung, zusammenfällt. Die Verlängerung OY_0 der Z-Axe, deren Länge $OY_0 = OZ = OX$ ist, betrachten wir als die Umlegung der Y-Axe. Ziehen wir also durch den Schnittpunkt w, den $s_1 Y_0$ mit OX bildet, auf OX eine Senkrechte wY, welche $s_2 O$ in Y trifft, so ist OY das Bild oder die schiefe Projection der begrenzten Y-Axe, deren Länge gleich OX oder gleich OZ ist. Die Lage und Grösse des Bildes OY ist auch durch den Winkel ψ, welchen die Aufrissprojection Os_2 der Sehrichtung mit der X-Axe bildet, und durch die Verhältnisszahl

$$\frac{OY}{OY_0} = n$$

gegeben.

Wir können somit den für die Folge sehr wichtigen Satz aussprechen:

Die Bilder der zur Bildebene parallelen begrenzten Geraden sind gleich diesen Geraden, und die Bilder der auf der Bildebene senkrechten begrenzten Geraden verhalten sich zu diesen Geraden wie $OY : OY_0$ oder $n : 1$.

Des besseren Verständnisses wegen haben wir die Bildebene in Fig. 5 durch ein Quadrat $OZVX$ und die Umlegung der Grundrissebene durch ein gleiches Quadrat OXH_0Y_0 umgrenzt. Construiren wir aus OY, OX das Parallelogramm $OYHX$, so ist dieses Parallelogramm das Bild der begrenzten Grundrissebene. In den beiden perspectivisch affinen Figuren OY_0H_0X und $OYHX$ sind YY_0 und HH_0 selbstentsprechende Gerade.

Wir können auch in Fig. 5 die Richtung der Geraden Os_2, d. h. den Winkel ψ, und die Verhältnisszahl n beliebig annehmen und wie in § 3 Nr. 2 rückwärtsgehend die Sehrichtung bestimmen. Hiernach kann man also die Grössen ψ und n beliebig wählen. Wir wollen in der Folge bei unseren Zeichnungen der Bestimmtheit und der Zweckmässigkeit wegen $\psi = 30^0$ und $n = \frac{1}{2}$ nehmen. In diesem speciellen Falle stehen die selbstentsprechenden Geraden ($Y_0 Y$, $H_0 H$...) auf OY senkrecht und bilden mit der X-Axe einen Winkel von 60^0.

Soll nun in Fig. 6 die schiefe Projection einer in der Grundrissebene liegenden Figur abc... construirt werden, so zeichnen wir die Umlegung $a_0 b_0 c_0$ dieser Figur in die gewünschte Lage, fällen von einem Punkte, z. B. von a_0, auf OX eine Senkrechte $a_0 \alpha$, ziehen αa parallel OY und durch a_0 parallel zu $Y_0 Y$ eine selbstentsprechende Gerade $a_0 a$, welche αa in a trifft; dann sind a_0, a zwei entsprechende Punkte und $a_0 b_0 v$, abv zwei entsprechende Gerade. Ziehen wir dann durch b_0 eine selbstentsprechende Gerade, so erhalten wir die entsprechenden Punkte b_0, b u. s. w.

§ 5.

Darstellung des Punktes, der Geraden und der Ebene.

1. Sind die Coordinaten x, y, z eines Punktes A_r* im Raume gegeben, so erhalten wir in Fig. 7 seine schiefe Projection A, indem wir $OA_x = x$ machen, durch A_x zu OY eine Parallele $A_x A_1 = n.y = \frac{1}{2} y$ und dann $A_1 A = z$ parallel OZ ziehen. Führen wir noch durch A_x zu OZ und durch A zu OY eine Parallele, so ist der Durchschnitt A_2 das Bild der Aufrissprojection, sowie A_1 das Bild der Grundrissprojection. Construiren wir ferner noch das Rechteck $AA_1 A_y A_3$, dessen Seiten beziehungsweise der X- und Z-Axe parallel sind, dann ist A_3 das Bild der Kreuzrissprojection. In gleicher Weise sind die Punkte B, B_1, B_2, B_3 construirt. Sind zwei von diesen Punkten gegeben, so sind die übrigen Punkte bestimmt und man kann die Lage des betreffenden Punktes im Raume ermitteln.

In Fig. 7 haben wir die genannten Punkte durch Gerade verbunden. Es ist AB das Bild der Geraden $A_r B_r$ und es sind $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ resp. die Bilder der orthogonalen Projectionen dieser Geraden auf die drei Coordinatenebenen xy, xz, yz. Die Lage und Grösse einer Geraden ist bestimmt, wenn zwei von den vier Geraden gegeben sind. Soll die Länge der Geraden $A_r B_r$ bestimmt werden, so ist es am einfachsten, wenn die Gerade

* Wir bezeichnen einen Punkt im Raume mit einem Buchstaben und der Marke r, z. B. A_r, sein Bild einfach mit A; das Bild der Projection des Punktes A_r auf die xy-, xz- und yz-Ebene bezeichnen wir resp. mit A_1, A_2, A_3 und das Bild der Projection desselben auf die x-, y-, z-Axe resp. mit A_x, A_y, A_z. Die Umlegung eines Punktes Ar in die Bildebene bezeichnen wir mit A_0, oder in besonderen Fällen auch mit A'_0, A''_0....

durch ihr Bild AB und durch das Bild $A_2 B_2$ ihrer Aufrissprojection gegeben ist. Behufs der Bestimmung der Länge errichten wir auf $A_2 B_2$ in A_2 und B_2 die Senkrechte $A_2 A_0$, $B_2 B_0$, so dass

$$A_2 A_0 = \frac{1}{n} A_2 A = 2\,A_2 A \text{ und } B_2 B_0 = \frac{1}{n} B_2 B = 2\,B_2 B$$

ist; dann ist $A_0 B_0$ die Länge der Geraden $A_r B_r$. Geht man diesen Constructionsweg rückwärts, so kann man auch das Bild einer gegebenen Strecke dieser Geraden bestimmen.

2. Eine Ebene E ist in Fig. 8 durch die drei Schnittpunkte α, β, γ, welche sie resp. mit der x-, y-, z-Axe bildet, gegeben. Die Verbindungslinien $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ dieser Punkte sind die Tracen der Ebene E in den Coordinatenebenen xy, yz, zx. Eine zweite Ebene E' ist noch in Fig. 8 durch die Punkte α', β', γ' gegeben. Das Bild $D_1 \Delta_2$ der Durchschnittslinie der beiden Ebenen E und E' erhalten wir, wenn wir den Schnittpunkt D_1 der Tracen $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ mit dem Schnittpunkt Δ_2 der Tracen $\alpha\gamma$, $\alpha'\gamma'$ verbinden. Es ist D_1 die Grundrisstrace und Δ_2 die Aufrisstrace der Durchschnittslinie. Die drei Geraden $\beta\gamma$, $\beta'\gamma'$, $D_1 \Delta_2$ müssen sich in einem Punkte schneiden. Ziehen wir $D_1 D_2$ parallel OY und $\Delta_2 \Delta_1$ parallel OZ, dann ist $D_1 \Delta_1$ das Bild der Grundrissprojection und $D_2 \Delta_2$ das Bild der Aufrissprojection der Durchschnittslinie.

3. In Fig. 9 ist eine Ebene E durch die Punkte α, β, γ und eine Gerade $A_r B_r$ durch ihr Bild AB und durch das Bild $A_1 B_1$ ihrer Grundrissprojection gegeben. Es soll der Durchschnitt der Geraden $A_r B_r$ mit der Ebene E bestimmt werden. Zu diesem Zwecke legen wir durch die Gerade $A_r B_r$ eine Ebene E' senkrecht auf die Grundrissebene. Das Bild ihrer Grundrisstrace ist die Gerade $A_1 B_1$, welche $\alpha\beta$ in D_1 und OX in Δ_1 schneidet, und ihre Aufrisstrace ist die durch Δ_1 parallel OZ gezogene Gerade $\Delta_1 \Delta_2$, die $\alpha\gamma$ in Δ_2 trifft. Die Gerade $D_1 \Delta_2$ ist das Bild der Durchschnittslinie der Ebenen E und E'; und verlängern wir AB bis zum Durchschnitt P mit $D_1 \Delta_2$, so ist P das Bild des Schnittpunktes, welchen $A_r B_r$ mit der Ebene E bildet. Das Bild P_1 der Grundrissprojection dieses Punktes erhalten wir, wenn wir PP_1 bis $A_1 B_1$ parallel OZ ziehen.

4. Es sollen die Neigungswinkel bestimmt werden, welche die in Fig. 10 durch die Punkte α, β, γ gegebene Ebene E mit den Coordinatenebenen bildet. Um den Neigungswinkel v der Ebene E und der Aufrissebene (Bildebene) zu bestimmen, denken wir uns durch die Y-Axe eine Ebene auf die Trace $\alpha\gamma$ senkrecht gelegt. Wir ziehen von O auf $\alpha\gamma$ eine Senkrechte Oi, dann ist der Winkel $Oi\beta$ das Bild des Neigungswinkels v. Damit wir seine wahre Grösse durch Umlegung erhalten, errichten wir in O auf Oi eine Senkrechte $O\beta'_0$, deren Länge gleich

$$O\beta'_0 = \frac{1}{n}\,\overline{O\beta}\,(= 2\,.\,\overline{O\beta})$$

ist. Dann ist $O\beta'_0 i$ die Umlegung des Dreiecks $O\beta i$ und der Winkel

$$Oi\beta'_0 = v.$$

Behufs der Bestimmung des Neigungswinkels u der Ebene E und der Grundrissebene zeichnen wir die Umlegung $\alpha\beta'_0$ der Trace $\alpha\beta$, fällen von O auf $\alpha\beta''_0$ eine Senkrechte Oh_0 und machen auf OX die Strecke $Oh'_0 = Oh_0$, dann ist der Winkel $Oh_0\gamma = u$; denn ziehen wir $h_0 h$ parallel $\beta'_0\beta$, so ist der Winkel $Oh\gamma$ das Bild des Neigungswinkels u, dessen Umlegung $Oh'_0\gamma$ ist. In gleicher Weise kann man auch den Neigungswinkel bestimmen, den die Ebene E mit der Kreuzrissebene bildet.

5. In Fig. 11 ist das Bild $abc\ldots$ einer ebenen Figur gegeben, deren Ebene E die Coordinatenaxen in den Punkten α, β, γ schneidet. Es soll die wahre Grösse dieser Figur construirt werden. Zu diesem Zwecke zeichnen wir, wie in Fig. 10, das Dreieck $Oi\beta'_0$, verlängern die von O auf $\alpha\gamma$ gezogene Senkrechte Oi bis β_0, so dass $i\beta_0 = i\beta'_0$ ist, und verbinden β_0 mit α und γ; dann ist $\alpha\beta_0\gamma$ die Umlegung der Ebene $\alpha\beta\gamma$. Es ist $\alpha\gamma$ die Affinitätsaxe, β, β_0 sind entsprechende Punkte, $\alpha\beta$, $\alpha\beta_0$ und $\gamma\beta$, $\gamma\beta_0$ sind entsprechende Gerade. Wir können nun sehr leicht zu $abc\ldots$ die affine Figur $a_0b_0c_0\ldots$ construiren. Ziehen wir z. B. die Gerade ab, welche $\alpha\gamma$ in ε und $\beta\gamma$ in η schneidet, und führen wir durch η zu $\beta\beta_0$ eine Parallele $\eta\eta_0$, die $\gamma\beta_0$ in η_0 trifft, so sind $\varepsilon\eta$, $\varepsilon\eta_0$ entsprechende Gerade, und ziehen wir dann durch a und b Parallele zu $\beta\beta_0$, so schneiden diese $\varepsilon\eta_0$ in den entsprechenden Punkten a_0, b_0. Ebenso kann man die übrigen Punkte der affinen Figur $a_0b_0c_0\ldots$ construiren. Durch Rückwärtsgehen dieses Constructionsweges kann man das Bild $abc\ldots$ einer in der Ebene E liegenden Figur zeichnen.

6. In Fig. 12 ist ein Punkt P_r durch sein Bild P und durch seine Aufrissprojection P_2, und eine Ebene E durch die Punkte α, β, γ gegeben. Es soll der Abstand des Punktes P_r von der Ebene E construirt werden. Wir legen durch P_r eine Ebene E' senkrecht auf $\alpha\gamma$, indem wir von P_2 auf $\alpha\gamma$ eine Senkrechte ziehen, die $\alpha\gamma$ in i und OX in ε trifft, und führen durch ε zu OY eine Parallele, welche $\alpha\beta$ in δ schneidet. Dann sind $P_2\varepsilon$, $\delta\varepsilon$ die Tracen der Ebene E' und δi ist das Bild der Durchschnittslinie der Ebenen E und E'. Hierauf construiren wir die Umlegung $\varepsilon i\delta_0$ des Dreiecks $\varepsilon i\delta$, indem wir $\varepsilon\delta_0$ senkrecht εP_2 ziehen und

$$\varepsilon\delta_0 = n\,.\,\overline{\varepsilon\delta}\,(= 2\,.\,\overline{\varepsilon\delta})$$

machen. Wir errichten ferner in P_2 auf εP_2 eine Senkrechte P_2P_0 und ziehen durch P zu $\delta\delta_0$ eine Parallele PP_0, die P_2P_0 in P_0 trifft; dann ist P_0 die Umlegung des Punktes P_r*. Von P_0 fällen wir auf $\delta_0 i$ eine Senkrechte P_0Q_0, und diese Senkrechte ist gleich dem Abstande des Punktes P_r von der Ebene E.

---

* Die Umlegung P_0 können wir auch erhalten, wenn wir anders $P_2P_0 = 2\,.\,\overline{P_2P}$ machen.

Um das Bild PQ zu erhalten, verbinden wir P mit dem Schnittpunkte ω von $P_0 Q_0$ und $P_2 \varepsilon$ und ziehen durch Q_0 zu $\delta \delta_0$ eine Parallele $Q_0 Q$. Diese Parallele schneidet ωP in dem Punkte Q, in dem Bilde des Fusspunktes der von P_r auf E gefällten Senkrechten. Liegt der Punkt ω ausserhalb der Zeichnungsfläche, so erhält man Q, indem man $Q_0 Q_2$ senkrecht εP_2, dann $O_2 Q$ parallel OY und $Q_0 Q$ parallel $\delta \delta_0$ zieht.

Soll von einem Punkte Q_r der Ebene E auf diese Ebene eine Senkrechte von gegebener Länge errichtet werden, so construirt man, falls nur das Bild Q gegeben ist, zuerst den Punkt Q_2, dann die Umlegung $\varepsilon i \delta_0$ und die Umlegung Q_0, indem man $Q_2 Q_0$ bis zum Durchschnitt Q_0 mit $\delta_0 i$ senkrecht εi zieht oder indem man zu $\delta \delta_0$ die Parallele $Q Q_0$ führt. Hierauf errichtet man in Q_0 auf $\delta_0 i$ die Senkrechte $Q_0 P_0$ von gegebener Länge. Schneidet $P_0 Q_0$ die Gerade $i\varepsilon$ in einem innerhalb der Zeichnungsfläche liegenden Punkte ω, so ziehen wir ωQ, und dann $P_0 P$ parallel $\delta \delta_0$. Dann ist QP das Bild der verlangten Senkrechten. Liegt der Punkt ω ausserhalb der Zeichnungsfläche, so ziehen wir, um P zu erhalten, $P_0 P_2$ senkrecht zu εP_2, dann $P_2 P$ parallel OY und $P_0 P$ parallel $\delta \delta_0$.

7. In Fig. 13 sind zwei Gerade $A_r B_r$, $A'_r B'_r$ resp. durch ihre Grundriss- und Aufrisstracen A_1, B_2 und A'_1, B'_2 gegeben. Es soll der kürzeste Abstand dieser beiden Geraden construirt werden. Wir ziehen durch einen beliebigen Punkt D_r der einen Geraden, z. B. $A_r B_r$, zu der andern eine Parallele, deren Grundrisstrace F_1 und Aufrisstrace G_2 wir auf bekannte Weise construirt haben. Ziehen wir diese Parallelen durch B_2, so wird die Bestimmung dieser Tracen vereinfacht; denn dann ist B_2 zugleich die Aufrisstrace der Parallelen. Durch die beiden Geraden $A_r B_r$ und $F_r G_r$ legen wir eine Ebene E. Die Tracen $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ derselben gehen durch die Punkte A_1, F_1 und B_2, G_2. Von einem beliebigen Punkte P'_r der Geraden $A'_r B'_r$, welche der Ebene E parallel ist, fällen wir, wie in Fig. 12, auf die Ebene E eine Senkrechte, deren Bild $P' Q'$ und deren wahre Länge $P'_0 Q'_0$ die kürzeste Entfernung der beiden Geraden $A_r B_r$ und $A'_r B'_r$ ist. Ziehen wir nun durch Q' zu $A'_2 B'_2$ eine Parallele, die $A_1 B_2$ in Q schneidet, und durch Q zu $Q'P'$ eine Parallele, welche $A'_1 B'_2$ in P trifft, dann ist PQ das Bild des kürzesten Abstandes der beiden Geraden $A_r B_r$ und $A'_r B'_r$.

§ 6.

Darstellung der Körper.

1. Würfel. Die Darstellung eines Würfels, dessen Kanten den Coordinatenaxen parallel sind oder von dem drei Kanten in den Coordinatenaxen liegen (Fig. 14), bedarf keiner Erläuterung.

Die Darstellung eines auf der Grundrissebene senkrecht stehenden Würfels in beliebiger Stellung ist sehr leicht. Wir construiren (Fig. 15) das

Quadrat $A_0B_0C_0D_0$ als Umlegung der in der Grundrissebene liegenden Quadratfläche des Würfels in die gewünschte Lage und bestimmen auf bekannte Weise, wie in Fig. 6, das Bild $ABCD$ dieser Würfelfläche. Hierauf ziehen wir durch die Eckpunkte zur Z-Axe eine Parallele, deren Länge gleich der Würfelkante ist.

Um in Fig. 16 einen Würfel darzustellen, dessen eine Quadratfläche in einer beliebigen Ebene E liegt, welche durch die Punkte α, β, γ gegeben ist, legen wir die Ebene $\alpha\beta\gamma$ in die Bildfläche um. Die Umlegung $\alpha\beta_0\gamma$ ist wie in Fig. 11 construirt. Hierauf zeichnen wir in die gewünschte Lage das Quadrat $A_0B_0C_0D_0$, die Umlegung der in E liegenden Quadratfläche des Würfels, und bestimmen, wie in Fig. 11 gezeigt wurde, das Bild $ABCD$, welches der Umlegung $A_0B_0C_0D_0$ entspricht. Damit wir die Bilder der auf E senkrecht stehenden Würfelkanten erhalten, errichten wir in i auf $i\beta'_0$ eine Senkrechte iP_0, welche gleich der Länge der Würfelkante ist, ziehen P_0P_2 senkrecht Oi, dann P_2P parallel OY und P_0P parallel $\beta'_0\beta$. Hiernach ist iP das Bild einer auf E senkrechten Geraden, deren Länge gleich der Würfelkante ist. Wenn wir nun durch die Eckpunkte A, B, C, D Parallele zu iP ziehen und dieselben gleich iP machen, so erhalten wir das Bild des Würfels.

2. Rotationskegel. Um einen Rotationskegel darzustellen, dessen Grundkreis in der Grundrissebene liegt, denken wir uns die Grundrissebene umgelegt. In dieser zeichnen wir (Fig. 17) die Umlegung K_0 des Grundkreises in die verlangte Lage. Zu dem Mittelpunkte m_0 des Kreises K_0 construiren wir den entsprechenden Punkt m, den Mittelpunkt der Ellipse K (des Bildes des Grundkreises), indem wir m_0v senkrecht OX, ferner vm parallel OY ziehen und

$$vm = n \, . \, \overline{vm_0} \; (= \tfrac{1}{2} v m_0)$$

machen. Betrachten wir nun m_0 als den Mittelpunkt eines involutorischen Strahlenbüschels, in dem je zwei zugehörige Strahlen auf einander senkrecht stehen, und denken wir uns den entsprechenden Strahlenbüschel construirt, dessen Mittelpunkt m ist, so sind je zwei zugehörige Strahlen des involutorischen Büschels m conjugirte Durchmesser der Ellipse K. Wir erhalten demnach die Axen der Ellipse K, wenn wir das rechtwinklige Strahlenpaar des Büschels m bestimmen. Zu diesem Zwecke errichten wir in der Mitte der Geraden mm_0 eine Senkrechte, welche die Affinitätsaxe OX in μ trifft, und beschreiben um μ als Mittelpunkt den Kreis k, der durch m und m_0 geht und OX in p und q schneidet. Dann sind die Strahlen mp und mq, welche auf einander senkrecht stehen, die Axenrichtungen der Ellipse K. Diesem Strahlenpaare entspricht das Strahlenpaar m_0p, m_0q, und ziehen wir durch die Schnittpunkte, welche diese Strahlen mit dem Kreis K_0 bilden, Parallele zu mm_0, wie z. B. a_0a, so erhalten wir die Endpunkte der

Axen der Ellipse K*. Mittels dieser Axen kann man diese Ellipse leicht construiren. Ziehen wir durch m zu OZ eine Parallele und machen auf dieser $m\sigma$ gleich der Höhe des Kegels, so ist σ das Bild der Kegelspitze. Um die geradlinige Contour des Kegels zu erhalten, legen wir von σ Tangenten an K. Diese geradlinige Contour können wir auch sehr leicht ohne die Ellipse K auf folgende Weise construiren. Wir denken uns K und K_0 als zwei affine Systeme und σ im System K liegend; wir bestimmen dann auf bekannte Weise den entsprechenden Punkt σ_0 im System K_0, ziehen von σ_0 an den Kreis K_0 Tangenten und construiren zu diesen die entsprechenden Geraden im System K und zu den Berührungspunkten auf den Kreis K_0 die entsprechenden Punkte. Die durch σ und durch diese Punkte begrenzten Geraden liefern die geradlinige Contour des Kegels.

Wäre die Directrix K_0 des Kegels eine beliebige Curve, so würde man zu K_0 die entsprechende affine Figur K wie gewöhnlich punktweise construiren.

In Fig. 18 ist eine Ebene E durch die Punkte α, β, γ gegeben. Es soll ein Rotationskegel dargestellt werden, dessen Grundkreis in der Ebene E liegt. Wir legen diese Ebene, wie in Fig. 11, in die Bildebene um, zeichnen den Kreis K_0, die Umlegung des Grundkreises, in die gewünschte Lage und bestimmen, wie in Fig. 11 gezeigt wurde, zu dem Mittelpunkte m_0 des Kreises K_0 den entsprechenden Punkt m, den Mittelpunkt der Ellipse K (des Bildes des Grundkreises). Die Axen der Ellipse K können wir ebenso, wie in Fig. 17, mittels des Kreises k bestimmen. Um nun in m auf der Ebene eine Senkrechte zu errichten, deren Länge gleich der gegebenen Höhe des Kegels ist, verfahren wir ganz so, wie in Fig. 16. Wir errichten in i auf $i\beta'_0$ die Senkrechte iP_0 gleich der Höhe des Kegels, bestimmen den Punkt P und ziehen $m\sigma = iP$ parallel iP. Dann ist σ das Bild der Kegelspitze. Die Construction der geradlinigen Contour der Kegelfläche kann man auch ohne die Ellipse K ebenso ausführen, wie wir oben angegeben haben.

3. Kugel. Um das elliptische Bild einer Kugel zu zeichnen, nehmen wir, unbeschadet der Allgemeinheit, den Coordinatenanfangspunkt O (Fig. 19) als Mittelpunkt der Kugel. Wir construiren, wie in § 3 Nr. 2, Fig. 5, gelehrt wurde, die orthogonalen Projectionen Os_1, Os_2 der Sehrichtung für den Grund- und Aufriss, wobei wir OX als Projectionsaxe betrachten. Die Sehrichtung legen wir, um ihre Aufrissprojection Os_2 gedreht, in die Aufrissebene (Bildebene) nieder. Wir erhalten die Umlegung Os_0 der Sehrichtung, wenn wir $s_2 s_0 = s' s_1$ senkrecht Os_2 ziehen. In O errichten wir auf Os_0 die Senkrechte $O\alpha_0$ und auf Os_2 die Senkrechte $O\alpha$, beschreiben um O mit dem

---

* Eine elegante Construction der Axen einer Ellipse, wenn zwei conjugirte Durchmesser gegeben sind, verdankt man Delabar. Siehe Grunert's Archiv für Mathematik etc., 1870, und Delabar's Anleitung zum Linearzeichnen (Polar- und Parallelperspective), 1871.

Kugelradius einen Kreis k', der Oa_0 in a_0 und $O\alpha$ in α trifft, und ziehen durch a_0 zu Os_0 eine Parallele, die Os_2 in a schneidet. Dann ist O der Mittelpunkt, a ein Endpunkt der grossen Axe und α ein Endpunkt der kleinen Axe der Ellipse K, welche das Bild der Kugel ist. Der Kreis k' ist der Durchschnitt, den die Bildebene oder XZ-Ebene mit der Kugelfläche bildet. Ausserdem sind noch die Durchschnitte k'', k''' gezeichnet, welche resp. die XY- und YZ-Ebene mit der Kugelfläche erzeugen.

Diese Grundzüge zeigen, dass die schiefe Parallelperspective in einer freien, der Polarperspective analogen Weise behandelt werden kann, und dass ihre Constructionen viel einfacher sind, als die der Axonometrie. Auch die von Herrn Professor Fiedler zuerst dargelegten, für die Polarperspective so wichtigen Transformationen des Centrums der Bildebene und des Objectes* finden hier ihre Analogieen. Eine ausführliche Behandlung dieses Gegenstandes werde ich in einem besondern Werke: „Die freie Parallelperspective", welches in Bearbeitung ist, veröffentlichen.

---

* Programm der höheren Gewerbeschule zu Chemnitz, 1860. — Tilscher, System der Perspective. Prag, 1871. S. 131. — Fiedler, Darstellende Geometrie. Leipzig, 1871. § 12.

XIX.

Ueber die Entwickelung algebraischer Functionen in Reihen.

Von

Dr. M. Hamburger in Berlin.

Die wichtige Abhandlung Puiseux's über algebraische Functionen, welche in dem Jahre 1850 in Liouville's *Journal de Mathématiques pures et appliquées, T. XV*, erschienen ist*, enthält in ihrem zweiten Theile Untersuchungen über die Art der Vertauschungen, welche die einer algebraischen Gleichung genügenden Functionen in der Umgebung eines singulären Werthes der unabhängigen Variablen eingehen. Es wird gezeigt, dass diese Functionen stets in eine gewisse Anzahl cyklischer Systeme zerfallen, und eine Methode zur wirklichen Darstellung derselben mitgetheilt. Dieselbe Methode giebt auch das Mittel an die Hand, diese Functionen in convergente Reihen nach gebrochenen Potenzen von $z-a$ zu entwickeln, falls z die unabhängige Variable bezeichnet und a der betrachtete singuläre Werth derselben ist.

Bezeichnet u die abhängige Variable, b einen der Werthe, in welchen u für $z=a$ übergeht, so nimmt Puiseux, indem er $z-a$ als eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung betrachtet, für die Ordnung von $u-b$ eine näher zu bestimmende ganze oder gebrochene Zahl μ an, welche dadurch ermittelt wird, dass aus den Termen des Polynoms der gegebenen Gleichung auf alle möglichen Weisen Gruppen gebildet werden, deren jede nur solche Termen enthält, welche von gleicher und niedrigerer Ordnung als alle übrigen sind. Diese Gruppen liefern verschiedene Werthe für μ, mit deren Hilfe die Näherungswerthe sowohl, als die Reihenentwickelungen für die verschiedenen Functionen u gefunden werden, die für $z=a$ den Werth b annehmen.

---

* *Puiseux, Recherches sur les fonctions algébriques.*

So expeditiv diese Methode zur wirklichen Aufstellung der Reihen sich erweist und so wenig gegen die Strenge ihrer Ableitung ein begründeter Einwand erhoben werden kann, so schien es doch von Interesse, zu versuchen, ob man ohne vorgängige Dimensionsbestimmungen, über die naturgemäss erst die gefundenen Reihen unzweifelhaften Aufschluss ergeben, auf rein analytischem Wege zu den Reihenentwickelungen gelangen könne. Dieselben werden im Folgenden dadurch gewonnen, dass die Endgleichung untersucht wird, welche die verschiedenen Werthe der ersten Ableitung der gesuchten Function im betrachteten singulären Punkte zu Wurzeln hat und durch eine einfache Substitution eine neue Variable eingeführt wird, deren Werthe im singulären Punkte mit den endlichen Wurzeln jener Endgleichung zusammenfallen, während für die unendlichen Wurzeln der letzteren die inverse Substitution angewandt wird. Für die einfachen Wurzeln führt bereits die erste Substitution zu den entsprechenden Entwickelungen; für die vielfachen Wurzeln ist in der transformirten Gleichung die Substitution nach dem nämlichen Princip vorzunehmen und damit so lange fortzufahren, bis die Wurzeln der entsprechenden Endgleichung für die erste Ableitung der substituirten Function von einander verschieden sind und somit zu getrennten Entwickelungen führen. Es wird bewiesen, dass in allen Fällen die Zahl der nach einander auszuführenden Substitutionen eine begrenzte ist. In § 2 wird eine besondere Classe von Gleichungen bezeichnet, bei welcher die gesuchte Entwickelung unmittelbar angegeben werden kann.

Am Schluss wird der Gang der erforderlichen Operationen an einem sehr instructiven Beispiele zur Anschauung gebracht, das Puiseux zur Erläuterung seines Verfahrens ausführlich behandelt hat. Hierbei zeigt sich denn eine vollkommene Uebereinstimmung der auf gänzlich verschiedenen Wegen erlangten Ergebnisse.

1.

Es sei

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

eine Gleichung zwischen x und y, welcher durch das Werthepaar x_0, y_0 genügt wird; $f(x, y)$ sei entweder als ganze Function oder durch eine nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0$, $y - y_0$ fortlaufende, in der Umgebung des Werthepaares x_0, y_0 unbedingt convergirende Reihe gegeben.

In dem Falle nun, dass $\frac{\partial f}{\partial y}$ nicht gleichzeitig mit f für $x = x_0$, $y = y_0$ verschwindet oder, was dasselbe bedeutet, y_0 eine ungleiche Wurzel der Gleichung $f(x_0, y) = 0$ ist, giebt es eine der Gleichung $f(x, y) = 0$ genügende Function von x, die sich durch eine in der Umgebung von x_0 unbedingt convergirende Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0$ darstellen lässt und für $x = x_0$ den Werth y_0 annimmt. Dieser bekanntlich von

Cauchy zuerst bewiesene Satz, der für die nachfolgenden Untersuchungen den Ausgangspunkt bildet, lässt sich folgendermassen ableiten:

Es bleibe $f(x, y)$ endlich und stetig, so lange

$$mod\,(x-x_0) \leqq \varrho, \quad mod\,(y-y_0) \leqq r$$

ist, und innerhalb dieses Bereiches in der Umgebung von x_0, y_0 sei M das Maximum des Moduls der Function f; dann ist, wenn man setzt

$$\varphi = \frac{M}{\left(1-\frac{x-x_0}{\varrho}\right)\left(1-\frac{y-y_0}{r}\right)}:$$

$$\left(\frac{\partial^{n+n'}\varphi}{\partial x^n \partial y^{n'}}\right)_0 = 1.2..\ n.1.2\ldots n' \frac{M}{\varrho^n r^n} > mod.\left(\frac{\partial^{n+n'} f}{\partial x^n \partial y^{n'}}\right)_0,$$

wo $\left(\frac{\partial^{n+n'} u(x,y)}{\partial x^n \partial y^{n'}}\right)_0$ den Werth von $\frac{\partial^{n+n'} u(x,y)}{\partial x^n \partial y^{n'}}$ für $x=x_0$, $y=y_0$ bedeutet. (S. *Briot et Bouquet, Journal de l'école polytechnique, cah.* 36 *pag.* 137.)

Die sämmtlichen Ableitungen einer der Gleichung 1) genügenden Function y werden durch Differentiation derselben aus folgenden Gleichungen successive erhalten:

$$2)\quad \begin{cases} 0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}, \\ 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2 y}{dx^2}, \\ 0 = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\frac{dy}{dx} + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 \\ \qquad + 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{d^2 y}{dx^2} + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^3 y}{dx^3} \\ \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

Setzt man in den partiellen Derivirten der Function f überall $x=x_0$, $y=y_0$, so erhält man die Werthe von $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$, $\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_0$, $\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)_0 \ldots$ in Form von Quotienten, deren Nenner bei allen derselbe $= -\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$ ist, welcher Ausdruck unserer Voraussetzung nach von Null verschieden ist. Ersetzen wir nunmehr überall die Werthe der partiellen Derivirten von f für $x=x_0$, $y=y_0$ durch ihre Moduln, so liefert die erste der Gleichungen 2) den Modul von $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$; indem man diesen Werth in der zweiten für $\frac{dy}{dx}$ substituirt, erhält man aus dieser einen Werth

$$\geqq mod.\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_0,$$

durch die Substitution dieses Werthes in der folgenden einen Werth

$$\geqq mod.\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)_0$$

u. s. f.

REESE LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Man bilde nun die quadratische Gleichung

$$
3)\quad \begin{aligned}
0 &= \varphi(x,\eta) - (M+kr)\frac{(\eta-\eta_0)}{r} - M \\
&= \frac{M}{\left(1-\frac{x-x_0}{\varrho}\right)\left(1-\frac{\eta-\eta_0}{r}\right)} - (M+kr)\frac{(\eta-\eta_0)}{r} - M,
\end{aligned}
$$

wo der Kürze wegen k für $mod.\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$ gesetzt ist. Die Gleichung wird durch $x=x_0$, $\eta=\eta_0$ befriedigt. Die sämmtlichen Ableitungen einer derselben genügenden Function η werden vermittelst der Gleichungen erhalten:

$$
4)\quad \left\{\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right) - \frac{M}{r} - k\right]\frac{d\eta}{dx}, \\
0 &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial\eta}\frac{d\eta}{dx} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 + \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right) - \frac{M}{r} - k\right]\frac{d^2\eta}{dx^2}, \\
0 &= \frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3} + 3\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\,\partial\eta}\frac{d\eta}{dx} + 3\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\,\partial\eta^2}\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 + \frac{\partial^3\varphi}{\partial\eta^3}\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^3 \\
&\quad + 3\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial\eta}\frac{d^2\eta}{dx^2} + 3\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}\frac{d\eta}{dx}\frac{d^2\eta}{dx^2} + \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right) - \frac{M}{r} - k\right]\frac{d^3\eta}{dx^3} \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right.
$$

Setzt man überall $x=x_0$, $\eta=\eta_0$, so nehmen die partiellen Derivirten von φ positive Werthe an, die grösser sind als die Moduln der entsprechenden Derivirten von f in 2); der Coefficient der letzten Terme ist in allen Gleichungen

$$
\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)_0 - \frac{M}{r} - k = -k = -mod.\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0.
$$

Man erhält daher successive für $\left(\frac{d\eta}{dx}\right)_0$, $\left(\frac{d^2\eta}{dx^2}\right)_0 \ldots$ positive Werthe, welche grösser sind als diejenigen, die sich aus den Gleichungen 2) beziehentlich für $mod.\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$, $mod.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0$ ergeben.

Nun lässt sich aber eine nach steigenden ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$ geordnete, in der Umgebung von x_0 convergirende Reihe für η angeben, die der Gleichung 3) genügt und für $x=x_0$ in η_0 übergeht. Setzt man nämlich

$$
\frac{x-x_0}{\varrho} = u, \quad \frac{\eta-\eta_0}{r} = v, \quad \frac{kr}{M} = g,
$$

so erhält man die Gleichung

$$
\frac{1}{1-u} = (1-v)\{(1+g)v+1\},
$$

welche, nach v aufgelöst, lautet:

$$
5)\quad v = \frac{g}{2(1+g)}\left\{1 - \sqrt{\frac{1-\left(\frac{g+2}{g}\right)^2 u}{1-u}}\right\}.
$$

Für die Wurzel ist hier das negative Vorzeichen gewählt, damit v gleichzeitig mit u verschwinde.

Nach dem binomischen Satze lassen sich die Ausdrücke

$$\left\{1-\left(\frac{g+2}{g}\right)^2 u\right\}^{1/2} \text{ und } (1-u)^{-1/2}$$

in Reihen nach ganzen positiven Potenzen von u entwickeln, von denen die erstere convergirt, so lange

$$mod. u < \left(\frac{g}{g+2}\right)^2 < 1$$

(wobei wir daran erinnern, dass g eine nicht verschwindende positive Grösse ist), und die letztere Reihe, so lange

$$mod. u < 1.$$

Es convergirt demnach das Product der beiden Reihen, welches die Reihe für die obige Wurzelgrösse liefert, nach einem bekannten Satze so lange, als

$$mod. u < \left(\frac{g}{g+2}\right)^2$$

ist. Man erhält somit für v aus Gleichung 5) die Reihe

$$v = \frac{1}{g} u + (\beta)_2 u^2 + (\beta)_3 u^3 + \ldots,$$

in welcher, wie man sich leicht überzeugt, sämmtliche Coefficienten reelle positive Werthe erhalten*. Führen wir wieder die ursprünglichen Grössen ein, so nimmt die Reihe für η die Gestalt an:

$$\eta = \eta_0 + \frac{M}{k\varrho}(x-x_0) + (\gamma)_2 (x-x_0)^2 + (\gamma)_3 (x-x_0)^3 + \ldots,$$

welche für $x = x_0$ in η_0 übergeht und so lange convergirt, als

$$mod.(x-x_0) < \varrho \left(\frac{kr}{kr+2M}\right)^2$$

ist.

Nachdem die Existenz dieser Reihe erwiesen ist, können wir für ihre Entwickelung das Maclaurin'sche Theorem anwenden und schreiben:

$$\eta = \eta_0 + \left(\frac{d\eta}{dx}\right)_0 (x-x_0) + \left(\frac{d^2\eta}{dx^2}\right)_0 \frac{(x-x_0)^2}{1.2} + \ldots,$$

und da nach dem Obigen

$$mod.\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_0 < \left(\frac{d^n \eta}{dx^n}\right)_0,$$

so convergirt um so mehr die Reihe

---

* Am besten ersieht man dies, wenn man die Wurzelgrösse in 5) auf die Form bringt:

$$\sqrt{1-\frac{4(1+g)}{g^2}\cdot\frac{u}{1-u}} = \sqrt{1-\frac{4(1+g)}{g^2}\left\{u+u^2+u^3+\ldots\right\}},$$

welche entwickelt 1 mit lauter nachfolgenden negativen Gliedern, also für v lauter positive Glieder ergiebt.

$$6)\ y = y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 (x-x_0) + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{(x-x_0)^2}{1.2} + \dots + \left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_0 \frac{(x-x_0)^n}{n!} + \dots$$

für alle Werthe von x, für welche

$$mod.\,(x-x_0) < \varrho\left(\frac{kr}{kr+2M}\right)^2$$

ist.

Die Function, die durch diese Reihe dargestellt wird, geht für $x=x_0$ in y_0 über und ihre Ableitungen nach x nehmen für $x=x_0$ die Werthe an, wie sie aus den Gleichungen 2) für $x=x_0$, $y=y_0$ abgeleitet worden sind. Setzt man nun die Reihe 6) für y in $f(x,y)$ ein, so erhält man eine Function von x allein, die identisch verschwinden muss. Denn entwickelt man sie in die Reihe

$$f(0) + (x-x_0) f'(0) + \frac{(x-x_0)^2}{1.2} f''(0) + \dots,$$

welche nach unseren Voraussetzungen über die Beschaffenheit von $f(x,y)$ so lange convergent bleibt, als die Reihe für y convergirt, so stimmen $f'(0), f''(0)\dots$ mit den rechten Gliedern der Gleichungen 2) überein, wenn man in ihnen $x=x_0$, $y=y_0$ setzt; die Berechnung der Grössen $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ ... geschah aber nach dem Obigen dadurch, dass diese Glieder für $x=x_0$, $y=y_0$ gleich Null gesetzt wurden. Daraus folgt, dass sämmtliche Ableitungen $f'(0), f''(0)\dots$ verschwinden, und da auch $f(0)$ verschwindet, so verschwindet die Function $f(x,y)$ identisch, wenn für y die Reihe 6) eingeführt wird.

Es ist somit unter der Voraussetzung, dass y_0 eine ungleiche Wurzel der Gleichung

$$f(x_0, y) = 0$$

bezeichnet, die Existenz einer der Gleichung 1) genügenden Function y erwiesen, welche für $x=x_0$ in y_0 übergeht und in eine nach ganzen positiven Potenzen von $(x-x_0)$ geordnete, in der Umgebung von x_0 unbedingt convergirende Reihe entwickelt werden kann.

Die Reihe hat die Form

$$y = y_0 + (x-x_0)\, y'_0 + \frac{(x-x_0)^2}{1.2} y''_0 + \dots,$$

wo $y_0^{(\mu)} = \frac{d^\mu y}{dx^\mu}$ für $x=x_0$, $y=y_0$; die Grössen $y'_0, y''_0\dots$ werden durch die recurrirenden Gleichungen 2), in denen $x=x_0$, $y=y_0$ gesetzt wird, linear und unzweideutig erhalten, da $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$ der Voraussetzung zufolge von Null verschieden ist.

Verschwinden, um bei der gemachten Voraussetzung den allgemeinen Fall zu nehmen, die Grössen

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0, \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \cdots \left(\frac{\partial^{\mu-1} f}{\partial x^{\mu-1}}\right)_0,$$

während $\left(\frac{\partial^\mu f}{\partial x^\mu}\right)_0$ von Null verschieden ist, so übersieht man aus den Recursionsformeln 2) sofort, dass die Coefficienten

$$y'_0, y''_0 \ldots y_0^{(\mu-1)}$$

sämmtlich verschwinden und der erste nicht verschwindende Coefficient $y_0^{(\mu)}$ den Werth

$$-\left(\frac{\partial^\mu f}{\partial x^\mu}\right)_0 : \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$$

erhält, so dass die Reihe für y lautet:

$$7) \qquad y = y_0 - \left(\frac{\frac{\partial^\mu f}{\partial x^\mu}}{\frac{\partial f}{\partial y}}\right)_0 \frac{(x-x^0)^\mu}{\mu!} + y_0^{(\mu+1)} \frac{(x-x_0)^{\mu+1}}{(\mu+1)!} + \ldots.$$

2.

Wir gehen nun zu dem Falle über, dass y_0 ein vielfacher Wurzelwerth der Gleichung $f(x_0, y) = 0$ ist, also $\frac{\partial f}{\partial y}$ für $x = x_0$, $y = y_0$ verschwindet.

Hier sind zwei Hauptfälle zu unterscheiden, je nachdem x_0 eine ungleiche Wurzel der Gleichung $f(x, y) = 0$ ist oder nicht, oder, was dasselbe ist, je nachdem $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$ nicht verschwindet oder zugleich mit $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$ verschwindet.

Für den ersten Fall führt folgendes Verfahren zum Ziele, welches wir einer Vorlesung von Weierstrass über elliptische Functionen entnehmen.

Man betrachte in der gegebenen Gleichung 1) x als Function von y; nach dem Vorigen wird, da $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$ nicht verschwindet, x in eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $y - y_0$ sich entwickeln lassen, die für kleine Werthe von $y - y_0$ convergirt, und wenn ausser $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$ noch die Grössen

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0, \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_0 \cdots \left(\frac{\partial^{\mu-1} f}{\partial y^{\mu-1}}\right)_0$$

verschwinden, die Gestalt hat:

$$8) \qquad x = x_0 - \left(\frac{\frac{\partial^\mu f}{\partial y^\mu}}{\frac{\partial f}{\partial x}}\right)_0 \frac{(y-y_0)^\mu}{\mu!} + x_0^{(\mu+1)} \frac{(y-y_0)^{\mu+1}}{(\mu+1)!} + \ldots,$$

wobei zu bemerken, dass die Annahme, $\left(\frac{\partial^\mu f}{\partial y^\mu}\right)_0$ sei die erste der Grössen

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0, \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 \cdots,$$

welche nicht verschwindet, gleichbedeutend ist mit der Voraussetzung, y_0 sei eine μ-fache Wurzel der Gleichung $f(x_0, y) = 0$.

Die Gleichung 8) kann man schreiben:

$$x - x_0 = A(y-y_0)^\mu \{1 + h_1(y-y_0) + h_2(y-y_0)^2 + \dots\},$$

wo

$$A = -\frac{1}{\mu!}\left(\frac{\frac{\partial^\mu f}{\partial y^\mu}}{\frac{\partial f}{\partial x}}\right)_0, \quad h_1 = \frac{x_0^{(\mu+1)}}{(\mu+1)!\,A}, \quad h_2 = \frac{x_0^{(\mu+2)}}{(\mu+2)!\,A}$$

u. s. f.

Zieht man auf beiden Seiten die μ^{te} Wurzel, so ergiebt sich

$$\left(\frac{x-x_0}{A}\right)^{\frac{1}{\mu}} = (y-y_0)\{1 + h_1(y-y_0) + h_2(y-y_0)^2 + \dots\}^{\frac{1}{\mu}}.$$

Der Ausdruck $\{1 + h_0(y-y_0) + h_2(y-y_0)^2 + \dots\}^{\frac{1}{\mu}}$ lässt sich mit Hilfe des polynomischen Satzes in eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $y-y_0$ entwickeln, die bekanntlich für hinreichend kleine Werthe von $y-y_0$ convergirt und die Form hat:

$$1 + \frac{h_1}{\mu}(y-y_0) + \text{Glieder mit höheren Potenzen von } y-y_0.$$

Substituirt man diese Reihe in obiger Gleichung, so erhält man:

$$\left(\frac{x-x_0}{A}\right)^{\frac{1}{\mu}} = y - y_0 + \frac{h_1}{\mu}(y-y_0)^2 + k_3(y-y_0)^3 + \text{etc.},$$

und indem man für den Augenblick

$$\left(\frac{x-x_0}{A}\right)^{\frac{1}{\mu}} = z, \quad y - y_0 = t$$

setzt:

$$z = t + \frac{h_1}{\mu}t^2 + k_3 t^3 + \dots.$$

Wir haben somit jetzt eine Gleichung

$$\varphi(z, t) = z - t - \frac{h_1}{\mu}t^2 - k_3 t^3 \dots = 0,$$

welche durch das Werthepaar $z=0$, $t=0$ befriedigt wird, der Art, dass $\frac{\partial \varphi(z,t)}{\partial t}$ für dasselbe den Werth -1 annimmt, also nicht verschwindet; $\varphi(z, t)$ selbst ist durch eine nach ganzen positiven Potenzen von z und t aufsteigende in der Umgebung des Werthepaares $z=0$, $t=0$ convergirende Reihe gegeben; folglich lässt sich nach dem in § 1 bewiesenen Satze t in eine convergente Reihe nach ganzen positiven Potenzen von z entwickeln, in welcher der Coefficient von z selbst offenbar $=1$ wird; man erhält also

$$t = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

und, indem für z und t ihre Werthe wieder eingesetzt werden:

$$9)\qquad y = y_0 + \left(\frac{x-x_0}{A}\right)^{\frac{1}{\mu}} + a_2\left(\frac{x-x_0}{A}\right)^{\frac{2}{\mu}} + \dots,$$

wo

$$A = -\frac{1}{\mu!}\left(\frac{\frac{\partial^\mu f}{\partial y^\mu}}{\frac{\partial f}{\partial x}}\right)_0,$$

und die Grössen $A, a_2, a_3 \dots$ sämmtlich rational aus $x_0 y_0$ und den Coefficienten der Gleichung 1) zusammengesetzt sind.

Wir erhalten also das Resultat:

Wenn y_0 eine gleiche, und zwar μ-fache Wurzel der Gleichung

$$f(x_0, y) = 0$$

ist, dergestalt, dass x_0 eine ungleiche Wurzel der Gleichung

$$f(x, y_0) = 0$$

ist, so lässt sich y in eine für kleine Werthe von $x - x_0$ convergente Reihe entwickeln, die nach ganzen positiven Potenzen von $(x - x_0)^{\frac{1}{\mu}}$ fortschreitet.

Indem man in der Reihe 9) der Grösse $\left(\frac{x-x_0}{A}\right)^{\frac{1}{\mu}}$ ihre μ verschiedenen Werthe giebt, erhält man für die der Gleichung 1) genügende Function y μ Darstellungen, die alle für $x = x_0$ in den Werth y_0 übergehen. Da nun y_0 eine μ-fache Wurzel der Gleichung

$$f(x_0, y) = 0$$

ist, so repräsentirt obige Reihe sämmtliche Functionen y, die für $x = x_0$ in y_0 übergehen, und zwar bilden sie eine einzige cyklische Gruppe von μ Gliedern.

Der zweite Hauptfall, da $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$ mit $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$ zugleich verschwindet, lässt offenbar die obige Behandlungsweise nicht zu, da, wenn man x als Function von y betrachtet, die anfängliche Schwierigkeit bestehen bleibt.

Es giebt indess eine besondere, zu diesem Falle gehörige Classe von Gleichungen, bei welchen man durch ein ähnliches Verfahren zum Ziele gelangt, deren Betrachtung wir deshalb der allgemeinen Untersuchung des zweiten Hauptfalles vorausgehen lassen.

Denken wir uns in der Gleichung 1), welche durch $x = x_0$, $y = y_0$ befriedigt wird, die Function $f(x, y)$ nach dem erweiterten Maclaurin'schen Satze in eine (endliche oder unendliche) Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0$ und $y - y_0$ entwickelt, in welcher das constante Glied fortfallen wird, so kann der Fall eintreten, dass sich die Glieder in folgender Form vereinigen lassen:

10) $$0 = (x-x_0)^m \varphi(x, y) - (y-y_0)^n \psi(x, y) = f(x, y),$$

wo $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ für die Werthe $x = x_0$, $y = y_0$ nicht verschwinden; hier verschwindet offenbar, wenn $m > 1$, $n > 1$, sowohl $\frac{\partial f}{\partial x}$, als $\frac{\partial f}{\partial y}$ für $x = x_0$, $y = y_0$. Die Entwickelung von y in eine Reihe nach Potenzen von $x - x_0$ erhält man nun auf folgende Weise:

Es sei

$$\varphi(x, y) = a + a_1(x-x_0) + a_2(y-y_0) + a_3(x-x_0)^2 + a_4(x-x_0)(y-y_0) + \text{etc.},$$

$$\psi(x, y) = b + b_1(x-x_0) + b_2(y-y_0) + b_3(x-x_0)^2 + b_4(x-x_0)(y-y_0) + \text{etc.},$$

wo der Voraussetzung zufolge weder a, noch b verschwindet, so ist nach obiger Gleichung

$$a(x-x_0)^m \left\{1 + \frac{a_1}{a}(x-x_0) + \frac{a_2}{a}(y-y_0) + \frac{a_3}{a}(x-x_0)^2 + \text{etc.}\right\}$$
$$= b(y-y_0)^n \left\{1 + \frac{b_1}{b}(x-x_0) + \frac{b_2}{b}(y-y_0) + \frac{b_3}{b}(x-x_0)^2 + \text{etc.}\right\}.$$

Ziehen wir auf beiden Seiten die n^{te} Wurzel und entwickeln die n^{te} Wurzel der eingeklammerten Polygone nach dem Polynomialsatze in eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0$ und $y - y_0$, die für hinreichend kleine Werthe derselben bekanntlich convergirt, so erhalten wir

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} (x-x_0)^{\frac{m}{n}} \left\{1 + \frac{a_1}{na}(x-x_0) + \frac{a_2}{na}(y-y_0) + c_1(x-x_0)^2 + \text{etc.}\right\}$$
$$= (y-y_0)\left\{1 + \frac{b_1}{nb}(x-x_0) + \frac{b_2}{nb}(y-y_0) + d_1(x-x_0)^2 + \text{etc.}\right\}.$$

Nun sei α der grösste gemeinsame Theiler von m und n, so dass

$$m = r\alpha, \quad n = s\alpha,$$

r also relativ prim zu s, und man setze

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \lambda,$$

so wird

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} (x-x_0)^{\frac{m}{n}} = [\lambda(x-x_0)^r]^{\frac{1}{s}}.$$

Da λ α Werthe hat, so erhält man α Gleichungen von der Gestalt

$$\{\lambda(x-x_0)^r\}^{\frac{1}{s}} \left\{1 + \frac{a_1}{na}(x-x_0) + \frac{a_2}{na}(y-y_0) + \text{etc.}\right\}$$
$$= (y-y_0)\left\{1 + \frac{b_1}{nb}(x-x_0) + \frac{b_2}{nb}(y-y_0) + \text{etc.}\right\}.$$

Diese gehen durch die Substitution

$$(x-x_0)^{\frac{1}{s}} = t$$

in α Gleichungen zwischen t und y über, die nur ganze positive Potenzen von t und $y-y_0$ enthalten und sämmtlich für $t=0$ $y=y_0$ als einfache Wurzel liefern; folglich lässt sich nach § 1 y in eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von t entwickeln, die mit der Potenz t^r beginnt, und substituirt man wieder für t seinen Werth, so erhält man die Reihe

$$y = y_0 + \lambda^{\frac{1}{s}} (x-x_0)^{\frac{r}{s}} + g_1 (x-x_0)^{\frac{r+1}{s}} + \text{etc.},$$

wo $g_1, g_2 \ldots$ rational aus $\lambda^{\frac{1}{s}}$ und den Coefficienten der ursprünglichen Gleichung zusammengesetzt sind.

Diese Reihe giebt uns für y eine Functionengruppe von s Gliedern, die cyklisch in einander übergehen, und da es solcher Reihen α giebt, wegen der α verschiedenen Werthe von λ, so erhellt, dass y in der Umgebung von x_0 α Gruppen von je s Gliedern bildet. Im Ganzen sind dadurch $\alpha s = n$ Functionen für y gegeben und in Uebereinstimmung damit ergiebt der Anblick der Gleichung 10), dass für $x=x_0$ y_0 eine n-fache Wurzel der Gleichung ist.

Wenn m prim zu n, dann ist $\alpha=1$, $s=n$, und man erhält eine einzige Gruppe von n Gliedern.

Wenn $m=kn$, wo k eine ganze positive Zahl, dann ist $\alpha=n$, $s=1$; in diesem Falle bilden die Functionen y n Gruppen von je einem Gliede und die Reihen für dieselben schreiten nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$ fort.

Uebrigens erkennt man, dass in der Gleichungsform 10) die beiden bisher betrachteten Fälle enthalten sind, welche sich ergeben, wenn man beziehentlich $n=1$ oder $m=1$ setzt. Zu dieser Classe gehören die drei ersten von den vier Gleichungen, welche Puiseux a. a. O. S. 404 flgg. zu Beispielen für seine Methode ausgewählt hat; die letzte werden wir am Schluss der nachfolgenden Untersuchung ausführlich behandeln.

3.

Wir gehen nun zur allgemeinen Betrachtung des Falles über, wo $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ für $x=x_0$, $y=y_0$ zugleich verschwinden.

Zuvörderst suchen wir den Werth des Differentialquotienten $\frac{dy}{dx} = y'$ für dieses Werthepaar zu ermitteln. Hierzu dienen uns die aus der Gleichung 1) durch wiederholt ausgeführte totale Differentiationen nach x erhaltenen Gleichungen 2).

Aus der ersten dieser Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0$$

lässt sich in unserem Falle für $x=x_0$, $y=y_0$ y' nicht bestimmen. Die zweite derselben liefert, wenn man $x=x_0$, $y=y_0$ setzt, wodurch $\frac{\partial f}{\partial y}$ verschwindet, die Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_0 y' + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 y'^2 = 0,$$

die für y' im Allgemeinen zwei Werthe ergiebt, die aber ihrerseits zur Bestimmung von y' für $x=x_0$, $y=y_0$ untauglich wird, wenn für dieses Werthepaar auch die sämmtlichen partiellen Ableitungen zweiter Ordnung zugleich verschwinden. Man erhält dann durch die Substitution von $x=x_0$, $y=y_0$ in der dritten Gleichung, wenn man bemerkt, dass die Coefficienten von y'' und y''' nur partielle Ableitungen der ersten und zweiten Ordnung enthalten, zur Bestimmung von y' für $x=x_0$, $y=y_0$ die Gleichung

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0 + 3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}\right)_0 y' + 3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}\right)_0 y'^2 + \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_0 y'^3 = 0,$$

welche im Allgemeinen drei Werthe für y' liefert, jedoch ebenfalls unbrauchbar wird, wenn alle partiellen Ableitungen dritter Ordnung für $x=x_0$, $y=y_0$ verschwinden, in welchem Falle man dann zur folgenden Gleichung in der Reihe der Gleichungen 2) überzugehen hat. Verschwinden nun, um den allgemeinen Fall zu nehmen, für $x=x_0$, $y=y_0$ mit $f(x,y)$ sämmtliche partielle Ableitungen erster, zweiter, dritter bis $\mu-1^{\text{ter}}$ Ordnung, nach x und y genommen, während die partiellen Ableitungen μ^{ter} Ordnung nicht sämmtlich verschwinden, so werden durch die Substitution von $x=x_0$, $y=y_0$ die $\mu-1$-ersten Gleichungen in der Reihe der Gleichungen 2) identisch gleich Null und können daher zur Bestimmung von y' für $x=x_0$, $y=y_0$ nicht dienen; die μ^{te} Gleichung dagegen, in welcher die y'', y'''... enthaltenden Glieder mit partiellen Ableitungen niederer als μ^{ter} Ordnung behaftet sind und daher wegfallen, liefert zur Bestimmung für y' im betrachteten Werthepaare die Gleichung

$$\text{11)}\quad \begin{aligned} &\left(\frac{\partial^\mu f}{\partial x^\mu}\right)_0 + \mu_1\left(\frac{\partial^\mu f}{\partial x^{\mu-1}\,\partial y}\right)_0 y' + \mu_2\left(\frac{\partial^\mu f}{\partial x^{\mu-2}\,\partial y^2}\right)_0 y'^2 + \cdots \\ &\qquad + \mu_1\left(\frac{\partial^\mu f}{\partial x\,\partial y^{\mu-1}}\right)_0 y'^{\mu-1} + \left(\frac{\partial^\mu f}{\partial y^\mu}\right)_0 y'^\mu = 0, \end{aligned}$$

wo

$$\mu_k = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-k+1)}{1.2.3\ldots k}.$$

Betrachtet man x als Function von y und sucht die Gleichung für $x' = \frac{\partial x}{\partial y}$ im Werthepaare x_0, y_0, so findet man auf demselben Wege bei der nämlichen Voraussetzung die Gleichung

$$12)\quad \left(\frac{\partial^\mu f}{\partial y^\mu}\right)_0 + \mu_1 \left(\frac{\partial^\mu f}{\partial y^{\mu-1}\partial x}\right)_0 x' + \cdots$$
$$+ \mu_1 \left(\frac{\partial^\mu f}{\partial y\, \partial x^{\mu-1}}\right)_0 x'^{\mu-1} + \left(\frac{\partial^\mu f}{\partial x^\mu}\right)_0 x'^\mu = 0,$$

welche die reciproke von 11) ist, so dass also, wie zu erwarten, die Relation $x' = \frac{1}{y'}$ besteht.

Unter den Wurzeln der Gleichung 11), welche wir kurzweg die Finalgleichung in y'_0 nennen wollen, können endliche und unendliche vorkommen. Unendliche sind vorhanden, wenn der Coefficient von y'^μ, $\left(\frac{\partial^\mu f}{\partial y^\mu}\right)_0$ verschwindet, wie dies am klarsten aus der Finalgleichung 12) in x'_0 hervorgeht, in welcher, wenn mit $\left(\frac{\partial^\mu f}{\partial y^\mu}\right)_0$ zugleich die $\lambda-1$ unmittelbar vorhergehenden Coefficienten in 11) verschwinden, x'^λ als Factor heraustritt, dass also in diesem Falle λ Wurzeln x' in 12) gleich Null und demgemäss λ Wurzeln y' in 11) unendlich werden. In dem besondern Falle, dass in 11) alle Coefficienten ausser $\left(\frac{\partial^\mu f}{\partial x^\mu}\right)_0$ verschwinden, existiren *nur* unendliche Werthe von y' für $x=x_0$, $y=y_0$.

Ueber den Grad μ der Finalgleichung in y'_0 ist folgender Satz zu bemerken, der uns späterhin von Wichtigkeit sein wird:

Ist y_0 eine n-fache Wurzel der Gleichung $f(x_0, y) = 0$, so ist stets $\mu \leqq n$, und zwar ist $\mu = n$, wenn die Wurzeln der Finalgleichung in y'_0 alle endlich sind, und $\mu < n$, wenn unter ihnen unendliche vorkommen.

Denn, wie aus der Annahme folgt, ist $\left(\frac{\partial^n f}{\partial y^n}\right)_0$ von Null verschieden, also kommt unter den partiellen Ableitungen n^{ter} Ordnung von $f(x, y)$ nach x und y *eine* sicher vor, die für $x=x_0$, $y=y_0$ nicht verschwindet; μ aber war definirt als die Zahl, welche die erste Ordnung angiebt, in der nicht alle partiellen Ableitungen von $f(x, y)$ verschwinden, folglich kann μ nicht grösser als n sein. Nun sind der Voraussetzung nach die Grössen

$$(f)_0,\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0,\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 \cdots \left(\frac{\partial^{\mu-1} f}{\partial y^{\mu-1}}\right)_0$$

sämmtlich gleich Null. $\left(\frac{\partial^\mu f}{\partial y^\mu}\right)_0$ aber ist, wenn alle μ Wurzeln y'_0 endlich sind, von Null verschieden, wenn dagegen unendliche unter ihnen vorkommen, ebenfalls gleich Null. Im ersten Falle ist daher y_0 eine μ-fache Wurzel der Gleichung $f(x_0, y)=0$, also $\mu=n$; im zweiten Falle aber ist y_0 eine mehr als μ-fache Wurzel jener Gleichung, also $\mu<n$, q. e. d.

4.

Wir fügen nunmehr zu der Voraussetzung des vorigen Paragraphen, dass die Function f und ihre sämmtlichen partiellen Ableitungen niederer als μ^{ter} Ordnung verschwinden, noch die Festsetzung hinzu, dass $f(x, y)$ eine ganze Function m^{ter} Dimension in Bezug auf x, y sei, und entwickeln dieselbe in eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$ und $y-y_0$, alsdann nimmt die Gleichung 1) folgende Gestalt an:

$$
\begin{aligned}
0=f(x,y)=\frac{1}{\mu!}\Big\{&\left(\frac{\partial^\mu f}{\partial x^\mu}\right)_0 (x-x_0)^\mu \\
&+\mu_1\left(\frac{\partial^\mu f}{\partial x^{\mu-1}\,\partial y}\right)_0 (x-x_0)^{\mu-1}(y-y_0)+\cdots \\
&+\left(\frac{\partial^\mu f}{\partial y^\mu}\right)_0 (y-y_0)^\mu\Big\} \\
&+\frac{1}{(\mu+1)!}\Big\{\left(\frac{\partial^{\mu+1} f}{\partial x^{\mu+1}}\right)_0 (x-x_0)^{\mu+1}+\cdots \\
&+\left(\frac{\partial^{\mu+1} f}{\partial y^{\mu+1}}\right)_0 (y-y_0)^{\mu+1}\Big\}+\cdots \\
&+\frac{1}{m!}\Big\{\left(\frac{\partial^m f}{\partial x^m}\right)_0 (x-x_0)^m+\cdots+\left(\frac{\partial^m f}{\partial y^m}\right)_0 (y-y_0)^m\Big\}.
\end{aligned} \tag{13}
$$

An die Stelle von y führen wir nun eine neue Variable t ein, indem wir in 13) setzen:

$$y-y_0=(x-x_0)t,$$

und erhalten nach Abtrennung des Factors $\frac{(x-x_0)^\mu}{\mu!}$ die Gleichung zwischen x und t:

$$
\begin{aligned}
0=f_1(x,t)=&\left(\frac{\partial^\mu f}{\partial x^\mu}\right)_0+\mu_1\left(\frac{\partial^\mu f}{\partial x^{\mu-1}\,\partial y}\right)_0 t+\cdots+\left(\frac{\partial^\mu f}{\partial y^\mu}\right)_0 t^\mu \\
&+\frac{(x-x_0)}{\mu+1}\Big\{\left(\frac{\partial^{\mu+1} f}{\partial x^{\mu+1}}\right)_0+(\mu+1)_1\left(\frac{\partial^{\mu+1} f}{\partial x^\mu\,\partial y}\right)_0 t+\cdots \\
&+\left(\frac{\partial^{\mu+1} f}{\partial y^{\mu+1}}\right)_0 t^{\mu+1}\Big\}+\cdots \\
&+\frac{\mu!}{m!}(x-x_0)^{m-\mu}\Big\{\left(\frac{\partial^m f}{\partial x^m}\right)_0+\cdots+\left(\frac{\partial^m f}{\partial y^m}\right)_0 t^m\Big\},
\end{aligned} \tag{14}
$$

welche ausser den Coefficienten der Gleichung 1) noch die Grössen x_0, y_0 als Constanten enthält. Das von $x-x_0$ freie Glied in 14) ist

$$\left(\frac{\partial^\mu f}{\partial x^\mu}\right)_0+\mu_1\left(\frac{\partial^\mu f}{\partial x^{\mu-1}\,\partial y}\right)_0 t+\mu_2\left(\frac{\partial^\mu f}{\partial x^{\mu-2}\,\partial y^2}\right)_0 t^2+\cdots+\left(\frac{\partial^\mu f}{\partial y^\mu}\right)_0 t^\mu.$$

Folglich erhalten wir alle endlichen Werthe t_0 von t, die der Gleichung $f_1(x_0, t)=0$ genügen, wenn wir dieses Glied gleich Null setzen; die

so erhaltene Gleichung ist aber identisch mit der Finalgleichung in y'_0 11). Wofern diese also endliche Wurzeln hat, sind dieselben die gesuchten Werthe t_0. Sind keine endlichen Wurzeln vorhanden, was (s. § 3) der Fall ist, wenn im obigen Ausdruck ausser $\left(\frac{\partial^\mu f}{\partial x^\mu}\right)_0$ alle übrigen Coefficienten verschwinden, so entspricht dem Werthe $x=x_0$ offenbar kein endlicher Werth von t, und es bedarf für diesen Fall einer andern Substitution in der Gleichung 1), wie weiter unten gezeigt wird, wo überhaupt die an die unendlichen Wurzeln der Finalgleichung sich knüpfenden Reihenentwickelungen in Betracht gezogen werden.

Die vorhandenen endlichen Wurzeln der Finalgleichung in y'_0 sind nun in einfache und vielfache zu scheiden, und wir nehmen zunächst für y'_0 eine der einfachen Wurzeln, falls solche existiren. In diesem Falle stellt $f_1(x, t)=0$ eine Gleichung zwischen x und t dar, der für $x=x_0$ ein einfacher Wurzelwerth $t=t_0=y'_0$ genügt; es lässt sich daher nach § 1 t in eine convergente Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$ entwickeln von der Gestalt

$$t=t_0+(x-x_0)\left(\frac{dt}{dx}\right)_0+\frac{(x-x_0)^2}{1.2}\left(\frac{d^2t}{dx^2}\right)_0+\ldots.$$

Die Grössen $\left(\frac{d^kt}{dx^k}\right)_0$ sind als rationale Functionen von x_0, y_0, $t_0=y'_0$ und den Coefficienten der Gleichung 1) eindeutig und endlich bestimmt.

Substituiren wir jetzt für t seinen Werth $\frac{y-y_0}{x-x_0}$, so erhalten wir endlich für y die nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$ aufsteigende Reihe

$$y=y_0+(x-x_0)\,t_0+(x-x_0)^2\left(\frac{dt}{dx}\right)_0+\frac{(x-x_0)^3}{2}\left(\frac{d^2t}{dx}\right)_0^2+\ldots.$$

Solche für hinlänglich kleine Werthe von $x-x_0$ convergirende Reihen erhalten wir so viele für y, als es einfache Wurzeln der Finalgleichung in y'_0 giebt.

Bezeichne jetzt y'_0 eine mehrfache Wurzel dieser Gleichung, und zwar seien α Wurzeln $=y'_0$, $\alpha\leqq\mu$, so wird in der transformirten Gleichung 14) dem Werthe $x=x_0$ ein α-facher Werth $t=t_0=y'_0$ entsprechen. Entwickelt man nun, ähnlich wie das Polynom der Gleichung 1), $f_1(x, t)$ in eine Reihe nach steigenden Potenzen von $x-x_0$, $t-t_0$, und es beginne die Entwickelung mit Gliedern der ν^{ten} Dimension in Bezug auf diese Grössen, so führt auch die Werthbestimmung von $\frac{dt}{dx}$ für $x=x_0$, $t=t_0$ zu einer Gleichung ν^{ten} Grades, die wir als die Finalgleichung in t'_0 bezeichnen und wo nach § 3 $\nu\leqq\alpha$.

Wir bemerken, dass t'_0 nichts Anderes ist als der Werth von $\frac{y''}{2}$ für die Werthenreihe $x=x_0$, $y=y_0$, $y'=y'_0$, wie leicht folgt aus

$$t'_0 = lim.\frac{t-t_0}{x-x_0} = lim.\frac{t-y'_0}{x-x_0} = lim.\frac{y-y_0-(x-x_0)y'_0}{(x-x_0)^2} \quad \text{für } x=x_0.$$

Für den Fall nun, dass die Finalgleichung in t'_0 endliche Wurzeln hat, transformiren wir die Gleichung 14) durch die Substitution

$$t-t_0 = t-y'_0 = (x-x_0)\,u$$

und Abtrennung des Factors $\frac{(x-x_0)^\nu}{\nu!}$ in eine Gleichung zwischen x und u:

$$f_2(x,u)=0,$$

in welcher zu $x=x_0$ so viele endliche Wurzeln u_0 von u gehören, als die Finalgleichung in t'_0 endliche Wurzeln hat, mit denen sie zugleich dem Werthe nach coincidiren, welches ganz so, wie oben bezüglich der Gleichungen $f_1(x,t)=0$ und $f(x,y)=0$ bewiesen wird.

Bezeichnet t'_0 und also auch u_0 eine einfache Wurzel, so lässt sich u nach § 1 in eine convergente Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$ entwickeln, von der Gestalt

$$u = u_0 + \left(\frac{du}{dx}\right)_0 (x-x_0) + \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0 \frac{(x-x_0)^2}{1.2} + \ldots,$$

wo die Grössen $\left(\frac{d^k u}{dx^k}\right)_0$ rational aus x_0, y_0, y'_0, y''_0 und den Coefficienten der Gleichung 1) zusammengesetzt sind, und setzt man für u seinen Werth

$$\frac{t-y'_0}{x-x_0} = \frac{y-y_0-(x-x_0)\,y'}{(x-x_0)^2}$$

ein, so erhält man

$$y-y_0+(x-x_0)\,y'_0+(x-x_0)^2 u_0+(x-x_0)^3\left(\frac{du}{dx}\right)_0+\frac{(x-x_0)^4}{2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0+\ldots.$$

Es ergiebt sich also auch in diesem Falle für y eine convergente, nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$ aufsteigende Reihe, und zwar erhält man so viele Reihen, als es endliche und zugleich einfache Wurzeln t'_0 giebt, oder nach dem Obigen, als sich, sobald für $x=x_0$, $y=y_0$ und $y'=y'_0$ fixirt sind, endliche und einfache Werthe von y'' ergeben.

Bezeichnet aber t'_0 eine endliche vielfache, etwa βmal vorkommende Wurzel der Finalgleichung in t'_0, wo $\beta \leqq \nu$, so entspricht auch in der Gleichung $f_2(x,u)=0$ dem Werthe $x=x_0$ ein β-facher Werth von u. Es bedarf dann, falls die Finalgleichung in u'_0 vom ϱ^{ten} Grade, wo $\varrho \leqq \beta$, endliche Wurzeln enthält, der weiteren Substitution

$$u-u_0 = u-\frac{y''_0}{2} = (x-x_0)\,v,$$

um zur transformirten Gleichung $f_3(x, v) = o$ zu gelangen, welche wir dann in derselben Weise wie die früheren weiter zu behandeln haben. Zugleich erkennt man, dass u'_0 der Werth von

$$\frac{y'''}{1.2.3} \text{ für } x=x_0, \ y=y_0, \ y'=y'_0, \ y''=y''_0,$$

da

$$u'_0 = lim . \frac{u-u_0}{x-x_0} = lim . \frac{y-y_0-(x-x_0)\,y'_0-(x-x_0)^2\frac{y''_0}{2}}{(x-x_0)^3}$$

für obige Werthenreihe $= \frac{y'''_0}{1.2.3}$.

Man sieht, dass das eben beschriebene Verfahren so lange anwendbar ist, als wir bei den aufeinanderfolgenden Finalgleichungen in y'_0, t'_0, u'_0 u. s. f. auf endliche Wurzeln stossen. Jede unter ihnen vorkommende einfache Wurzel führt sofort auf eine entsprechende Entwickelung von y nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$, die für $x=x_0$ in y_0 übergeht. Es fragt sich nun, ob und unter welcher Bedingung man durch fortgesetzte Anwendung obiger Substitutionen schliesslich zu einer Gleichung gelangen müsse, deren entsprechende Finalgleichung keine mehrfachen endlichen Wurzeln mehr enthält, sondern entweder nur unendliche, oder theils unendliche, theils einfache endliche Wurzeln enthält.

Was die Bedeutung der Ausdrücke y'_0, t'_0, u'_0 u. s. f. für die Gleichung 1) betrifft, so haben wir gefunden, dass

y'_0 einen der Werthe von y' bedeutet für $x=x_0$, $y=y_0$,

t'_0 „ „ „ „ $\frac{y''}{2}$ „ „ $x=x_0$, $y=y_0$, $y'=y'_0$,

u'_0 „ „ „ „ $\frac{y'''}{1.2.3}$ „ „ $x=x_0$, $y=y_0$, $y'=y'_0$, $y''=y''_0$

u. s. f.

Die Annahme also, dass bei den aufeinanderfolgenden Substitutionen in den entsprechenden Finalgleichungen stets mehrere Wurzeln einen gleichen und zwar endlichen Werth erhalten, würde zur Folge haben, dass unter den verschiedenen, der Gleichung 1) genügenden Functionen y, die für $x=x_0$ denselben Werth y_0 annehmen, es zwei oder mehrere gebe, deren erste Ableitungen nach x denselben endlichen Werth y'_0 erhalten, von diesen wiederum mindestens zwei, deren zweite Ableitungen nach x denselben endlichen Werth y''_0 erhalten u. s. f. in inf. Das Ergebniss würde sein, dass zwei oder mehrere der Gleichung 1) genügende Functionen y existirten, welche, sowie ihre sämmtlichen successiven Ableitungen, bis ins Unendliche für $x=x_0$ übereinstimmende und zwar endliche Werthe erhielten.

Nun gilt aber folgender Satz:

Es sei die Gleichung $f(x, y) = 0$ gegeben, in welcher $f(x, y)$ ein Polynom resp. vom p^{ten} und q^{ten} Grade in Beziehung auf x und y sei, und es werde mit k der höchste Grad bezeichnet, den ihre Discriminante, d. h. die

Eliminationsresultante zwischen $f=0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ annehmen kann, so dass $k=2p(q-1)$.* Giebt es nun zwei oder mehrere der Gleichung $f=0$ genügende Functionen y, die nebst ihren successiven Ableitungen nach x bis zur k^{ten} Ordnung incl. einander gleiche endliche Werthe für $x=x_0$ annehmen, so sind diese Functionen y für jeden Werth von x einander gleich und die Polynome f und $\frac{\partial f}{\partial y}$ haben einen gemeinsamen rationalen Factor.

Denn man stelle sich aus der gegebenen Gleichung, deren Wurzeln in y seien $y_1, y_2, y_3 \ldots y_q$, die Gleichung der quadrirten Wurzeldifferenzen her; sie laute:

$$15)\qquad A+Bz+Cz^2+\ldots+Tz^{\frac{q(q-1)}{2}}=0,$$

wo $A, B, C \ldots T$ ganze Functionen von x sind, die nicht alle einen gemeinsamen Factor enthalten sollen; A ist dann die Discriminante der gegebenen Gleichung.

Man kann die Gleichung 15) unter Anderem dadurch erhalten, dass man aus den Gleichungen

$$16)\qquad f(x,y)=0,\quad \frac{f(x,y+t)-f(x,y)}{t}=0$$

y eliminirt und in der nur gerade Potenzen von t enthaltenden Resultante $t^2=z$ setzt. Für $z=0$, also auch $t=0$ geht die zweite der Gleichungen 16) in

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0,$$

und die Gleichung 15) in

$$A=0$$

über, so dass $A=0$ die Eliminationsresultante von $f=0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ ist. Bei der obigen Annahme müsste der Gleichung 15) mindestens durch eine Function z von x genügt werden, welche mit allen ihren Ableitungen bis

---

* Die in Rede stehende Discriminante, welche mit der Resultante der beiden Gleichungen $q-1^{ten}$ Grades in Bezug auf y:

$$f'(y)=0 \quad\text{und}\quad qf(y)-yf'(y)=\varphi(y)=0$$

ein constantes Verhältniss hat, lässt sich nämlich als die Determinante des folgenden Systems von $2q-2$ linearen homogenen Gleichungen

$$f'(y)=0,\quad yf'(y)=0,\quad y^2f'(y)=0\ldots y^{q-2}f'(y)=0,$$
$$\varphi(y)=0,\quad y\varphi(y)=0,\quad y^2\varphi(y)=0\ldots y^{q-2}\varphi(y)=0$$

darstellen, aus denen $y^0, y^1, y^2 \ldots y^{2q-3}$ zu eliminiren sind. Die Determinante wird vom $2q-2^{ten}$ Grade in Bezug auf die Coefficienten von $f(y)$, und da diese vom p^{ten} Grade in x sind, so folgt, dass der Grad der Discriminante

$$k=2p(q-1).$$

zur k^{ten} Ordnung incl. für $x = x_0$ verschwindet. Differentiirt man nun die Gleichung 15) $k$mal hinter einander total nach x und setzt in den so erhaltenen Gleichungen

$$x = x_0, \; z = 0, \; z' = 0, \; z'' = 0 \ldots z^{(k)} = 0,$$

so findet man successive

$$A = 0, \; \frac{dA}{dx} = 0, \; \frac{d^2 A}{\partial x^2} = 0 \ldots \frac{d^k A}{dx^k} = 0.$$

Da aber A eine ganze Function von nicht höherem als k^{ten} Grade sein kann, so verschwindet A identisch; folglich haben, wie behauptet, $f(x, y)$ und $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ einen gemeinsamen Factor, die Gleichung 15) besitzt eine oder mehrere der Null gleiche Wurzeln, und demgemäss die Gleichung 1) zwei oder mehrere gleiche Wurzeln für jeden Werth von x.

Wir schliessen daraus, dass, wenn $f(x, y)$ und $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ keinen gemeinsamen Factor haben, man bei successivem Substitutionsverfahren in jedem Falle schliesslich zu einer Gleichung gelangen müsse, in deren zugehöriger Finalgleichung alle etwa vorkommenden endlichen Wurzeln von einander verschieden sind. Man kann auf diese Weise alle möglichen Entwickelungen von y in Reihen, die nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0$ fortgehen, erschöpfen, da jeder in irgend einer Finalgleichung vorkommenden unendlichen Wurzel eine solche Reihe, deren sämmtliche Ableitungen nach x für $x = x_0$ doch endlich sein müssen, nicht entsprechen kann, und in der That, wie später gezeigt wird, eine Entwickelung nach gebrochenen Potenzen von $x - x_0$ entspricht. Man erkennt leicht, dass die Gesammtzahl aller möglichen Entwickelungen von y nach ganzen Potenzen von $x - x_0$ die Zahl n — die Anzahl der Functionen y, die für $x = x_0$ in y_0 übergehen — höchstens erreichen kann, da jede Trennung von endlichen Wurzeln in der einen Finalgleichung, welche eine der Zahl der verschiedenen Wurzeln gleiche Anzahl von Entwickelungen nach ganzen positiven Potenzen ergiebt, zugleich einen mindestens um eben diese Zahl erniedrigten Grad der nächsten Finalgleichung zur Folge hat und der Grad der ersten n nicht übersteigen kann. Die erwähnte Gesammtzahl bleibt im Allgemeinen wegen der in den Finalgleichungen vorkommenden unendlichen Wurzeln unter n und kann auch ganz verschwinden.

Anmerkung. Man erkennt übrigens leicht, dass, wenn es zwei oder mehrere, der Gleichung 1) genügende Functionen giebt, die nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0$ in convergenten Reihen entwickelt werden können, wobei wieder $f(x, y)$ vom p^{ten} Grade in x und vom q^{ten} Grade in y angenommen ist, die bezüglichen Reihen in nicht mehr als den $\frac{k}{2} = p(q-1)$-ersten Gliedern übereinstimmen können, ohne identisch zu sein.

Denn seien y_1, y_2 zwei solche Functionen, deren Reihen in den $\frac{k}{2}+1$-ersten Gliedern übereinstimmten und es sei $y_1 - y_2 = s$, so müssten für $x = x_0$ $s, s', s'' \ldots s^{\left(\frac{k}{2}\right)}$ verschwinden, während die folgenden Ableitungen von s endlich blieben. Nun ist aber $z = s^2$ und

$$\frac{d^{2\lambda} z}{dx^{2\lambda}} = \frac{d^{2\lambda} s^2}{dx^{2\lambda}} = 2 \left\{ s^{(2\lambda)} s + 2\lambda s^{(2\lambda-1)} s' + \frac{2\lambda(2\lambda-1)}{1.2} s^{(2\lambda-2)} s'' + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{2\lambda.(2\lambda-1)\ldots\lambda+1}{1.2.3\ldots\lambda} \cdot \frac{s^{(\lambda)} s^{(\lambda)}}{2} \right\},$$

$$\frac{d^{2\lambda+1} z}{dx^{2\lambda+1}} = \frac{d^{2\lambda+1} s^2}{dx^{2\lambda+1}} = 2 \left\{ s^{(2\lambda+1)} s + (2\lambda+1) s^{(2\lambda)} s' \right.$$
$$+ \frac{(2\lambda+1).2\lambda}{1.2} s^{(2\lambda-1)} s'' + \ldots$$
$$\left. + \frac{(2\lambda+1).2\lambda\ \ldots\lambda+2}{1.2\ldots\lambda} s^{(\lambda+1)} . s^{(\lambda)} \right\}.$$

Hieraus folgt, dass, wenn für $x = x_0$ $s, s', s'' \ldots s^{\left(\frac{k}{2}\right)}$ verschwinden und die folgenden Ableitungen von s endlich bleiben, die Grössen $z, z', z'' \ldots z^{(k)}$ für $x = x_0$ verschwinden, woraus wir wie oben schliessen, dass y_1 und y_2 identisch sind.

5.

Wir setzen von nun an voraus, dass man, wenn die Gleichung 1) gleiche Functionen zu Wurzeln y haben sollte, den gemeinsamen Factor der ganzen Functionen $f(x, y)$ und $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ aufsuche und durch diesen Factor $f(x, y)$ dividire. Der Quotient, gleich Null gesetzt, enthält alsdann dieselben Functionen y wie Gleichung 1), aber als einfache Wurzeln. Diese neue Gleichung untersuchen wir statt der gegebenen, so dass die (reductiblen oder irreductiblen) Gleichungen, mit denen wir es zu thun haben, lauter ungleiche Wurzeln y enthalten, die nur für besondere Werthe von x einander gleich werden.

Indem wir nun zu den Entwickelungen übergehen, welche eintreten, wenn in den Finalgleichungen unendliche Wurzeln vorkommen, nehmen wir den allgemeinen Fall an, dass wir durch successive Anwendung von Substitutionen der oben bezeichneten Art:

$$y = y_0 + (x - x_0) t_1, \quad t_1 = y'_0 + (x - x_0) t_2 \ldots t_{k-1} = \frac{y_0^{(k-1)}}{(k-1)!} + (x - x_0) t,$$

für welche die folgende einzige Substitution gesetzt werden kann:

$$17)\quad y = y_0 + (x - x_0) y'_0 + \ldots + (x - x_0)^{k-1} \frac{y_0^{(k-1)}}{(k-1)!} + (x - x_0)^k t,$$

eine Gleichung

$$\varphi(x, t) = 0$$

zwischen x und t erhalten haben, in welcher dem Werthe $x = x_0$ die mehrfache Wurzel $t_0 = \frac{y_0^{(k)}}{k!}$ entspricht und die Finalgleichung für

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)_0 = \frac{y_0^{(k+1)}}{(k+1)!}$$

eine unendliche Wurzel anzeigt.

Wir erinnern zunächst daran, dass der Grad der Finalgleichung für $\left(\frac{dt}{dx}\right)_0$ nach der in § 3 angestellten Betrachtung in unserem Falle kleiner sein müsse, als die Anzahl β der Werthe t, die für $x = x_0$ einander gleich werden, wo $\beta \leq n$. Dasselbe gilt natürlich auch für den Grad der Finalgleichung für $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0$, der reciproken der ersteren, welche eine oder mehrere Wurzeln $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = 0$ haben wird, deren Anzahl β' demnach um so mehr kleiner als β sein muss. Betrachten wir nun in der Gleichung $\varphi(x, t) = 0$ x als Function von t, so können wir wieder, da wir es jetzt mit endlichen Wurzeln der Finalgleichung für $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0$, nämlich den Nullwerthen von $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0$, zu thun haben, eine ähnliche Reihe von Substitutionen, wie oben, anwenden:

$$18)\quad \begin{cases} x = x_0 + (t - t_0)\,u_1, \quad u_1 = \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 + (t - t_0)\,u_2, \\ \qquad u_2 = \left(\frac{du_1}{dt}\right)_0 + (t - t_0)\,u_3 \text{ u. s. f.}, \\ \text{oder} \\ x = x_0 + (t - t_0)\,u_1, \quad u_1 = \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 + (t - t_0)\,u_2, \\ \qquad u_2 = \frac{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0}{1.2} + (t - t_0)\,u_3 \text{ u. s. f.} \end{cases}$$

Unter der Voraussetzung, dass die ganzen Functionen $\varphi(x, t)$ und $\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x}$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, oder dass, falls ein solcher vorhanden, dieser zuvor durch das erwähnte Verfahren entfernt worden ist, schliesst man, wie vorhin, dass in der Reihe der Finalgleichungen für $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{du_1}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{du_2}{dt}\right)_0$ u. s. f. nicht bis ins Unendliche hin vielfache endliche Wurzeln vorkommen können. Man wird immer zuletzt zu Finalgleichungen geführt, die theils endliche ungleiche, theils unendliche Wurzeln enthalten.

An die ersteren knüpft sich nach dem vorigen Paragraphen eine Reihenentwickelung von x nach ganzen positiven Potenzen von $t-t_0$, die mit x_0 beginnt, woraus man mittels des in § 2 angegebenen Verfahrens $t-t_0$ in eine Reihe nach gebrochenen Potenzen von $x-x_0$ entwickelt. Substituirt man endlich die Reihe für t in dem Ausdrucke 17) für y, so erhält man die gesuchte Reihenentwickelung für y, die ebenfalls nach gebrochenen Potenzen von $x-x_0$ fortschreitet.

Die Berücksichtigung der unendlichen Wurzeln hingegen erfordert, dass man die Reihe der Substitutionen 18) an der betreffenden Stelle abbricht, welche, in eine einzige Substitution zusammengefasst, mit Rücksicht darauf, dass $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0=0$, lautet:

$$x=x_0+\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0\frac{(t-t_0)^2}{1.2}+\ldots+\left(\frac{d^{\lambda-1}x}{dt^{\lambda-1}}\right)_0\frac{(t-t_0)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}+(t-t_0)^\lambda u$$

oder

$$x=x_0+(t-t_0)\,u,$$

falls bereits nach der ersten Substitution in der Finalgleichung der folgenden Gleichung sich unendliche Wurzeln einstellen.

Der Grad β'' der Finalgleichung für $\left(\frac{du}{dt}\right)_0$, welche der Annahme nach unendliche Wurzeln anzeigt, ist nach dem Satze in § 3 niedriger als die Anzahl der Werthe u, die für $t=t_0$ einander gleich werden, d. h. als die Anzahl der gleichen endlichen Wurzeln der vorhergehenden Finalgleichung für $\left(\frac{du_{\lambda-1}}{dt}\right)_0$, welche offenbar β', den Grad der Finalgleichung für $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0$ nicht übersteigen kann. Also $\beta''<\beta'<n$.

Betrachtet man jetzt in der Gleichung zwischen t und u, t als Function von u (wobei wieder das Polynom der Gleichung, falls es mit seiner Ableitung nach t einen gemeinsamen Theiler haben sollte, auf ein anderes zu reduciren ist, das alle Factoren des ersteren, jedoch einfach, enthält), so wird die Finalgleichung für $\left(\frac{dt}{du}\right)_0$ ebenfalls vom Grade β'' sein und die unendlichen Werthe von $\left(\frac{du}{dt}\right)_0$ werden in ebenso viel Nullwerthe von $\left(\frac{dt}{du}\right)_0$ übergehen, der Zahl nach kleiner oder gleich β''. Wenden wir jetzt wiederum eine Reihe von Substitutionen an von der Form

$$t=t_0+(u-u_0)\,v_1,\quad v_1=\left(\frac{dt}{du}\right)_0+(u-u_0)\,v_2,\quad v_2=\left(\frac{dv_1}{du}\right)_0+(u-u_0)\,v_3$$
$$\ldots v_{\mu-1}=\left(\frac{dv_{\mu-2}}{du}\right)_0+(u-u_0)\,v$$

oder

$$t = t_0 + (u-u_0)\,v_1, \quad v_1 = \left(\frac{dt}{du}\right)_0 + (u-u_0)\,v_2, \quad v_2 = \frac{\left(\frac{d^2t}{du^2}\right)_0}{1.2} + (u-u_0)\,v_3$$

$$\ldots v_{\mu-1} = \frac{\left(\frac{d^{\mu-1}t}{du^{\mu-1}}\right)_0}{(\mu-1)!} + (u-u_0)\,v,$$

so werden in den aufeinanderfolgenden Finalgleichungen für

$$\left(\frac{dt}{du}\right)_0, \left(\frac{dv_1}{du}\right)_0, \left(\frac{dv_2}{du}\right)_0 \ldots$$

wieder schliesslich theils endliche einfache, theils unendliche Wurzeln auftreten müssen. Die ersteren ergeben Reihenentwickelungen für t nach ganzen positiven Potenzen von $u-u_0$, mit dem Anfangsgliede t_0, und die unendlichen Wurzeln gehören nach dem öfters erwähnten Satze in § 3 einer Finalgleichung an, deren Grad

$$\beta''' < \beta'' < \beta' < \beta \leqq n.$$

Auf diese Weise überzeugen wir uns leicht, dass wir durch die wiederholte Anwendung der angezeigten Operationen, wenn nicht vorher auf eine Finalgleichung mit lauter ungleichen endlichen Wurzeln, so doch schliesslich auf eine Finalgleichung ersten Grades treffen müssen. In jedem Falle gelangt man also nach dem Obigen durch eine neue Substitution zu einer Gleichung zwischen zwei Variablen p, q, in welcher $q=q_0$ lauter ungleiche endliche Werthe von p entsprechen und demnach p nach ganzen positiven Potenzen von $q-q_0$ entwickelt werden kann.

Die in allen Fällen endliche Reihe von Operationen, die auszuführen sind, lässt sich allgemein durch folgendes Schema einer Reihe von Substitutionen darstellen:

I. $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$ ist endlich

$$19)\quad \begin{cases} y = y_0 + (x-x_0)\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + \frac{(x-x_0)^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 + \ldots + (x-x_0)^k t, \\ x = x_0 + \frac{(t-t_0)^2}{1.2}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0 + \ldots + (t-t_0)^{k'}\, t' \\ \qquad [\text{oder } x = x_0 + (t-t_0)\,t', \text{ wo } t'_0 = 0], \\ t = t_0 + \frac{(t'-t'_0)^2}{1.2}\left(\frac{d^2t}{dt'^2}\right)_0 + \ldots + (t'-t'_0)^{k''}\, t'' \\ \qquad [\text{oder } t = t_0 + (t'-t'_0)\,t'', \text{ wo } t''_0 = 0] \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ t^{(p-1)} = t_0^{(p-1)} + \frac{(t^{(p)}-t_0^{(p)})^2}{1.2}\frac{d^2t^{(p-1)}}{dt^{(p)2}} + \ldots + (t^{(p)}-t_0^{(p)})^{k^{(p+1)}}\, t^{(p+2)} \\ \qquad [\text{oder } t^{(p-1)} = t_0^{(p-1)} + (t^{(p)}-t_0^{(p)})\,t^{(p+1)}, \text{ wo } \\ \qquad t_0^{(p+1)} = 0]; \end{cases}$$

II. $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \infty.$

$$
20) \left\{
\begin{aligned}
& x = x_0 + \frac{(y-y_0)^2}{1.2}\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)_0 + \ldots + (y-y_0)^k \mathfrak{t} \\
& \qquad [\text{oder } x = x_0 + (y-y_0)\,\mathfrak{t}, \text{ wo } \mathfrak{t}_0 = 0], \\
& y = y_0 + \frac{(\mathfrak{t}-\mathfrak{t}_0)^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{d\mathfrak{t}^2}\right)_0 + \ldots + (\mathfrak{t}-\mathfrak{t}_0)^{k'} \mathfrak{t}' \\
& \qquad [\text{oder } y = y_0 + (\mathfrak{t}-\mathfrak{t}_0), \text{ wo } \mathfrak{t}'_0 = 0], \\
& \mathfrak{t} = \mathfrak{t}_0 + \frac{(\mathfrak{t}'-\mathfrak{t}'_0)^2}{1.2}\left(\frac{d^2\mathfrak{t}}{d\mathfrak{t}'^2}\right)_0 + \ldots + (\mathfrak{t}'-\mathfrak{t}'_0)^{k''} \mathfrak{t}'' \\
& \qquad [\text{oder } \mathfrak{t} = \mathfrak{t}_0 + (\mathfrak{t}'-\mathfrak{t}'_0)\,\mathfrak{t}'', \text{ wo } \mathfrak{t}''_0 = 0], \\
& \vdots \\
& \mathfrak{t}^{(p-1)} = \mathfrak{t}_0^{(p-1)} + \frac{(\mathfrak{t}^{(p)}-\mathfrak{t}_0^{(p)})^2}{1.2}\left(\frac{d^2\mathfrak{t}^{(p-1)}}{d\mathfrak{t}^{(p)2}}\right)_0 + \ldots + (\mathfrak{t}^{(p)}-\mathfrak{t}_0^{(p)})^{k^{(p+1)}} \mathfrak{t}^{(p+1)} \\
& \qquad [\text{oder } \mathfrak{t}^{(p-1)} = \mathfrak{t}_0^{(p-1)} + (\mathfrak{t}^{(p)}-\mathfrak{t}_0^{(p)})\,\mathfrak{t}^{(p+1)}, \text{ wo} \\
& \qquad \mathfrak{t}_0^{(p+1)} = 0].
\end{aligned}
\right.
$$

Die Gleichung, die wir in dem einen oder andern Falle zwischen $\mathfrak{t}^{(p)}$ und $\mathfrak{t}^{(p+1)}$ erhalten, ergiebt für $\mathfrak{t}^{(p)} = \mathfrak{t}_0^{(p)}$ lauter ungleiche endliche Werthe von $\mathfrak{t}^{(p+1)}$, und es lässt sich sonach $\mathfrak{t}^{(p+1)}$ in eine oder mehrere Reihen nach ganzen positiven Potenzen von $\mathfrak{t}^{(p)} - \mathfrak{t}_0^{(p)}$ entwickeln.

Ein Blick auf die Gleichungen 19) oder 20) lehrt, dass man durch Einsetzen dieser Reihe für $\mathfrak{t}^{(p+1)}$ successive für $\mathfrak{t}^{(p-1)}$, $\mathfrak{t}^{(p-2)}$ u. s. f. und schliesslich sowohl für x, als für y eine Entwickelung nach ganzen positiven Potenzen von $\mathfrak{t}^{(p)} - \mathfrak{t}_0^{(p)}$ erhält, welche für x mit x_0, für y mit y_0 beginnt.

Setzt man

$$\mathfrak{t}^{(p)} - \mathfrak{t}_0^{(p)} = u,$$

so lauten die Reihen:

$$21) \qquad x = x_0 + (\alpha)\, u^r + (\beta)\, u^{r+1} + (\gamma)\, u^{r+2} + \text{etc.},$$

$$22) \qquad y = y_0 + (\alpha')\, u^s + (\beta')\, u^{s+1} + (\gamma')\, u^{s+2} + \text{etc.},$$

wo $r \leq s$, wenn das Schema 14) gilt, also von einem endlichen Werthe $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$ ausgegangen wird, und $r > s$, wenn das Schema 15) gilt, der Werth von $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$, von dem man ausgeht, also unendlich ist.

Aus der Reihe 21) erhält man durch Umkehrung nach dem in § 2 zu Anfang angegebenen Verfahren u nach ganzen und positiven Potenzen von $(x - x_0)^{\frac{1}{r}}$ entwickelt:

$$u = (a)\,(x - x_0)^{\frac{1}{r}} + (b)(x - x_0)^{\frac{2}{r}} + \text{etc.},$$

und durch Einsetzen dieser Reihe für u in 22) erhält man für y die gesuchte Entwickelung

$$y = y_0 + (A)(x-x_0)^{\frac{s}{r}} + (B)(x-x_0)^{\frac{s+1}{r}} + \text{etc.},$$

und zwar erhält man so viele solcher Reihen, als Entwickelungen von $t^{(p+1)}$ nach Potenzen von $t^{(p)} - t_0^{(p)}$ vorhanden sind. Nur in dem Falle, dass das Schema 14) in Anwendung kommt und dieses mit der ersten Gleichung abschliesst, was eintritt, wenn in der Gleichung zwischen x und t dem Werthe $x = x_0$ lauter ungleiche Werthe von t entsprechen, erhält man y nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0$ entwickelt. In allen übrigen Fällen wird, wie man sich leicht überzeugt, $r > 1$ und es erscheinen demnach in der Entwickelung von y gebrochene Potenzen von $x - x_0$, wie nicht anders zu erwarten, da dann die erste oder eine der folgenden Ableitungen von y nach x für das Werthepaar x_0, y_0 unendlich wird.

Anmerkung 1. Alle Hilfsvariablen $t, t', t'' \ldots t^{(p+1)}$, welche bei den Substitutionen in Anwendung kommen, sind rationale Functionen von x und y, wie leicht daraus erhellt, dass jede derselben in der Gleichung, in der sie zum ersten Male vorkommen, linear auftreten.

Anmerkung 2. Durch die in § 2 angegebene Behandlung einer gewissen Classe von Gleichungen kann obiges Verfahren bedeutend abgekürzt werden, falls man im Verlauf der Substitutionen zu einer Gleichung zwischen $t^{(\mu)}$ und $t^{(\mu+1)}$ gelangen sollte, die zu der in § 2 charakterisirten Classe gehört, $t^{(\mu+1)}$ also in der daselbst angegebenen Weise nach gebrochenen Potenzen von $t^{(\mu)} - t_0^{(\mu)}$, etwa nach ganzen Potenzen von $(t^{(\mu)} - t_0^{(\mu)})^{\frac{1}{m}}$ entwickelt werden könnte. Man darf dann an dieser Stelle die Folge der Substitutionen abbrechen und gelangt durch successives Einsetzen in die vorhergehenden Substitutionsformeln schliesslich für x wie für y ebenfalls zu Entwickelungen nach ganzen positiven Potenzen von $(t^{(\mu)} - t_0^{(\mu)})^{\frac{1}{n}}$. Setzt man nun für diese Grösse die Variable u, so haben die Reihen für x und y die Formen 21) und 22), woraus man, wie oben, die Entwickelung von y nach Potenzen von $x - x_0$ ableitet.

6.

Als Beispiel zur Erläuterung des dargelegten Verfahrens diene die Gleichung, welche Puiseux in Nr. 27 der öfters erwähnten Abhandlung betrachtet hat.

Sie lautet, wenn wir, in Uebereinstimmung mit der bisher gewählten Bezeichnung, für z, u, a, b resp. x, y, x_0, y_0 setzen:

$$\begin{aligned} A(y-y_0)^7 &+ B(y-y_0)^5(x-x_0) + C(y-y_0)^4(x-x_0)^4 \\ &+ D(y-y_0)^2(x-x_0)^5 + E(y-y_0)(x-x^0)^7 \\ &+ F(x-x_0)^9 + G(y-y_0)^8 + H(y-y_0)^4(x-x_0)^5 \\ &+ I(x-x_0)^{10} = 0, \end{aligned} \tag{23}$$

wo die Coefficienten A, B, C, D, E, F von Null verschieden sein sollen.

Für $x=x_0$ erhält man $y=y_0$ als siebenfache Wurzel und es handelt sich um sämmtliche Entwickelungen der Functionen y nach Potenzen von $x-x_0$. Für das Werthepaar $x_0 y_0$ wird sowohl $\frac{\partial f}{\partial x}$ als $\frac{\partial f}{\partial y}$ gleich Null und die Gleichung gehört offenbar nicht zu der in § 2 charakterisirten Classe. Es ist hier also nach der in den folgenden Paragraphen angegebenen allgemeinen Methode zu verfahren.

Darnach haben wir uns zuvörderst die Finalgleichung für $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$ zu bilden; sie ist, wie aus dem einzigen Gliede $B(y-y_0)^5(x-x_0)$ der niedrigsten Dimension des nach den Potenzen von $x-x_0$, $y-y_0$ geordneten Polynoms der Gleichung zu ersehen, vom sechsten Grade und lautet

$$B\left(\frac{dy}{dx}\right)_0^5=0.$$

Es hat demnach $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$ fünf Werthe gleich Null und einen Werth gleich unendlich. [Letzteres ergiebt sich auch aus der reciproken Gleichung für $\left(\frac{dx}{dy}\right)_0$, welche lautet:

$$B\left(\frac{dx}{dy}\right)_0=0.]$$

Berücksichtigen wir zunächst den unendlichen Werth für $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$ und setzen nach 20)

$$x-x_0=(y-y_0)\,t,$$

so liefert uns diese Substitution in 23) nach Abtrennung des gemeinsamen Factors $(y-y_0)^6$ folgende Gleichung zwischen y und t:

$$A(y-y_0)+Bt+C(y-y_0)^2t^4+D(y-y_0)\,t^5+E(y-y_0)^2t^7$$
$$+F(y-y_0)^3t^9+G(y-y_0)^2+H(y-y_0)^3t^5+I(y-y_0)^4t^{10}=0.$$

In dieser Gleichung entspricht dem Werthe $y=y_0$, da B der Voraussetzung nach nicht verschwindet, eine einfache Wurzel $t=0$; folglich lässt sich t in eine convergente Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $y-y_0$ entwickeln von der Gestalt

$$t=-\frac{A}{B}(y-y_0)+(a)_1(y-y_0)^2+(a)_2(y-y_0)^3+\text{etc.},$$

folglich

$$x-x_0=(y-y_0)\,t=-\frac{A}{B}(y-y_0)^2+(a)_1(y-y_0)^3+\text{etc.},$$

woraus man durch Umkehrung nach § 2 erhält:

$$\text{24)}\quad y-y_0+\left(-\frac{B}{A}(x-x_0)\right)^{1/2}+(b_1)\left(-\frac{B}{A}(x-x_0)\right)$$
$$+(b_2)\left(-\frac{B}{A}(x-x_0)\right)^{3/2}+\text{etc.},$$

wo $(b)_1, (b)_2 \ldots$ rational aus x_0, y_0 und den Coefficienten der gegebenen Gleichung 23) zusammengesetzt sind.

Diese Entwickelung von y nach ganzen positiven Potenzen von $(x-x_0)^{1/2}$ stellt zwei Functionen y dar, die cyklisch in einander übergehen.

Was die fünf gleichen Wurzeln $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 0$ betrifft, so erfordern dieselben zunächst die Substitution

$$y - y_0 = (x - x_0)\,t$$

in der Gleichung 23). Es tritt alsdann der Factor $(x-x_0)^6$ heraus und man erhält die Gleichung zwischen x und t:

$$25)\quad \begin{aligned} &A(x-x_0)\,t^7 + Bt^5 + C(x-x_0)^2 t^4 + D(x-x_0)\,t^2 + E(x-x_0)^2 t \\ &\quad + F(x-x_0)^3 + G(x-x_0)^2 t^6 + H(x-x_0)^3 t^4 \\ &\quad + I(x-x_0)^4 = 0. \end{aligned}$$

In dieser Gleichung entsprechen dem Werthe $x = x_0$, wie vorauszusehen war, fünf Wurzeln $t = 0$. Die Glieder der niedrigsten, hier der dritten Dimension sind:

$$D(x-x_0)\,t^2 + E(x-x_0)^2 t + F(x-x_0)^3,$$

woraus als Gleichung für $\left(\frac{dt}{dx}\right)_0$ sich ergiebt:

$$D\left(\frac{dt}{dx}\right)_0^2 + E\left(\frac{dt}{dx}\right)_0 + F = 0,$$

und für den reciproken Werth $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0$:

$$F\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 + E\left(\frac{dx}{dt}\right)_0^2 + D\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = 0.$$

Somit hat $\left(\frac{dt}{dx}\right)_0$ einen unendlichen und zwei endliche Werthe, welche letztere als die beiden Wurzeln der Gleichung

$$D\alpha^2 + E\alpha + F = 0$$

bestimmt sind.

Der Werth $\left(\frac{dt}{dx}\right)_0 = \infty$ erfordert die Substitution $x - x_0 = tz$ in der Gleichung 25), wodurch diese, nach Abtrennung des Factors t^3, übergeht in die Gleichung zwischen z und t:

$$At^5 z + Bt^2 + Ct^3 z^2 + Dz + Ez^2 + Fz^3 + Gt^7 z^2 + Ht^4 z^3 + Itz^4 = 0.$$

Für $t = 0$ erhält man, da D nicht verschwindet, die einfache Wurzel $z = 0$, folglich lässt sich z in eine convergente Reihe nach ganzen positiven Potenzen von t entwickeln, welche, da $\left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = 0$, lautet:

$$z = -\frac{B}{D}t^2 + (a)_1 t^3 + (a_2)\,t^4 + \text{etc.}$$

und hieraus

$$x - x_0 = zt = -\frac{B}{D}t^3 + (a)_1 t^4 + \text{etc.},$$

woraus durch Umkehrung nach § 2 sich ergiebt:

$$t = \left(-\frac{D}{B}(x-x_0)\right)^{1/3} + (b_1)\left(-\frac{D}{B}(x-x_0)\right)^{2/3} + \text{etc.},$$

und da $y - y_0 = (x - x_0)t$, so erhält man endlich

$$26)\quad \begin{aligned} y = y_0 + \sqrt[3]{-\frac{D}{B}}(x-x_0)^{4/3} + (b)_1 \sqrt[3]{\left(-\frac{D}{B}\right)^2}(x-x_0)^{5/3} \\ + (b_2)\cdot\frac{-D}{B}(x-x_0)^2 + \text{etc.} \end{aligned}$$

als zweite Entwickelung von y, fortschreitend nach Potenzen von $(x-x_0)^{1/3}$, die demnach drei cyklisch in einander übergehende Functionen y darstellt. Die Grössen $(b)_1$, (b_2) sind rational aus x_0, y_0 und den Coefficienten der Gleichung 23) zusammengesetzt.

Die Berücksichtigung der beiden endlichen Werthe für $\left(\frac{dt}{dx}\right)_0$ führt zur Substitution

$$t = (x - x_0)\,u$$

in der Gleichung 25), welche dadurch nach Wegschaffung des Factors $(x-x_0)^3$ in folgende Gleichung zwischen x und u umgewandelt wird:

$$27)\quad \begin{aligned} A(x-x_0)^5u^7 + B(x-x_0)^2u^5 + C(x-x_0)^3u^4 + Du^2 + Eu + F \\ + G(x-x_0)^7u^8 + H(x-x_0)^4u^4 + I(x-x_0) = 0. \end{aligned}$$

In dieser Gleichung erhält man für $x = x_0$ als Werthe von u die beiden Wurzeln der Gleichung $Du^2 + Eu + F = 0$, die mit h_1 und h_2 bezeichnet seien. Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. h_1 ist von h_2 verschieden; dann existiren zwei nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0$ fortschreitende Reihen für u, welche für $x = x_0$ resp. die Werthe h_1 und h_2 annehmen:

$$u = h_1 - \frac{I}{2h_1D + E}(x-x_0) + (a)_1(x-x_0)^2 + (a)_2(x-x_0)^3 + \text{etc.},$$

$$u = h_2 - \frac{I}{2h_2D + E}(x-x_0) + (b)_1(x-x_0)^2 + (b)_2(x-x_0)^3 + \text{etc.}$$

Die Coefficienten $(a)_1$, $(a)_2$ ... sind rational aus x_0, y_0, h_1 und den Coefficienten der Gleichung 23) zusammengesetzt, $(b)_k$ entsteht aus $(a)_k$, indem man in $(a)_k$ h_2 an die Stelle von h_1 setzt.

Aus $t = (x-x_0)u$, $y = y_0 + (x-x_0)t$ folgt

$$y = y_0 + (x-x_0)^2 u.$$

Man erhält also für y die beiden Reihen

$$28)\quad y = y_0 + (x-x_0)^2 h_1 - \frac{I}{2h_1D+E}(x-x_0)^3 + (a)_1(x-x_0)^4 + \text{etc.},$$

$$29)\quad y = y_0 + (x-x_0)^2 h_2 - \frac{I}{2h_2 D + E}(x-x_0)^3 + (b)_1 (x-x_0)^4 + \text{etc.},$$

welche nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$ fortschreiten.

Die erhaltenen vier Entwickelungen 24), 26), 28), 29) stellen zusammengenommen die sieben Functionen y dar, die für $x=x_0$ in y_0 übergehen.

2. $h_1 = h_2 = h$. In diesem Falle entsprechen in der Gleichung 27), die wir der Kürze wegen schreiben:

$$\varphi(x, u) = 0,$$

dem Werthe $x=x_0$ zwei gleiche Wurzeln $u=h$.

Ist nun I von Null verschieden, dann ist für $x=x_0$, $u=h$, $\frac{\partial\varphi}{\partial u}=0$, während $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=I$ nicht verschwindet; wir haben demnach den Fall des § 2 und erhalten für u die Reihe

$$u = h + \left(-\frac{I}{D}(x-x_0)\right)^{1/2} + b_1\left(-\frac{I}{D}(x-x_0)\right) + b_2\left(-\frac{I}{D}(x-x_0)^{3/2}\right).$$

$b_1, b_2 \ldots$ sind rational aus x_0, y_0, h und den Coefficienten der Gleichung 23) zusammengesetzt.

Aus $y = y_0 + (x-x_0)^2 u$ folgt

$$30)\quad \begin{aligned} y = y_0 + (x-x_0)^2 h + \sqrt{-\frac{I}{D}}\,(x-x_0)^{5/2} + b_1\left(-\frac{I}{D}\right)(x-x_0)^3 \\ + b_2\left(\sqrt{-\frac{I}{D}}\right)^3 (x-x_0)^{7/2} + \text{etc.} \end{aligned}$$

Diese nach ganzen positiven Potenzen von $(x-x_0)^{1/2}$ fortschreitende Entwickelung, welche zwei cyklisch in einander übergehende Functionen y liefert, tritt hier an die Stelle der beiden Entwickelungen 28) und 29).

Ist endlich $I=0$, dann verschwindet auch $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ für $x=x_0$, $u=h$, und die Finalgleichung für $\left(\frac{du}{dx}\right)_0$ wird vom zweiten Grade; sie lautet

$$D\left(\frac{du}{dx}\right)_0^2 + Bh^5 = 0$$

und liefert für $\left(\frac{du}{dx}\right)_0$ die beiden ungleichen Wurzeln

$$+\sqrt{-\frac{Bh^5}{D}},\quad -\sqrt{-\frac{Bh^5}{D}},$$

und man erhält demnach für u zwei Entwickelungen nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$, von der Gestalt

$$u = h + \sqrt{-\frac{B h^5}{D}}\,(x-x_0) + a_1\,(x-x_0)^2 + a_2\,(x-x_0)^3 + \text{etc}\,,$$

$$u = h - \sqrt{-\frac{B h^5}{D}}\,(x-x_0) + b_1\,(x-x_0)^2 + b_2\,(x-x_0)^3 + \text{etc.},$$

wo die Coefficienten a_k und b_k rational aus x_0, y_0, den Coefficienten der Gleichung 23), h und $\sqrt{-\frac{B}{D}h^5}$ zusammengesetzt sind und b_k aus a_k erhalten wird, indem man das Vorzeichen der Wurzel in das entgegengesetzte umwandelt.

Aus $y = y_0 + (x-x_0)^2 u$ gehen dann die beiden Reihen hervor:

$$31)\quad y = y_0 + (x-x_0)^2 h + \sqrt{-\frac{B}{D}h^5}\,(x-x_0)^3 + a_1\,(x-x_0)^4 + \text{etc.},$$

$$32)\quad y = y_0 + (x-x_0)^2 h - \sqrt{-\frac{B}{D}h^5}\,(x-x_0)^3 + b_1\,(x-x_0)^4 + \text{etc.},$$

die nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$ aufsteigen und hier an die Stelle der Reihen 28) und 29) treten.

Hiermit sind alle möglichen Fälle, welche die Gleichung 23) darbietet, erschöpft.

Die Ergebnisse stimmen mit den von Puiseux a. a. O. gefundenen überein.

Zur Vervollständigung des Obigen wollen wir noch den Fall kurz berühren, wo dem Werthe $x = x_0$ $y = \infty$ entspricht, welcher eintritt, wenn der Coefficient der höchsten Potenz von y in der Gleichung 1) nicht constant ist. Man führt diesen Fall auf den vorigen zurück, indem man $y = \frac{1}{t}$ setzt. In der daraus hervorgehenden Gleichung zwischen x und t wird für $x = x_0$ $t = t_0$, und t lässt sich dann nach dem Obigen in eine nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von $x - x_0$ fortschreitende convergente Reihe entwickeln, welche lauten möge:

$$t = a\,(x-x_0)^{\frac{r}{s}} + b\,(x-x_0)^{\frac{r+1}{s}} + c\,(x-x_0)^{\frac{r+2}{s}} + \text{etc.}$$

Setzt man $(x-x_0)^{\frac{1}{s}} = v$, so ergiebt sich

$$t = \frac{1}{y} = a\,v^r \left\{ 1 + \frac{b}{a}v + \frac{c}{a}v^2 + \text{etc.} \right\},$$

und hieraus

$$y = \frac{1}{a}\,v^{-r} \left\{ 1 + \frac{b}{a}v + \frac{c}{a}v^2 + \text{etc.} \right\}^{-1}.$$

Der mit $\frac{1}{a}v^{-r}$ multiplicirte Ausdruck lässt sich bekanntlich für hinlänglich kleine Werthe von v in eine nach ganzen positiven Potenzen von v aufsteigende convergente Reihe entwickeln, so dass man erhält:

$$y = Av^{-r} + Bv^{-r+1} + Cv^{-r+2} + \text{etc.},$$

und wenn man für v seinen Werth $(x-x_0)^{\frac{1}{s}}$ wieder einsetzt:

$$y = A(x-x_0)^{-\frac{r}{s}} + B(x-x_0)^{\frac{1-r}{s}} + C(x-x_0)^{\frac{2-r}{s}} + \text{etc.}$$

Die Entwickelung von y geht also ebenfalls nach ganzen Potenzen von $(x-x_0)^{\frac{1}{s}}$ fort, beginnt aber mit einer begrenzten Anzahl von negativen Potenzen.

XX.

Ueber die Beziehung der lichtbrechenden Kraft zur chemischen Natur der Körper.

Von

Dr. Mohr in Bonn.

Die lichtbrechende Kraft eines Körpers kann nur bei schiefem Einfall zur Wirkung kommen. Bei senkrechtem Einfall wird der Strahl nicht gebrochen, sondern nur in seiner Geschwindigkeit verändert, und zwar verlangsamt in stärker brechenden und beschleunigt in schwächer brechenden Medien. Hierbei wird die Summe der lebendigen Kraft nicht verändert, sondern nur anders vertheilt, indem bei stärker brechenden Medien ein grösserer Theil auf die Amplitude oder Höhe der Welle und ein kleinerer Theil auf die Länge derselben kommt. Erstere wird senkrecht auf die Richtung des Strahles, letztere parallel demselben gemessen. Die brechende Kraft bei schiefem Auffallen wird durch das Verhältniss des Brechungssinus zu dem Einfallssinus ausgedrückt und dieser Quotient* mit n bezeichnet. Es ist also

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n.$$

Jeder Sinus ist eine Zahl und keine Linie, und der Quotient zweier Zahlen ist wieder eine Zahl. Es zeigt also dieser Brechungsquotient, oder auch kürzer Index genannt, an, wievielmal der eine Körper mehr bricht als der andere. Als Einheit wählt man die atmosphärische Luft. Dieser Index ist das eigentliche Mass des Brechungsvermögens.

Man hat nun versuchsweise und ohne Entwickelung aus der Sache selbst, dafür andere Formeln aufgestellt, und eine sehr früh vorgebrachte, von Laplace in seiner *Mécanique celeste*, *IV*, 236 befürwortete Formel ist

---

* Andere nennen dies Exponent, was mathematisch nicht richtig ist; denn es ist ein wirklicher Quotient.

$\frac{u^2-1}{d}$, wobei d die Dichtigkeit des Körpers ist, und diese Grösse hat man specifisches Brechungsvermögen genannt. Laplace sagt an jener Stelle: „Bezeichnet man mit i das Verhältniss des Sinus des Einfallswinkels zum Sinus des Brechungswinkels, und ist ϱ die Dichtigkeit des Körpers, so stellt $\frac{i^2-1}{\varrho}$ das Brechungsvermögen der verschiedenen Körper in der Natur dar." Eine weitere Begründung ist nicht gegeben und Gilbert (seine Annalen 25, 366) macht dazu die Bemerkung, dass, da Laplace die Begründung der Haarröhrchentheorie endlich geglückt sei, nicht daran zu zweifeln sei, dass die Einwirkung der Körper auf das Licht ebenfalls in unmessbar kleinen Entfernungen stattfinden könne. Biot und Arago eigneten sich diese aus der Emanationstheorie abstammende Ansicht an und sagen dabei: „Wir verstehen hier unter Brechungsvermögen weder die blose Ablenkung des Strahles, noch den Winkel, der diese Ablenkung misst, sondern die gesammte Zunahme des Quadrats der Geschwindigkeit oder der lebendigen Kraft des Lichtes, nachdem es die ganze Einwirkung des durchsichtigen Körpers erlitten hat." Wie wir aber jetzt wissen, nimmt die Geschwindigkeit des Lichtes in stärker brechenden Medien nicht zu, sondern ab, ohne dass die Summe der lebendigen Kraft verändert wird. Auch ist der Brechungsindex n der Quotient zweier Raumgrössen, aber nicht die wirkliche Geschwindigkeit, und deshalb sein Quadrat nicht das Mass der lebendigen Kraft. Zudem verstösst die Annahme einer Zunahme der lebendigen Kraft gegen das Gesetz der Erhaltung der Kraft, und es ist einer der sichersten Beweise der Vibrationstheorie, der auf die Uebereinstimmung der Abnahme der Geschwindigkeit in stärker brechenden Medien mit dem Gesetz der Erhaltung der Kraft gegründet wird. Wir sehen also, dass die Formel $\frac{n^2-1}{d}$ ursprünglich auf einem Satz beruht, der sich nachher als ein Irrthum herausgestellt hat, und es ist zu verwundern, wie trotzdem alle Lehrbücher und Lehrer der Physik einen auf so schwachen Füssen stehenden Satz beibehalten und wieder vorbringen. Müller sagt davon, dass die Formel auf einem Uebereinkommen beruhe, und Landolt (Pogg. 123, 596) nennt sie eine seit langer Zeit vielfach angewandte und auch oft wieder verworfene Formel, und findet sich infolge seiner Versuche veranlasst, an ihre Stelle die Formel $\frac{n-1}{d}$ zu setzen. Man kann dies nun wohl keine mathematische Behandlung mehr nennen, wenn man sich die Wahl zwischen $\frac{n^2-1}{d}$ und $\frac{n-1}{d}$ gestattet.

Betrachten wir nun die zweite Formel, so ist auch hier der Quotient n eine Zahl, die grösser als 1 ist, wenn der Sinus refractionis kleiner ist als

der Sinus incidentiae. Es wird aber das Verhältniss dieser beiden Grössen wesentlich geändert, wenn man von einer derselben die Einheit abzieht. $\frac{5}{3}$ ist nicht mehr $\frac{5-1}{3}$. Der logische Fehler, den man bei der Formel $\frac{n-1}{d}$ begeht, besteht darin, dass man die Einheit von dem Brechungsquotienten abzieht und sie bei der Dichtigkeit d lässt; denn d bezieht sich auf das Wasser als Einheit. Wenn gleiche Volumina von einer Flüssigkeit und von Wasser 5 und 3 Gramm wiegen, so ist das specifische Gewicht der Flüssigkeit $\frac{5}{3}$ und nicht $\frac{4}{3}$, also 1,666 und nicht 1,333. Nennt man den Index von Wasser 1,333, so heisst das soviel, dass der Sinus für die atmosphärische Luft 1 ist; es ist also dieser Index für Wasser eigentlich $\frac{1,333}{1}$. Soll dieses nun durch die Dichtigkeit eines Körpers dividirt werden, so ist diese Dichtigkeit ebenfalls $\frac{d}{1}$, also

$$\frac{1,3311}{1} : \frac{d}{1} = \frac{1,3311}{d} = \frac{n}{d}.$$

Von den Gasen hat man überhaupt nur eins, nämlich die atmosphärische Luft, auf ihre absolute brechende Kraft gegen den leeren Raum untersucht, und diese ist sowohl astronomisch von Delambre, als physikalisch von Biot und Arago zu 0,000294 bestimmt worden. Hier kann von einem Index der Form $\frac{\sin i}{\sin r}$ nicht die Rede sein, weil sonst die brechende Kraft des absoluten Vacuums, die Null ist, gleich 1 gesetzt würde. Vergleicht man dagegen die brechende Kraft der Gase mit atmosphärischer Luft, so tritt die bekannte Formel des Index wieder ein, weil hier der Sinus in der Luft $= 1$ gesetzt wird. Man bestimmt denn auch die absolute brechende Kraft der übrigen Gasarten dadurch, dass man Brechungsverhältniss gegen Luft mit 0,000294 multiplicirt. Da sich zwei Brüche, welche denselben Nenner haben, wie ihre Zähler verhalten, so stellt auch der Brechungsindex mit der vorstehenden Einheit die eigentliche brechende Kraft vor. Ist der Index für Wasser 1,333 und für Flintglas 1,666, so verhalten sich beide wie 1 : 1,25 und nicht wie 333 : 666 oder wie 1 : 2. Die Indices der Gase gegen Luft bezogen sind alle grösser als 1, mit Ausnahme von Sauerstoff und Wasserstoff. Bei diesen würde die Formel $\frac{n-1}{d}$ eine negative Grösse geben, und wenn Gasgemenge ebenso dicht wären wie Luft, so würde die Formel $\frac{n-1}{d} = 0$ werden, während sie $= 1$ angenommen ist. Es folgt daraus, dass die Formel $\frac{n-1}{d}$ keine natürliche Begründung hat und in allen Fällen zu unmöglichen Resultaten führt.

Wir können deshalb als Mass der lichtbrechenden Kraft nur die folgenden zwei Formeln beibehalten:

1. Für die Körper in ihrer natürlichen Beschaffenheit ist

$$n = \frac{\sin i}{\sin r}$$

das eigentliche Mass der lichtbrechenden Kraft, oder der sogenannte Index;

2. die reducirte lichtbrechende Kraft ist die von dem Einfluss der Dichtigkeit befreite und auf eine conventionelle Dichtigkeit, bei Gasen Luft, bei allen anderen Körpern Wasser, bezogene brechende Kraft

$$= \frac{n}{d}.$$

Da nämlich bei Gasen die brechende Kraft proportional mit der Dichtigkeit ist, so befreit man den Index von dem Einfluss der Dichtigkeit, indem man ihn durch die Dichtigkeit oder das specifische Gewicht des andern Körpers dividirt.

Will man die brechende Kraft von Flüssigkeiten gegen Gase vergleichen, so muss die Einheit, da sie bei der absoluten brechenden Kraft fehlt, auch von dem Index der Flüssigkeit wegfallen. Wasser bricht z. B. $\frac{0{,}331100}{0{,}000294} = 1126$ mal so stark als Luft, jedes in seiner natürlichen Dichtigkeit. Da aber Wasser 773 mal so dicht ist als Luft, so ist sein auf die Dichtigkeit der Luft reducirter Index

$$= \frac{0{,}3311}{773} = 0{,}000428,$$

und folglich $\frac{0{,}000428}{0{,}000294} = 1{,}45$ mal so gross als der der Luft, was, wie wir sehen werden, seinem Wasserstoffgehalt zuzuschreiben ist.

Man hat nun tastend versucht, die Beziehung der lichtbrechenden Kraft zur Dichtigkeit durch Formeln auszudrücken, und ist dabei von der Voraussetzung ausgegangen, dass das durch irgend eine der Formeln veränderte Brechungsverhältniss, mit der Dichtigkeit multiplicirt, für alle Dichtigkeiten gleiche Werthe geben solle.

Diese Voraussetzung ist an sich unberechtigt und schliesst aus, dass neben der Dichtigkeit noch ein anderes Moment von Einfluss sein könne. Die Erfahrung hat ergeben, dass durch Erwärmung der Flüssigkeiten die natürlichen Indices abnehmen und, wie sich von selbst versteht, die Dichtigkeiten wegen der Ausdehnung. Aber die Abnahme findet nicht in demselben Verhältnisse statt, sonst würden die Quotienten, weil der Index im Zähler, die Dichtigkeit im Nenner steht, constant bleiben. Man sucht nun nach einer Formel, dass sie constant bleiben. Könnte man die Dichtigkeit einer Flüssigkeit verändern, ohne ihre Temperatur zu verändern, wie man

es bei Gasen kann, so spricht alles dafür, dass, wie bei Gasen, die Indices wie die Dichtigkeiten proportional bleiben würden. Nun kann man aber die Dichtigkeit einer Flüssigkeit nicht anders, als durch Erwärmen verändern, und da bringt man eine neue Molecularbewegung der kleinsten Theilchen hinzu. Da aber eine vermehrte Molecularbewegung nothwendig auch eine grössere Ablenkung des Strahles zur Folge haben muss, so ist Veranlassung, zu vermuthen, dass die reducirten Indices mit der Temperatur wachsen müssen. Nehmen wir das erste, bei Landolt (Pogg. 123, 597) berechnete Beispiel der Propionsäure, so sehen wir aus der dritten Columne μ_a, dass die Indices mit der Temperatur abnehmen. Die Berechnung nach der Formel $\frac{n-1}{d}$ in Columne 6 giebt beinahe gleiche Werthe, und da dies bei mehreren Körpern stattfindet, so sagt Landolt (l. c. S 599): „Für die Folge bleibe ich bei der Formel $\frac{n-1}{d}$!" Dies setzt aber voraus, dass die Richtigkeit der Formel *a priori* bewiesen wäre. Da aber schon das Verlangen eines gleichen Productes für alle Temperaturen ein Postulat ist, was nach obiger Ausführung keine Berechtigung hat, so ist auch die Beweisführung trügerisch.

Berechnen wir nun die reducirten Indices nach der Formel $\frac{n}{d}$, so erhalten wir für Propionsäure, indem wir die dritte Columne durch die zweite dividiren, bei

bei 18° C.	1,3895,	bei 24° C.	1,3962,
„ 20 „	1,3918,	„ 26 „	1,4088,
„ 22 „	1,3951,	„ 28 „	1,4010(?).

Es steigen also die reducirten Indices mit der Temperatur, wie die Theorie es verlangt, und es geht daraus hervor, dass die zunehmende moleculare Bewegung der Wärme den Strahl noch mehr ablenkt, nachdem durch die Formel die Wirkung der Dichtigkeit beseitigt ist.

Nehmen wir noch auf derselben Seite das zweite Beispiel des Alkohols, so sind dessen nach der Formel $\frac{n}{d}$ reducirte Indices

bei 12° C.	1,6933,	bei 22° C.	1,7063,
„ 14 „	1,6959,	„ 24 „	1,7095,
„ 16 „	1,6982,	„ 26 „	1,7118,
„ 18 „	1,6759(?),	„ 28 „	1,7020(?).
„ 20 „	1,7036,		

Es findet also auch hier ein fortwährendes Steigen der auf die Dichtigkeit des Wassers reducirten Indices statt und die zwei Unregelmässigkeiten sind ohne Zweifel Beobachtungsfehlern zuzuschreiben, die auch in den Zahlen der Landolt'schen Tafel, Columne 6, ihren Einfluss zeigen. Die

Formel $\frac{n-1}{d}$ muss schon aus dem Grunde für falsch gehalten werden, weil, nachdem man die Dichtigkeit eliminirt, die hinzugetretene Wärme bei constanten Producten gar keine Wirkung gehabt haben würde. Es ist aber vorauszusehen, dass, wenn man ein Gas bei constantem Volum erwärmt, also ohne Veränderung der Dichtigkeit, dass dann sein Index steigen muss. Dieser Versuch lässt sich mit Flüssigkeiten nicht ausführen, weil sie jedes Prisma sprengen würden.

Eine grössere Abhandlung von Wüllner (Pogg. 133, 1) behandelt ebenfalls die Beziehung des Brechungsexponenten und der Körperdichte ganz auf demselben empirischen Wege unter der Voraussetzung, dass die Producte gleich sein müssten. Das ganze Resultat der mit viel Gelehrsamkeit und noch mehr Sägemehl ausgestatteten Arbeit lässt sich in den wenigen Worten des Verfassers zusammenfassen (l. c. S. 10): „dass die Aenderungen der Brechungsexponenten den Dichtigkeitsänderungen allerdings sehr nahe proportional sind, dass die Abweichungen indess die Beobachtungsfehler überschreiten", mit anderen Worten, dass die auch von Wüllner angenommene Formel $\frac{n-1}{d}$ nicht richtig ist. Er tröstet sich damit, dass das Gesetz der Proportionalität angenähert richtig sei, wie das Mariotte'sche. Das ist aber falsch; denn das Mariotte'sche Gesetz ist, wie überhaupt jedes, absolut richtig, und wenn Störungen dabei vorkommen, so tritt eben ein neuer Umstand hinzu, nämlich theilweise Verdichtung von Gasen auf die Wände der Gefässe, innerhalb welcher das Mariotte'sche Gesetz unverletzt besteht. Wenn ein Planet eine Abweichung von seiner elliptischen Bahn zeigt, so ist dies keine Unrichtigkeit des Gravitationsgesetzes, sondern vielmehr die glänzendste Bestätigung desselben, wenn die störende Ursache erkannt ist. Eine solche störende Ursache tritt auch im vorliegenden Falle durch die vermehrte Molecularbewegung der Theile hinzu, und wenn nun bei den Gasen die Proportionalität der Dichtigkeit und des Brechungsvermögens wirklich durch den Versuch nachgewiesen ist, so ist mit grosser Wahrscheinlichkeit anzunehmen, dass sie auch bei Flüssigkeiten bestehe. Wenn aber, wie der Versuch zeigt, die wirklichen Indices mit der Wärme abnehmen, und wenn sie, auf die Dichtigkeit des Wassers nach der Formel $\frac{n}{d}$ berechnet, zunehmen, so steckt die Proportionalität in diesen steigenden Zahlen, aber beeinflusst durch die nicht zu vermeidende Erwärmung. Diese beiden Dinge würden wir, wie bei den Gasen, getrennt messen können, wenn man Flüssigkeiten durch Druck erhebliche Dichtigkeitsveränderungen geben könnte, ohne dass sich die Planscheiben des Prismas bögen oder die Flüssigkeiten durchdrängen.

Die gemachten Versuche über die lichtbrechende Kraft der Gase stammen von Dulong und sind aus den *Ann. de Chim. et de Physique* 31, 154 in Poggendorff's Annalen 6, 393 übergegangen.

Es hat sich dabei herausgestellt, dass die brechende Kraft eines und desselben Gases proportional der Dichtigkeit desselben ist. Dagegen sind die Brechungsquotienten verschiedener Gase so mannichfaltig verschieden, dass ein Zusammenhang zwischen denselben nicht nachgewiesen werden konnte. Müller stellt in seiner Physik (6. Aufl. 1, 564) die Resultate so zusammen:

1. Zwischen der Dichtigkeit und der brechenden Kraft eines Gases und den entsprechenden Grössen eines andern findet keine Beziehung statt;

2. die brechende Kraft einer Mischung ist die Summe der brechenden Kräfte der gemischten Elemente.

Nr. 2 ist unbestritten richtig, aber eine Beziehung zwischen den beiden Grössen zweier verschiedener Grössen ergiebt sich auch aus der mechanischen Theorie der Affinität.

Die brechenden Kräfte wurden von Dulong durch ein äusserst sinnreiches Verfahren mit grosser Schärfe gemessen. Die unmittelbare Messung der Ablenkung in Theilen des Kreisbogens ist sehr schwierig und ungenau, da die Ablenkungen bei allen Gasen nur wenige Bogenminuten betragen und Theile einer Minute auf dem Limbus nicht scharf abgelesen werden können. Dulong nahm den Satz zu Hilfe, dass bei demselben Gase die brechende Kraft der Dichtigkeit proportional ist. Er brachte nun in dasselbe Prisma von 145° brechender Kante die verschiedenen Gase hinein und veränderte durch Ausfliessenlassen von Quecksilber den Druck so lange, bis alle eine gleiche brechende Kraft zeigten, d. h. bis man im Fernrohr die auf atmosphärische Luft eingestellte Mire wieder im Fadenkreuz hatte, In diesem Falle brauchte er nur das damit communicirende Barometer zu notiren, um die Dichtigkeit des Gases zu erhalten, und dann wurde die brechende Kraft auf die gewöhnliche Spannung von Luft (760^{mm}) berechnet, was nach dem Proportionalitätsgesetz keinem Einwand unterliegt. Die Brechung des Strahles geschieht bei dem ersten Eintreten desselben in die brechende Fläche und von da an geht der Strahl gerade aus. Es ändert also die Dicke des Prismas nichts an dem gewonnenen Resultate.

Um nun die übrigen Beziehungen der brechenden Kräfte zu der Natur der Gase zu finden, müssen wir zuerst die gefundenen Zahlen von dem Einfluss der Dichtigkeit des Gases befreien, und dies geschieht dadurch, dass wir die brechende Kraft durch das specifische Gewicht des Gases dividiren, d. h. dass wir alle Gase auf dieselbe Dichtigkeit bringen. Da möchte sich am besten der Wasserstoff als Einheit empfehlen, weil dann die Atomgewichte in sehr einfacher Beziehung zu dem specifischen Gewichte stehen.

So fand Dulong, dass, wenn die brechende Kraft der Luft als Einheit angenommen wird, der Wasserstoff eine brechende Kraft von 0,470 und

der Sauerstoff von 0,924 besitzt. Zwischen diesen Zahlen ist allerdings keine Beziehung zu erkennen. Nun ist Sauerstoff 16mal so schwer als Wasserstoff; dividiren wir nun die brechende Kraft des Sauerstoffs durch 16, so erhalten wir diejenige, welche er bei derselben Dichtigkeit wie der Wasserstoff hat, $\frac{0,924}{16}$ ist gleich 0,0577, d. h. die brechende Kraft des Sauerstoffs ist bei der Dichtigkeit des Wasserstoffs =0,0577, wenn die des Wasserstoffs = 0,470 ist. Daraus ergiebt sich folgende Tabelle:

A. Namen des Gases.	B. Brechende Kraft, Luft = 1.	C. Specifisches Gewicht, Wasserstoff = 1.	D. $B:C$.
Atmosphärische Luft	1	14,47	0,0691
Sauerstoff	0,924	16	0,0577
Wasserstoff	0,470	1	0,4700
Stickstoff	1,020	14	0,0729
Chlor	2,623	35,5	0,0739
Stickoxydul	1,710	22	0,0777
Stickoxyd	1,030	15	0,0686
Chlorwasserstoff . . .	1,527	18,25	0,0837
Kohlenoxyd	1,157	14	0,0826
Kohlensäure	1,526	22	0,0693
Cyan	2,832	26	0,1090
Oelbildendes Gas . .	2,302	14	0,1650
Sumpfgas	1,504	8	0,1880
Cyanwasserstoff . . .	1,531	13,5	0,1140
Ammoniak	1,309	8,5	0,1540
Schwefelwasserstoff .	2,187	17	0,1290
Schwefligsaures Gas	2,260	32	0,0707
Schwefelkohlenstoff .	5,110	38	0,1346
Aether	5.197	37	0,1400

Die Columne B ist unmittelbar aus Dulong's Abhandlung (Pogg. 6, 408) entnommen, die Columne C enthält die bekannten Dichtigkeiten oder, wenn man will, Moleculargewichte der Gase, gegen Wasserstoff als Einheit.

Die Columne D enthält die zweite Columne durch die Zahlen der dritten dividirt. Sie stellt also die brechende Kraft bei gleicher Dichtigkeit mit dem Wasserstoff dar, ist also von dem Einfluss des specifischen Gewichtes befreit. So wie die Tabelle steht, kann man noch nichts daraus entnehmen

Ordnen wir nun die Gase nach ihrer brechenden Kraft und vergleichen sie mit der des Wasserstoffs = 100, so erhalten wir:

Namen der Gase.	Brechende Kraft aus *D*.	Brechende Kraft, Wasserstoff = 100.
Wasserstoff	0,4700	100
Sumpfgas	0,1880	39,9
Oelbildendes Gas . .	0,1650	35,1
Ammoniak	0,1540	32,8
Aether	0,1400	29,8
Schwefelkohlenstoff .	0,1340	28,5
Schwefelwasserstoff .	0,1290	27,5
Cyanwasserstoff . . .	0,1140	24,3
Cyan	0,1090	23,2
Chlorwasserstoff . . .	0,0837	17,8
Kohlenoxyd	0,0826	17,6
Stickoxydul	0,0777	16,5
Chlor	0,0739	15,7
Stickstoff	0,0729	15,5
Schweflige Säure . .	0,0707	15,04
Kohlensäure	0,0693	14,8
Atmosphärische Luft	0,0691	14,7
Stickoxyd	0,0686	14,6
Sauerstoff	0,0577	12,3

Nun sieht die Sache schon etwas besser aus; man sieht doch, wo und wie. Wir sehen, dass von allen Gasen bei gleicher Dichtigkeit der Wasserstoff die höchste brechende Kraft und der Sauerstoff die kleinste besitzt; wir sehen ferner, dass die Reihe mit Wasserstoffverbindungen anfängt und mit Sauerstoffverbindungen und dem Sauerstoff selbst schliesst. Was schon Newton von festen und flüssigen Körpern wusste, dass die Brennbarkeit die brechende Kraft vermehre, tritt uns hier viel augenfälliger entgegen. Aus der ersten Dulong'schen Tafel liess sich gar nichts entnehmen, weil die sehr abweichende Dichtigkeit der Gase von 1 bis 38 den Zusammenhang verdeckte, während bei festen Körpern das specifische Gewicht nur um Kleinigkeiten variirte, etwa von 1 bis 3. Newton konnte mit Recht erklären, dass der Diamant brennbar sei, weil Schwefel, Bernstein, ätherische Oele ebenfalls das Licht mächtig brachen. Doch jetzt können wir eine weitere Frage an die Natur richten.



Bei einem und demselben Körper ist die brechende Kraft proportional mit der Dichtigkeit desselben. Es folgt daraus, dass das Hinderniss des Strahles, in seiner geraden Bahn fortzugehen, von der Anzahl der in einem unendlich kleinen Theile enthaltenen wägbaren Theilchen abhängt. Bei allen Körpern sind wir durch die mechanische Theorie der Wärme und der Affinität genöthigt, moleculare Bewegungen anzunehmen, die nicht Wärme sind, die aber durch den Act der chemischen Verbindung Wärme werden und als solche austreten. Diese molecularen Bewegungen sind es nun ebenfalls, die neben der Dichtigkeit die Brechung des Strahles bewirken, und zwar, wie die Tabelle zeigt, in dem Sinne, dass die verbrennlichen Körper sich wesentlich vor denen auszeichnen, die wir Verbrenner nennen, wie der Sauerstoff. Da nun die Verbrennlichkeit ganz in demselben Sinne wirkt, wie die Dichtigkeit, so können wir mit Recht schliessen, dass die verbrennlichen Körper mehr Schwingungen machen, als die Verbrenner, und, da diese selbst am wenigsten brechen, dass von allen Körpern der Sauerstoff die wenigsten, der Wasserstoff die meisten Schwingungen mache. Darauf beruht auch der von mir aufgestellte Begriff der Affinität, der in nichts Anderem besteht, als in der Verschiedenheit der Molecularbewegungen. Die Verbindungs- oder Verbrennungswärme ist nichts Anderes, als diejenige Summe lebendiger Kraft, welche disponibel wird, wenn zwei Atome verschiedener Art sich in der Art vereinigen, dass sie nachher gemeinschaftlich gleich viele und gleich grosse Schwingungen machen. Die veränderten Eigenschaften der neuen Verbindung gegen die der Elemente zeigen immer, wenn Wärme eingetreten ist, grössere Feuerbeständigkeit, geringere Schmelzbarkeit und Flüchtigkeit. Es folgt nun daraus, dass diejenigen Molecularbewegungen, welche vorher nicht Wärme waren, dennoch denselben Einfluss auf die Eigenschaften der Elemente hatten, wie die Wärme selbst.

Obschon dies thatsächlich klar vor Augen liegt, so hat diese Ansicht bei den Chemikern, selbst in mehreren Jahren nach ihrer öffentlichen Mittheilung und Begründung, noch keine Theilnahme gefunden. Der Grund ist bei Denjenigen, welche sich mit dem Satze beruhigen, dass bei jeder chemischen Verbindung Wärme entsteht, einleuchtend. Abgesehen davon, dass dieser Satz nicht wahr ist, da es auch chemische Vorgänge giebt, wobei Wärme verbraucht wird, und wo nun das neue Product leichter schmelzbar und flüchtiger ist, als das Mittel der Bestandtheile, enthält dieser Satz gar keine Erklärung, sondern ist nur eine einseitig aufgefasste Erfahrung.

Wir wollen nun zu den Resultaten unserer letzten Tafel zurückkehren, welche dadurch so belangreich sind, dass sich die Gase in verschiedener Dichtigkeit herstellen lassen. Bei flüssigen und festen Körpern ist dies nicht der Fall; allein es ist mit der grössten Sicherheit anzunehmen, dass, wenn sie sich in ungleicher Dichte durch Compression darstellen liessen, das brechende Vermögen ebenfalls der Dichtigkeit ganz proportional sein würde.

Bei Flüssigkeiten und festen Körpern wird die Bedeutung der Brennbarkeit durch das verschiedene specifische Gewicht vielfach verdeckt. So ist z. B. der Brechungsquotient des Wassers 1,336 und des Aethers 1,358. Daran kann man nicht erkennen, dass der Aether sehr brennbar, das Wasser aber gar nicht brennbar ist. Befreien wir aber beide Zahlen von der Dichtigkeit, indem wir sie durch ihre specifischen Gewichte dividiren, so erhalten wir für Wasser $\frac{1,333}{1}$ und für Aether $\frac{1,358}{0,736} = 1,84$, d. h. bei Dichtigkeit des Aethers gleich jener des Wassers würde er den Brechungsquotienten 1,84 haben, und darin ist die Brennbarkeit sehr gut zu erkennen.

Zunächst ergiebt sich die grosse Verwandtschaft des Wasserstoffs zum Sauerstoff daraus, weil der Wasserstoff 100 Schwingungen macht, während der Sauerstoff nur 12,3 macht. Da wir in dieser Tafel die Wirkung der Dichtigkeit eliminirt haben, so kann der Rest des Brechungsvermögens nur auf die Zahl der Molecularschwingungen bezogen werden. Es folgt daraus, dass die Verbrennung des Wasserstoffs mit Sauerstoff die höchste Temperatur und absolut die grösste Wärmemenge ausgeben muss gegen jede andere Gasart. Zunächst kommt nun das Sumpfgas. Dass dies weniger Wärme ausgiebt, als seine Bestandtheile vor der Verbindung, liegt in dem Umstande, dass der Wasserstoff im Sumpfgas nur halb soviel Volum einnimmt, als im freien Zustande, d. h. dass er mit weniger lebendiger Kraft begabt ist. Da die brechende Kraft des Sumpfgases nur 39,9 Proc. von der des Wasserstoffs beträgt, so folgt daraus, dass es eine kleinere Zahl Schwingungen als dieses macht, und daher auch seine kleinere Wärmeentwickelung bei Verbrennung. Die Wirkung des Wasserstoffs ergiebt sich ferner aus dem Umstande, dass Cyanwasserstoffsäure noch oberhalb dem Cyan steht, Kohlensäure steht unter schwefliger Säure, weil sie nahe 73 Proc., die schweflige Säure nur 50 Proc. Sauerstoff enthält, und weil die schweflige Säure noch oxydirbar ist, die Kohlensäure aber nicht. Es ist ferner einzusehen, dass die uns unbekannten Wärmeverhältnisse bei der Bildung von Salpetersäure mit einer gewissen Wärmeentwickelung verbunden sein müssen, weil zwei permanente Gasarten dabei ihren Gaszustand verloren haben. Diese Wärmeentwickelung dürfte aber nicht gross sein, weil Stickstoff und Sauerstoff sich ziemlich nahe stehen.

Suchen wir nun ähnliche Beziehungen bei flüssigen und festen Körpern und nehmen aus der grossen Zahl von bekannten Brechungsquotienten nur einige heraus. Letztere sind theils aus Müller-Pouillet, Physik, theils aus dem Anhange zu Beer's höherer Optik entnommen.

A. Namen des Körpers.	B. Brechungsquotient.	C. Specifisches Gewicht.	D. $\frac{B}{C}$ oder Brechungsquotient bei der Dichtigkeit des Wassers.
Wasser	1,336	1	1,336
Crownglas	1,533	2,535	0,605
Alkohol, abs.	1;372	0,794	1,713
„ von 0,815 . . .	1,367	0,815	1,676
Ammoniak	1,35	0,898	1,510
Schwefelsäurehydrat . .	1,438	1,83	0,786
Ol. Caryophyll.	1,535	1,034	1,484
„ Lavendul.	1,457	0,948	1,56
„ Terebinth.	1,545	0,872	1,77
Aceton ($C_3 H_3 O$)	1,3591	0,814	1,67
Diamant.	2,270	3,5	0,649
Aether	1,358	0,736	1,84
Alaun	1,457	1,753	0,831
Benzol	1,500	0,85	1,77
Bergkrystall	1,562	2,654	0,59
Anisöl.	1,811	0,9857	1,836
Cassiaöl.	1,641	1,035	1,58
Schwefelkohlenstoff . .	1,680	1,272	1,32

Ordnen wir nun diese Körper nach den Zahlen der Columne D, so erhalten wir:

Namen.	Auf die Dichtigkeit des Wassers reducirter Index.	Namen.	Auf die Dichtigkeit des Wassers reducirter Index.
Aether	1,84	Ol. Caryophyll. . . .	1,484
Anisöl	1,836	Wasser	1,336
Ol. Terebinth. . . .	1,77	Schwefelkohlenstoff	1,320
Benzoe	1,77	Alaun	0,831
Alkohol, abs.	1,71	Schwefelsäurehydr.	0,786
„ von 0,815 .	1,676	Diamant	0,648
Aceton	1,67	Crownglas	0,605
Cassiaöl.	1,58	Bergkrystall	0,590

Diese Zahlen stellen die brechende Kraft der Körper von der Dichtigkeit befreit vor, oder, richtiger gesagt, auf die Dichtigkeit des Wassers bezogen. Die höchste brechende Kraft besitzen die wasserstoffreichen und sauerstoffarmen Körper, Aether, Alkohol, Benzol, ätherische Oele. Die Wirkung des Wasserstoffs giebt sich selbst im Wasser, Alaun und im Schwefelsäurehydrat zu erkennen. Drei ganz wasserstofffreie Körper, Diamant, Crownglas, Bergkrystall, stehen am tiefsten, und hier würde man dem Diamant nicht mehr die Verbrennbarkeit ansehen. Dagegen tritt sie noch sichtbar hervor, wenn man ihn mit einem Glase von demselben specifischen Gewichte vergleicht. Am nächsten steht dem specifischen Gewichte des Diamants ein Flintglas von Guinand mit Borsäure. Dasselbe hat eine Dichtigkeit von 3,559 und einen Brechungsquotienten von 1,699*, während der Diamant bei der Dichtigkeit 3,5 den Quotienten 2,27 hat. Der Sauerstoffgehalt des Glases drückt den Brechungsquotienten herunter und der Kohlenstoff, obgleich brennbar, kann ihn nicht so sehr erhöhen, als der Wasserstoff selbst im Wasser und der Schwefelsäure es thut.

Der auf die Dichtigkeit 1 reducirte Brechungequotient des Diamantes ist 0,649 und des Guinand'schen Glases 0,478. Der Diamant steht höher als alle oxydirten Körper, die keinen Wasserstoff enthalten. Ferner zeigt uns auch der Schwefelkohlenstoff, welcher mit seinem Brechungsquotienten 1,32 noch unter dem Wasser steht, dass gerade der Wasserstoff von allen Körpern die grösste Molecularbewegung besitzt, indem er mit dem entgegengesetzt wirkenden Sauerstoff im Wasser noch immer einen stärkern Quotienten bedingt, als die beiden brennbaren Körper im Schwefelkohlenstoff.

Hieran schliesst sich sehr nahe eine Betrachtung über die Entbehrlichkeit und Nichtexistenz des sogenannten optischen Aethers. Bekanntlich beruht seine Annahme nur auf einer Hypothese und ein eigentlicher Beweis für seine Existenz ist noch niemals erbracht, selbst nicht einmal versucht worden. Der Aether soll die Bewegung des Lichtes aufnehmen und fortpflanzen können. Bis jetzt kennen wir als Träger einer jeden Bewegung nur ponderable Körper, und was nicht Körper ist, kann eine Bewegung weder aufnehmen, noch übertragen. Der Schall ist eine Bewegung der Luft, der elektrische Strom die eines Drahtes; die Wärme haftet nur an Körpern, und die chemische Molecularbewegung erst recht. Die Elasticität der Körper ist diejenige Eigenschaft, welche sie fähig macht, die kleinsten Schwingungen aufzunehmen und zu vermitteln. Der optische Aether soll kein Körper sein, denn sonst würde er ponderiren und sich in unserer Atmosphäre angehäuft finden; ihm theilt man alle Eigenschaften zu, welche die Körper selbst besitzen. Wenn ein Krystall des nicht regulären Systems

---

* Aug. Beer, Höhere Optik, S. 414.

das Licht in zwei verschiedenen Richtungen anders bricht, so soll er zweierlei Arten Aether enthalten, während wir an ihm nachweisen können, dass seine Härte, seine Elasticität in zwei verschiedenen Richtungen eine andere ist. Dass es nun mehr als einen Aether giebt, ist an sich schon eine grosse Schwierigkeit, die damit verglichen werden kann, wenn wir mehrere Sauerstoffe oder Wasserstoffe annehmen wollten.

„Um die Erscheinung der Brechung zu erklären", sagt Eisenlohr (Physik, 7. Aufl., S. 230), „nimmt man an, dass sich in jedem Körper der Aether in einem Zustande von grösserer Dichte befinde, als im leeren Raume, dass aber seine Elasticität darum nicht im gleichen Verhältniss mit der Dichte zugenommen." Das ist uns jetzt ganz erklärlich, weil man die chemische Beschaffenheit hierbei ausser Acht lässt, deren grossen Einfluss wir oben nachgewiesen, und man gestattet die durch Nichts begründete Annahme, dass der Aether nicht im Verhältniss der Dichtigkeit zusammengezogen sei. Ebenso ist Müller genöthigt, den allgemeinen Satz, dass beim Uebergange des Lichtes aus einem dünneren in ein dichteres Medium der Strahl dem Perpendikel zugelenkt werde, doch wieder zu durchlöchern, indem Benzol stärker breche, als Wasser, und dennoch weniger dicht sei. Alle diese Unbegreiflichkeiten werden natürlich dem Aether zur Last gelegt, der sich in jedem Falle gefallen lassen muss, so zugerichtet zu werden, dass er den Bedingungen entspricht.

Aus dem Umstande, dass die brechende Kraft bei Gasen proportional der Dichtigkeit ist, schliesst man mit Recht, dass der Lichtstrahl, wenn er in ein dichteres Gas tritt, einen Widerstand findet, welcher der Dichtigkeit proportional ist. Er wird an der schiefen Fläche nicht nur abgelenkt, sondern es wird auch seine Geschwindigkeit vermindert. Das Brechungsverhältniss ist dem constanten Verhältniss der Geschwindigkeiten gleich, mit welchem das Licht aus dem leeren Raume in einem dichteren Körper fortgeht. Allein wie wir gesehen haben, ist dies bei verschiedenen Gasen nicht zureichend, sondern es muss auch die chemische Natur des Gases in Anrechnung gebracht werden. Wir finden, dass die verbrennlichen Stoffe viel mehr Schwingungen machen, als die Verbrenner, und indem wir hier nun noch die Verbrennungswärme hinzuziehen, kommen wir zu dem merkwürdigen Resultate, dass die Verbrennungswärme um so grösser ist, je mehr die absoluten brechenden Kräfte von einander verschieden sind, und wir leiten diese Verbrennungswärme davon ab, dass um so mehr Molecularbewegung als Wärme austreten muss, je verschiedener diese Körper in ihrem reinen Zustande in ihrer Molecularbewegung und ihrem Brechungsvermögen von Haus aus sind. In der neuen Verbindung machen beide Stoffe gleich viel und gleich grosse Schwingungen, während sie vorher ungleich grosse und ungleich viele machten. Dass aber in den Stoffen solche Molecularbewegungen liegen, geht aus der Verbrennungswärme hervor, die nicht aus Nichts entstehen kann, und dazu

kommt noch der optische Beweis, dass die verbrennlichen Körper mehr Schwingungen machen, weil sie den Strahl am meisten ablenken.

Es liegt ein Zusammenhang in der ganzen Natur, der unsere Bewunderung in Anspruch nimmt, wenn es gelingt, irgend ein verborgenes Verhältniss aufzuklären. Alles steht in nothwendigem Zusammenhange. Welche Beziehung besteht zwischen dem Brechungsquotienten von Wasserstoff und Sauerstoff und ihrer Verbrennungswärme? Sie liegt jetzt offen vor uns. Die ganze ungeheure Reihe der chemischen Verbindungserscheinungen beruht auf Ausgleichung verschiedenartiger Bewegungen. Hier bleibt uns gar keine Stelle mehr für den optischen Aether. Wenn der Wasserstoff verbrennt, was wird aus seinem Aether? Verbrennt er mit, tritt er aus oder steckt er in dem gebildeten Wasser? Es wird wohl Niemand den Muth haben, auf diese Fragen eine Antwort zu versuchen. Es hat sich auch noch Niemand darüber Sorge gemacht, was aus den drei Aetherarten wird, die im triklinischen Schwefel stecken, wenn er zu schwefliger Säure verbrennt oder zerrieben wird. Der optische Aether findet in der ganzen Natur keine Stelle, wenn er weder Bewegung, noch Stoff ist. Ihn als ein „äusserst feines Fluidum" zu bezeichnen, was alle Körper durchdringt, dürfte für einen denkenden Menschen nicht mehr ausreichen. Es giebt nur Stoffe, die nennen wir Elemente, und Bewegungen, die nennen wir Massenbewegung, Licht, Wärme, elektrischer Strom etc.

Es liegen uns die schon erwähnten umfangreichen und mit grosser Sorgfalt ausgeführten Arbeiten von Landolt* über die Brechungsexponenten von 36 Flüssigkeiten vor, aus welchen wir das Material entnehmen können, um die eben entwickelten Sätze zu prüfen. Wir benutzen nur denjenigen Index, welcher sich auf die rothe Wasserstofflinie α bezieht und in der Landolt'schen Tafel mit μ_α bezeichnet ist, und bei der Temperatur 20° C. Der auf die Dichtigkeit des Wassers reducirte Index wird erhalten, wenn man den natürlichen Index durch das specifische Gewicht dividirt. In der folgenden Tafel enthält die erste Columne den Namen, die zweite die Formel, die dritte das Atomgewicht des Körpers. Die vierte zeigt dann den reducirten Index, die fünfte den Procentgehalt an Wasserstoff, die sechste an Sauerstoff.

* Pogg. 117, 353; 122, 545; 123, 595.

Namen.	Formel $C=6$ (HO).	Atom-gewicht.	Index bei dem spec. Gewicht 1 = Wasser.	Procente Wasserstoff.	Procente Sauerstoff.
1. Ameisensäurehydr.	$C_2 H O_3, HO$	46	1,121	4,34	69,6
2. Essigsäurehydrat .	$C_4 H_3 O_3, HO$	60	1,303	6,67	53,33
3. Propionsäurehydr.	$C_6 H_5 O_3, HO$	74	1,390	8,11	43,20
4. Buttersäurehydrat	$C_8 H_7 O_3, HO$	88	1,452	9,09	36,3
5. Valeriansäurehydr.	$C_{10} H_9 O_3, HO$	102	1,505	9,804	31,37
6. Capronsäurehydrat	$C_{12} H_{11} O_3, HO$	116	1,525	10,34	27,6
7. Oenanthylsäureh. .	$C_{14} H_{13} O_3, HO$	130	1,546	10,77	24,61
8. Methylalkohol . . .	$C_2 H_4 O_2$	32	1,666	12,5	50
9. Aethylalkohol* . .	$C_4 H_6 O_2$	46	1,698	13,04	34,8
10. Propylalkohol . . .	$C_6 H_8 O_2$	60	1,715	13,33	26,66
11. Butylalkohol . . .	$C_8 H_{10} O_2$	74	1,726	13,52	21,6
12. Amylalkohol . . .	$C_{10} H_{12} O_2$	88	1,728	13,63	18,2
13. Essigs. Methyloxyd	$C_6 H_6 O_4$	74	1,501	8,11	43,3
14. Ameisensaures Aethyloxyd	$C_6 H_6 O_4$	74	1,495	8,11	43,3
15. Essigsaur. Aethyloxyd	$C_8 H_8 O_4$	88	1,519	9,09	36,4
16. Buttersaur. Aethyloxyd	$C_{12} H_{10} O_4$	102	1,545	9,81	31,4
17. Valeriansaures Methyloxyd	$C_{12} H_{12} O_4$	116	1,581	10,34	27,6
18. Ameisens. Amylox.	$C_{12} H_{12} O_4$	116	1,583	10,34	27,6
19. Valerians. Aethyloxyd	$C_{14} H_{14} O_4$	130	1,608	10,76	24,61
20. Essigsaur. Amylox.	$C_{14} H_{14} O_4$	130	1,634	10,77	24,61
21. Valerians. Amylox.	$C_{20} H_{20} O_4$	172	1,642	11,62	18,6
22. Aldehyd	$C_4 H_4 O_2$	44	1,703	9,09	36,4
23. Valeral	$C_{10} H_{10} O_2$	86	1,734	11,6	18,6
24. Aceton	$C_6 H_6 O_2$	58	1,711	10,34	27,6
25. Aethyläther	$C_8 H_{10} O_2$	74	1,885	13,5	21,6
26. Essigsäureanhydrid	$C_4 H_3 O_3$	51	1,281	5,88	47

* Das von Landolt angenommene specifische Gewicht von 0,8011 stimmt nicht mit anderen Versuchen überein, welche 0,794 geben.

Namen.	Formel $C=6\,(HO)$.	Atom-gewicht.	Index bei dem spec. Gewicht 1=Wasser.	Procente Wasserstoff.	Procente Sauerstoff.
27. Aethylenalkohol .	$C_4H_6O_4$	62	1,285	9,68	51,6
28. Zweifach essigsaures Aethylen . . .	$C_{12}H_{10}O_8$	146	1,225	6,85	43,9
29. Glycerin	$C_6H_8O_6$	92	1,165 (HO?)	8,69	39,2
30. Milchsäure	$C_6H_6O_6$	90	1,158	6,66	53,4
31. Phenylsäure	$C_{12}H_6O_2$	94	1,440	6,38	17
32. Bittermandelöl . .	$C_{14}H_6O_2$	106	1,470	5,66	15,1
33. Salicylige Säure .	$C_{14}H_6O_4$	122	1,338	4,92	26,2
34. Methylsalicylsäure	$C_{16}H_8O_6$	152	1,294	5,26	31,6
35. Benzoesaur. Methyl	$C_{16}H_8O_4$	136	1,389	5,88	23,5
36. Benzoesaur. Aethyl	$C_{18}H_{10}O_4$	150	1,431	6,67	21,4

Die ersten 21 Nummern sind zufällig schon nach dem steigenden Index und Wasserstoffgehalt bei den homologen Gruppen 1 bis 7, 8 bis 12 und 13 bis 21 geordnet. Wir wollen nun auch die 15 letzten Nummern von 22 an nach dem steigenden Index ordnen, da viele nicht auf einander bezügliche Stoffe darin enthalten sind. Die Reihe würde dann sein:

Namen.	Auf das specifische Gewicht 1 reducirter Index.	Procente Wasserstoff.	Procente Sauerstoff.
Milchsäure	1,158	6,66	53,6
Glycerin	1,165 (?)		
Zweifach essigsaures Aethylen	1,225	6,85	43,9
Essigsäureanhydrid	1,281	5,88	47
Aethylenalkohol	1,285	9,68	51,6
Methyl-Salicylsäureäther . . .	1,294	5,26	31,6
Salicylige Säure	1,338	4,92	26,2
Benzoesaures Methyl	1,389	5,88	23,5
Benzoesaures Aethyl	1,431	6,67	21,4
Phenylsäure	1,440	6,38	17
Bittermandelöl	1,470	5,66	15,1
Aldehyd	1,703	9,09	36,4
Aceton	1,711	10,34	27,6
Valeral	1,734	11,6	18,6
Aether	1,835	13,5	21,6

Betrachtet man die Bedeutung dieser Zahlen in welchen der Brechungsindex auf die Dichte des Wassers reducirt ist, so ergiebt sich Folgendes:

1. Der Brechungsindex steigt regelmässig mit dem Gehalt an Wasserstoff und sinkt mit dem Gehalt an Sauerstoff.

   Die Ameisensäure mit dem kleinsten Gehalt an Wasserstoff (4,34 Proc.) und dem grössten an Sauerstoff (69,6 Proc.) hat den kleinsten Index mit 1,121; dann steigt er ohne Unterbrechung bis zum Oenanthylsäurehydrat (1,546). Ebenso steigt der Procentgehalt an *H* und nimmt ab jenes an *O* ab.

2. Wenn ein Körper Hydratwasser enthält, so wirkt sein Wasserstoff weniger erhöhend, als wenn dieselbe Menge Wasserstoff direct mit dem Körper verbunden ist. Z. B.

   Propionsäurehydrat mit 8,11 Proc. *H* und 43,2 Proc. *O* hat den Index 1,390; dagegen essigsaures Methyloxyd und ameisensaures Aethyloxyd, welche dieselben Procente beider Elemente haben, zeigen die Indices 1,501 und 1,495, welche Zahlen wahrscheinlich gleich sein sollen.

   Capronsäurehydrat hat 1,525, dagegen valeriansaures Methyl 1,581 und ameisensaures Amyl 1,583.

   Oenanthylsäurehydrat hat 1,546, dagegen valeriansaures Aethyl 1,608 und essigsaures Amyl 1,634.

Ebenso ist das specifische Gewicht derjenigen Verbindungen, welche Hydratwasser enthalten, jedesmal höher, als das der isomeren Verbindungen ohne Hydratwasser.

Beispiele:

Propionsäurehydrat	specifisches	Gewicht	= 0,9963,
essigsaures Methyloxyd	„	„	= 0,9053,
ameisensaures Aethyloxyd	„	„	= 0,9078;

ferner zusammengehörig:

Capronsäurehydrat	„	„	= 0,9252,
valeriansaures Methyloxyd	„	„	= 0,8809,
ameisensaures Amyloxyd	„	„	= 0,8816;

drittens:

Oenanthylsäurehydrat	„	„	= 0,9175,
essigsaures Amyloxyd	„	„	= 0,8374.

Es geht daraus hervor, dass das Wasser, bereits fertig gebildet, eine innigere Verbindung ist, als die des Wasserstoffs in organischen Körpern, worin kein fertiges Wasser enthalten ist. Sein Wasserstoff hat bei der Verbindung zu Wasser mehr chemische Bewegung verloren (34462 W.E.), als in dem organischen Stoffe, deswegen lenkt er den Strahl weniger ab und

nimmt einen kleineren Raum ein, d. h. die Verbindung hat grösseres specifisches Gewicht. Die sogenannte moderne Chemie, welche ohne jeden inneren Grund den Wassergehalt der Hydrate leugnet und seine Elemente jenen des Körpers gleichstellt und hinzufügt, sollte sehr befriedigt sein, in den physikalischen Beziehungen dieser Körper einen Anhalt zu finden, um ihre eigenen Anschauungen zu berichtigen. So, wie aber die Sache jetzt steht, wo die modernen Chemiker eine Coterie bilden, die unter sich gewisse willkürliche Conventionen angenommen hat, die sie für „Errungenschaften" ausgiebt, ist wenig Aussicht vorhanden, dass eine vorurtheilsfreie Betrachtung Eingang gewinne.

Die zweite Reihe, von Nr. 22 an, beginnt mit vier neutralen Stoffen, bei denen der Wasserstoffgehalt abnimmt und der Sauerstoff zunimmt. In demselben Sinne fällt auch der Index. Der Aether mit dem grössten Wasserstoffgehalt der ganzen Reihe (13,5 Proc.) hat den höchsten Index 1,885, und die Milchsäure mit dem grössten Sauerstoffgehalt von 53,6 Proc. hat den kleinsten 1,165. Dass die Milchsäure einen kleineren Index hat als Wasser (1,3311), erklärt sich daraus, dass sie weniger Wasserstoff (6,66 gegen 11 Procent) enthält. Da, wo der Wasserstoffgehalt zugleich mit dem Index fällt, zeigt sich ein starkes Steigen des Sauerstoffs. Z. B. Methyl-Salicylsäure hat 5,26 Proc. *H* mit dem Index 1,294, und Aethylen-Alkohol mit 9,68 Procent *H* hat 1,285, dagegen 51,6 Proc. Sauerstoff gegen 31,6 Proc. des ersteren. Bei gleichem Wasserstoffgehalt, wie benzoesaures Methyl und Essigsäureanhydrid, (5,88 Proc.) giebt der Sauerstoff allein den Ausschlag, nämlich benzoesaures Methyl hat 1,389 bei 23,5 Proc. Sauerstoff, und Essigsäureanhydrid 1,225 bei 43,9 Proc. Sauerstoff.

Schon Landolt (Poggend. 117, 384) hatte aus seinen Versuchen den Schluss gezogen, dass die Brechungsindices der homologen Säuren mit steigender Zahl der Kohlenstoff- und Wasserstoffatome zunehme, und es ist dies eine Bestätigung der schon von Newton angenommenen grossen brechenden Kraft der brennbaren Körper. Dagegen musste ihm das Verhalten der Ameisensäure als eine Ausnahme erscheinen, weil sie bei einem kleineren Gehalt an Kohlenstoff und Wasserstoff einen ebenso grossen Brechungsindex zeigte, als die Essigsäure, nämlich 1,36927 gegen 1,36928, und bei der β Wasserstofflinie ist der Unterschied nur 0,00005, eine Grösse, die nicht mehr gemessen werden kann. Da aber bei dieser Vergleichung keine Rücksicht auf die Dichtigkeit der Stoffe genommen ist und ihr specifisches Gewicht zwar mitgetheilt, aber nicht benutzt ist, so kann auch die ausnahmsweise Stellung der Ameisensäure noch nicht feststehen. Ich habe schon oben nachgewiesen, dass das specifische Gewicht mit dem Sauerstoffgehalt steigt, und es ist deshalb das hohe specifische Gewicht der Ameisensäure von 1,2211 genügend in ihrem Gehalte von 69,6 Proc. Sauerstoff begründet. Ebenso habe ich schon nachgewiesen, dass man die brechende Kraft eines Körpers nur bei gleicher Dichte vergleichen könne.

Reducirt man die Indices auf die Dichte des Wassers, so wird der der Ameisensäure 1,121 und der Essigsäure 1,303, wo dann die scheinbare Ausnahme wegfällt.

Das Wasser selbst hat einen so kleinen Index (1,33111) mit seinen 88,9 Proc. Sauerstoff, dem höchsten überhaupt bekannten Sauerstoffgehalt, und unter den von Landolt gemessenen ist nur einer noch kleiner, nämlich von Aldehyd (1,32975), aber bei Berücksichtigung seines specifischen Gewichtes von 0,781 steigt er auf 1,703. Versuche mit comprimirten Flüssigkeiten können zu keinem Resultate führen, weil sie durch ganze Atmosphärendrucke nur um wenige Milliontel ihres Volums sich vermindern und weil man in einem Prisma mit ebenen und parallelwandigen Glasscheiben einen namhaften Druck nicht anwenden kann. Die einzige uns zugängliche Volumveränderung besteht in Ausdehnung durch Erwärmung, und da zeigen die Versuche von Landolt und die früheren von Dale und Gladstone, dass die Indices abnehmen.

Es lassen sich nun noch einige Anwendungen der erhaltenen Resultate gewinnen.

Die Indices gemischter Gasarten lassen sich nach den Mengenverhältnissen und den Indices der einzelnen Gase berechnen. Die Luft besteht aus $\frac{1}{5}$ Sauerstoff und $\frac{4}{5}$ Stickstoff. Wir haben also

$$\frac{1}{5} \cdot 0{,}924 = 0{,}184,$$
$$\frac{4}{5} \cdot 1{,}020 = 0{,}816,$$

Summa 1,000 oder der Index der Luft.

Haben die Gase eine chemische Verbindung eingegangen, so stimmt dies nicht mehr, selbst nicht mit Berücksichtigung des Volums. Ammoniak besteht aus 1 Volum Stickstoff und 3 Volumen Wasserstoff zu 2 Volumen verdichtet.

Es ist hier

$$\frac{1 \cdot 1{,}020 + 3 \cdot 0{,}470}{2} = 1{,}216,$$

während das Ammoniak 1,309 zeigt. Es ist dies um so auffallender, als bei der Verdichtung nothwendig Molecularbewegung ausgetreten sein muss.

Um den Index des Schwefelkohlenstoffs aus seinem Dampfe zu berechnen, haben wir zu beachten: Schwefelkohlenstoffdampf hat das specifische Gewicht 2,6258, und da ein Liter Luft 1,239 Grm. wiegt, so wiegt ein Liter Schwefelkohlenstoffdampf $1{,}293 \cdot 2{,}6258 = 3{,}395$ Grm. Ein Liter flüssiger Schwefelkohlenstoff mit dem specifischen Gewicht 1,2931 wiegt 1293,1 Grm.; es ist also der flüssige Schwefelkohlenstoff $\frac{1293{,}1}{3{,}395} = 381$ mal dichter, als sein Dampf. Dieser bricht aber 5,11 mal so stark als Luft, also flüssiger Schwefelkohlenstoff bricht $5{,}11 \cdot 381 = 1946{,}91$ mal so stark als Luft. Wasser bricht $\frac{0{,}331100}{0{,}000294} = 1126$ mal so stark als Luft, es ist also der aus dem Dampfe be-

rechnete Index des Schwefelkohlenstoffs $1126 : 1946{,}91 = 1{,}3311 : x$, woraus $x = 2{,}3$.

Der beobachtete Index ist aber gegen Luft = 1,68; es erscheint also der aus dem Dampf berechnete erheblich höher, weil im Dampfe grössere Molecularbewegung vorhanden ist, die aber bei den vielen Multiplicationen auch eine Multiplication der Fehler in sich schliessen kann.

Luft ist 14,47 mal schwerer als Wasserstoff, und Wasser ist 773,4 mal schwerer als Luft, es ist also Wasser $773{,}4 \,.\, 14{,}47 = 11191$ mal schwerer als Wasserstoff. Dieses bricht 0,470 mal so stark als Luft, also auf die Dichte des Wassers verdichtet (unter 11191 Atm. Druck) $11191 \,.\, 0{,}470$ mal $= 5459{,}74$-mal so stark als Luft. Nun bricht Wasser 1126 mal so stark als Luft, es wird also Wasserstoff bei der Dichte des Wassers $\frac{5159{,}77}{1126} = 4{,}58$ mal so stark brechen als Wasser, und sein Index wird sein $4{,}58 \,.\, 1{,}3311 = 5{,}996$, der höchste überhaupt mögliche Index.

Diamant mit dem specifischen Gewicht 3,5 hat den Index 2,270, also bei der Dichte des Wassers $\frac{2{,}270}{3{,}5} = 0{,}649$. Es bricht also Wasserstoff $\frac{5{,}996}{0{,}649} = 9{,}24$ mal so stark als Kohlenstoff, beide auf gleiche Dichte 1 reducirt.

Sauerstoff hat gegen Luft den Index 0,904. Da ein Liter Sauerstoff 1,43 Grm. wiegt, so ist das Wasser $\frac{1000}{1{,}43} = 699{,}3$ mal so dicht als Sauerstoff, es würde also der Sauerstoff bei der Dichte des Wassers $0{,}924 \,.\, 699{,}3 = 646{,}15$-mal so stark brechen als Luft, und da Wasser bei seiner natürlichen Dichte 1126 mal so stark bricht als Luft, so würde der Sauerstoff bei der Dichte des Wassers $\frac{646{,}15}{1126} = 0{,}556$ mal so stark brechen als Wasser. Nach Analogie des Schwefelkohlenstoffes würde flüssiger Sauerstoff von der Dichte 1 wohl noch schwächer brechen, weil ihm die Molecularwärme des permanenten Zustandes fehlt.

XXI.

Ueber das Nichtverbrennen der Spinnenfäden im Focus des Brennglases.

Von

Dr. Mohr in Bonn.

Bei der Versammlung der Naturforscher in Hamburg warf Professor Littrow aus Wien die Frage auf, wie es zugehe. dass die Spinnfäden im Brennpunkte der stärksten Fernröhre nicht verbrannt werden. Von dünnen Metalldrähten hatte Tschirnhausen schon früher eine ähnliche Erfahrung gemacht. Muncke hat nach vielen Anfragen wenig befriedigende Antwort erhalten und hörte von Capt. Kater, dass dieser sich mit Wollaston darüber unterhalten und dass Beiden die Erklärung keine Schwierigkeit zu machen scheine. Jeder Körper nämlich nehme Wärme auf im Verhältniss seiner Masse und strahle sie aus im Verhältniss seiner Oberfläche; indem aber der cubische Inhalt eines Cylinders dem Quadrate (Cubus?) seines Halbmessers, die Oberfläche dagegen der einfachen Potenz (Quadrat?) des Radius proportional abnehme, so müsse es eine Grenze geben, bei welcher erstere gegen letztere verschwinden werde und daher die Aufnahme der Wärme hinter der Ausstrahlung zurückbleibe. Hierauf entgegnete Muncke, dass dieser Satz auf jede Art von Wärme Anwendung leiden müsse, und zeigte ihm dann, dass die feinsten Spinnfäden, in solcher Entfernung über die Flamme einer Weingeistlampe oder einer Kerze gehalten, augenblicklich zerstört werden, in welcher man die Hand ohne Verletzung zu erhalten vermag, worauf Kater selbst seine Erklärung als ungenügend aufgab. Muncke hat das Phänomen unter der Ueberschrift „Ueber Littrow's Problem" in Poggendorff's Annalen 27, 467 besprochen und mehrere dahin gehörige Versuche beigebracht, eine bündige Erklärung aber nicht gegeben. Einmal kommt er der Sache sehr nahe, indem er äussert, dass die Lichtstrahlen an sich nicht warm sind, sondern durch ihren Impuls die in

allen Substanzen vorhandene Wärme erregten. Wäre der Nachsatz nicht dabei, so könnte man sich mit dem ersten Theile beruhigen.

Die Erklärung ist jetzt keiner Schwierigkeit mehr unterworfen. Im Sonnenstrahl sind Strahlen von verschiedener Brechbarkeit enthalten, von denen nur ein Theil sichtbar ist, nämlich jener Theil, welcher das Farbenspectrum ausmacht. Die ultravioletten und ultrarothen Strahlen sind unsichtbar, verwandeln sich aber, so wie sie auf einen undurchsichtigen Körper fallen, in gemeine Wärme. Dabei geben die ultravioletten Strahlen sehr wenig Wärme, die jenseits des Roth im Dunkeln liegenden die meiste Wärme aus. Die farbigen Strahlen verwandeln sich ebenfalls in Wärme und es bleibt die Frage, ob in den farbigen Strahlen sich auch unsichtbare Wärmestrahlen befinden, oder ob die im Farbenspectrum frei werdende Wärme nur das Aequivalent der farbigen Strahlen selbst ist. Bekanntlich gehen dunkle Wärmestrahlen von irdischen Quellen nicht durch Wasser und kaum durch Glas. Die dunklen Wärmestrahlen der Sonne gehen aber durch Glaslinsen und Prismen, sind also in ihrer Natur von den irdischen in etwas verschieden.

Nun sind aber die Lichtstrahlen weder hell, noch die Wärmestrahlen warm, sondern die Lichtstrahlen werden erst sichtbar, wenn sie in unserem Auge auf einen undurchdringlichen Widerstand stossen, und die Wärmestrahlen werden erst gemeine Wärme, wenn sie ebenfalls aufhören, Strahlen zu sein. Es ist also in dem Focus einer Linse gar keine Wärme vorhanden, und wenn der beschienene Gegenstand durchsichtig und diatherman ist, so liegt gar kein Grund vor, warum er beleuchtet oder erwärmt werden soll. Nun ist aber der Spinnfaden vollkommen durchsichtig, und da die Wärmestrahlen der Sonne durch das Glas der Linse gehen, so werden sie ebenfalls durch den glashellen Spinnfaden durchdringen. Die strahlende Wärme hat mit der gemeinen geleiteten Wärme keinen näheren Zusammenhang, als auch der galvanische Strom, der sich ebenfalls in jedem Augenblicke im Leitungsdraht in Wärme umsetzt. Es liegt also jedenfalls an der falschen Auffassung unserer Lehrbücher, dass man in dieser Erscheinung etwas Auffallendes hat erblicken wollen, weil hier Wärmestrahlen und gemeine Wärme gewöhnlich als gleichbedeutend dargestellt werden. Die gemeine Wärme strahlt nun auch immer aus, aber diese Ausstrahlung wird erst wieder zu wirklicher Wärme, wenn sie die Kienrussschichte der Thermosäule getroffen hat.

Dass in dem Focus einer Linse keine Wärme vorhanden ist, hat Muncke auch durch den Versuch bewiesen, dass ein hineingeblasener Strom von Wasserstoff sich nicht entzündet, wohl aber, wenn man einen Holzspahn dahinter hält, der als undurchsichtig erhitzt wird, ins Brennen geräth und dann den Wasserstoff entzündet. Ein schwarzes Pferdehaar verbrennt augenblicklich, ein weisses viel schwieriger; dagegen vier und mehr mit einander vereinigt werden augenblicklich zerstört. Sehr dünne Fäden

von Schellack wurden im Focus nicht einmal so warm, dass sie sich durch ihr eigenes Gewicht bogen. Je dicker die Fäden waren, desto rascher schmolzen und verbrannten sie. Muncke zieht nun den Schluss, dass der Uebergang von der Zerstörbarkeit zur Unzerstörbarkeit bei abnehmender Dicke der Fäden nicht allmälig, sondern sehr plötzlich geschieht. Dies ist eine Beobachtung, aber keine Erklärung.

In demselben Sinne wird ein im Weltall fliegender Meteorit von kleinen Dimensionen durch die Strahlen der Sonne nicht merkbar erwärmt, wie auch die Spitze des Matterhorns nicht merkbar warm wird, und ein Planet kann unter gleichen Umständen der Entfernung von der Sonne und der Substanz um so grössere Hitze entwickeln, je grösser er selbst ist.

Der Frage, warum die Spinnfäden im Focus nicht verbrennen, setzen wir die andere Frage entgegen: warum sollten sie verbrennen, da gar keine Wärme vorhanden ist?

Kleinere Mittheilungen.

XXII. Beiträge zur Theorie der Determinanten.

I. $\Sigma(i\ddot{u} = -\ddot{u}i)_n = \Sigma^2(1, 2 \ldots n)$.

Den hier ausgedrückten Satz (die Bedeutung des linksseitigen Ausdrucks wird unten angegeben werden) beweist man gewöhnlich durch Recursion, wobei sich dann zunächst nur ergiebt, dass

$$\Sigma(i\ddot{u} = -\ddot{u}i)_n$$

ein Quadrat ist. Die Ermittelung der Wurzel $\Sigma(1, 2 \ldots n)$ bedarf darauf noch einer besondern Untersuchung.

Im Folgenden werde ich von diesem Satze eine directe Herleitung geben, welche unmittelbar obige Gleichung liefert und die man, wenn auch etwas umständlich, doch wohl nicht ganz ohne Interesse finden wird.

§ 1. Die Zeilen, sowie die Colonnen eines quadratischen Systems seien mit den Nummern 1 bis n bezeichnet. Das Element, in welchem sich die i^{te} Zeile und die $\ddot{u}^{\text{te}}$ Colonne schneiden, werde mit $(i\ddot{u})$ bezeichnet. Zwei Elemente $(i\ddot{u})$ und $(\ddot{u}i)$, deren Verbindungslinie die Diagonale rechtwinklig schneidet und von derselben halbirt wird, mögen Gegenelemente genannt werden. Ein gemeinschaftliches Zeichen für beide, wo es also unbestimmt gelassen wird, welches von beiden gemeint ist, sei $\genfrac{}{}{0pt}{}{i}{\ddot{u}}$.

§ 2. Das Vorzeichen eines Gliedes der Determinante

$$\Sigma \pm (11)(22) \ldots (nn)$$

bestimmt sich bei beliebiger Reihenfolge der Factoren durch die Anzahl der Inversionen der ersten Nummern plus derjenigen der Inversionen der zweiten Nummern. Wenn erstere μ, letztere ν ist, so wird das Zeichen des Gliedes $(-1)^{\mu+\nu}$. Ist die eine Nummernreihe nach der Grösse der Nummern geordnet, also ohne Inversionen, so bestimmt sich das Zeichen durch die Zahl der Inversionen in der andern allein.

§ 3. Ein Product $(ab)(bc) \ldots (ha)$, wo $a, b, c \ldots h$ irgendwelche verschiedene der Nummern 1 bis n sind, heissen ein Kettenproduct oder Cy-

klus. Jede dieser Nummern kommt darin zweimal vor, einmal als Zeilen und einmal als Colonnenindex. Je nachdem das Product eine gerade oder ungerade Anzahl Factoren hat, je nachdem also die Anzahl der Nummern $a, b \dots h$ gerade oder ungerade ist, werde das Product ein paares oder unpaares genannt.

§ 4. Ein paares Kettenproduct von m Factoren lässt sich in zwei Producte zerlegen, von denen jedes sämmtliche m Indices, aber jeden nur einmal enthält. Der eine dieser Halbcyklen besteht aus dem ersten, dritten etc., der zweite aus dem zweiten, vierten etc. Factor des ursprünglichen Productes. Es ist nämlich

$$(ab)(bc)(cd)(de)\dots(pq)(qr)(rs)(sa)$$
$$=(ab)(cd)\dots(pq)(rs)\times(bc)(de)\,.\,.\,(qr)\,sa).$$

§ 5. Jedes Glied der Determinante besteht aus einem oder mehreren Kettenproducten. Um dieselben zu bestimmen, beginne man mit irgend einem Element (ab) und nehme darauf dasjenige, dessen Zeilenindex b ist, also (bc), und fahre in dieser Weise fort, so dass der Zeilenindex jedes folgenden Elementes der Colonnenindex des vorhergehenden ist, bis man zu einem Element (ga) gelangt, dessen Colonnenindex der Zeilenindex des zuerst genommenen Elementes ist. Dies muss spätestens bei dem letzten Element eintreten, da sonst a als Colonnenindex gar nicht vorkäme. Ist (ga) noch nicht das letzte Element, so nehme man jetzt eines der noch übrigen (kl), bilde von demselben aus eine Kette $(kl)\dots(pk)$ und fahre so fort, bis die letzte Kette mit dem letzten Elemente schliesst.

Die Zahl der Factoren eines der in einem Determinantengliede enthaltenen Cyklus kann 1 bis n sein. Das Anfangsglied der Determinante besteht nur aus Cyklen mit einem Element. Die Anzahl der Glieder, welche durch einen einzigen Cyklus dargestellt werden, ist $(n-1)!$ Ordnet man nämlich die Zeilenindices in einem Kreise, so haben dieselben nicht, wie bei der geradlinigen Anordnung, $n!$, sondern nur $(n-1)!$ Permutationen, und bei jeder derselben lassen sich die Colonnenindices nur auf eine Weise hinzufügen, so dass das ganze Product einen Cyklus bildet.

§ 6. In einem cyklischen Product $(ab)(bc)\dots(rs)(sa)$ von m Factoren erhält man die Reihe der zweiten Nummern aus der Reihe der ersten, indem man den Zeilenindex a der Reihe nach mit jedem folgenden Zeilenindex, also mit $m-1$ Nummern vertauscht.

Wenn nun ein Determinantenglied aus p Ketten besteht mit $m_1, m_2 \dots m_p$ Factoren, so erhält man also die Reihe der zweiten Nummern desselben aus derjenigen der ersten durch $m_1-1+m_2-1\dots+m_p-1=n-p$ Vertauschungen von jedesmal zwei Nummern. Die Differenz und damit auch die Summe der Inversionszahlen in den beiden Nummernreihen ist daher eine gerade oder ungerade Zahl, je nachdem $n-p$ gerade oder ungerade ist. Das Vorzeichen des Gliedes ist demnach $(-1)^{n-p}$, also + oder −, je nachdem die Zahl der

Ketten in demselben sich von dem Exponenten der Determinante um eine gerade oder ungerade Zahl unterscheidet. (Vergl. Cauchy, *Journ. de l'école pol.* 17 *pag.* 42.)

§ 7. Ein Glied der Determinante mit lauter paaren Ketten lässt sich in zwei Producte zerlegen, deren jedes lauter verschiedene Nummern 1 bis n enthält.

Man zerlege nämlich jede der in dem Gliede enthaltenen Ketten nach § 4, wobei man verschiedene Theilungen des Gliedes erhält, je nachdem man die eine oder die andere Hälfte einer Kette auf die rechte oder linke Seite bringt.

§ 8. In einem nach § 4 zerlegten Kettenproduct

$$(ab)(cd)\ldots(pq)(rs)\times(bc)(de)\ldots(qr)(sa)$$

von m Factoren entsteht die ganze Reihe $bcde\ldots qrsa$ der Indices rechts aus derjenigen $abcd..\ pqrs$ links durch $m-1$ malige Vertauschung von jedesmal zwei Elementen. Enthält nun ein nach § 7 zerlegtes Determinantenglied p Ketten mit $m_1, m_2 ..\ m_p$ Factoren, so entsteht die ganze Nummernreihe rechts aus derjenigen links durch

$$m_1-1+m_2-1+\ldots+m_p-1=n-p$$

Vertauschungen von jedesmal zwei Elementen. Die Differenz und folglich auch die Summe der Inversionszahlen der beiden Hälften ist daher mit $n-p$ gerade oder ungerade.

§ 9. Wenn man ein oder mehrere Elemente eines Determinantengliedes durch ihre Gegenelemente ($i\ddot{u}$ durch $\ddot{u}i$) ersetzt, so erhält man nur dann wieder ein Glied derselben Determinante, wenn man auf diese Weise einen oder mehrere ganze Cyklen umkehrt.

Kehrt man nämlich irgend ein Element (ab) um, so muss man auch das damit zusammenhängende (bc) umkehren, da sonst zwei Elemente (ba) und (bc) in der ersten Nummer übereinstimmten. Ebenso muss man dann auch (cd) umkehren u. s. w., mithin einen ganzen Cyklus.

§ 10. Alle Glieder, welche durch Umkehrung eines oder mehrerer Cyklen nach § 9 aus einander entstehen, haben nach § 6 dasselbe Vorzeichen, da die Zahl der Ketten dieselbe ist.

§ 11. Ein Glied der Determinante kann Paare von Gegenelementen $(ab)(ba)$ enthalten. Durch Umkehrung solcher zweielementigen Cyklen ändert sich das Glied nicht. Besteht es nur aus solchen, so kann durch derartige Umkehrung kein anderes Glied der Determinante erhalten werden. Dasselbe gilt von den jedes für sich einen Cyklus darstellenden Elementen der Diagonale.

Durch Umkehrung von einem oder mehreren mehr- als zweielementigen Cyklen erhält man dagegen lauter verschiedene Glieder, weil ein Cyklus mit seiner Umkehrung kein Element und mit den übrigen Cyklen

keine Nummer gemein hat, mithin ein Element einer Kette durch Umkehrung sich weder in ein anderes Element derselben Kette, noch in ein solches einer andern Kette verwandeln kann.

§ 12. Nach §§ 11 und 10 zerfallen die Glieder der Determinante in mehrere Gruppen, deren jede nur solche enthält, welche durch Umkehrung aus einander entstehen. Zwei Glieder aus verschiedenen Gruppen können sich durch Umkehrung eines oder mehrerer Elemente nicht in einander verwandeln.

§ 13. Betrachten wir jetzt ein System, in welchem jedes Element seinem Gegenelement entgegengesetzt gleich ist, also

$$(i\ddot{u}) = -(\ddot{u}i) \text{ und } (ii) = -(ii) = 0.$$

Die Determinante eines solchen Systems möge mit

$$\Sigma \pm (i\ddot{u} = -\ddot{u}i)_n$$

bezeichnet werden.

§ 14. In

$$\Sigma \pm (i\ddot{u} = -\ddot{u}i)_n$$

vernichten sich alle Glieder mit einem oder mehreren unpaaren Cyklen.

Die mit irgend einem Gliede zu derselben Gruppe (§ 12) gehörenden kann man erhalten, indem man zuerst auf alle Weise die paaren Cyklen umkehrt und in jedem der so erhaltenen Glieder auch die unpaaren. Wenn nun die Anzahl der letzteren m ist, so kann man p von denselben auf

$$\binom{m}{p} = \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p} \text{-fache Weise}$$

auswählen. Indem man also eine gerade Zahl 0, 2, 4... solcher Ketten umkehrt, erhält man

$$\binom{m}{0} + \binom{m}{2} \ldots,$$

und durch Umkehrung einer ungeraden Zahl 1, 3, 5...

$$\binom{m}{1} + \binom{m}{3} \ldots$$

Glieder der Determinante. Die eine Anzahl $\binom{m}{0} + \binom{m}{2} \ldots$ ist gleich der andern $\binom{m}{1} + \binom{m}{3} \ldots$, da

$$\binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} \ldots = (1-1)^m = 0.$$

Wegen $i\ddot{u} = -\ddot{u}i$ verwandelt sich aber bei der Umkehrung einer ungeraden Anzahl von unpaaren Cyklen das Zeichen des Productes in das entgegengesetzte, während es bei Umkehrung einer geraden Anzahl unverändert bleibt. Da nun das Vorzeichen nach § 10 immer dasselbe ist, so vernichten sich die Glieder, welche durch Umkehrung der unpaaren Cyklen

entstehen, und folglich auch der sämmtlichen Glieder, welche zu der betreffenden Gruppe gehören.

§ 15. Wenn der Exponent der Determinante ungerade ist, so kann kein Glied derselben nur paare Cyklen enthalten; also vernichten sich dann sämmtliche Glieder und es ist

$$\Sigma \pm (i\ddot{u} = -\ddot{u}i)_n = 0.$$

Im Folgenden setzen wir immer voraus, dass n eine gerade Zahl ist.

§ 16. Irgend eines der nicht verschwindenden, also nur paare Ketten enthaltenden Glieder von $\Sigma \pm (i\ddot{u} = -\ddot{u}i)_n$ möge nun ausser den etwaigen Paaren von Gegengliedern, durch deren Umkehrung kein anderes Glied der Determinante entsteht, m paare Ketten enthalten. Aus diesen kann man p auf $\binom{m}{p}$-fache Weise auswählen, und indem man also auf alle Weise 0, 1, 2 etc. bis m solche Ketten umkehrt, erhält man eine Anzahl

$$= \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} \ldots = (1+1)^m = 2^m$$

ursprünglich verschiedene Determinantenglieder, welche aber infolge obiger Voraussetzung $[(i\ddot{u}) = -(\ddot{u}i)]$ und wegen § 10 einander gleich sind.

§ 17. Das Aggregat aller verschiedenen Producte aus $\frac{n}{2}$ Elementen oberhalb der Diagonale (wo also immer der Zeilenindex kleiner ist als der Colonnenindex) mit lauter verschiedenen Nummern 1 bis n werde mit $\Sigma(1, 2 \ldots n)$ bezeichnet. Das Zeichen eines Gliedes ist positiv oder negativ, je nachdem die Zahl der Inversionen der ganzen Nummernreihe gerade oder ungerade ist. Die Reihenfolge der Factoren ist hierbei gleichgiltig; vertauscht man irgend zwei Elemente mit einander, so werden zwei Nummern einzeln mit zwei anderen vertauscht.

Das Quadrat von $\Sigma(1, 2 \ldots n)$ werde mit $\Sigma^2(1, 2 \ldots n)$ bezeichnet.

Sämmtliche Glieder von $\Sigma(1, 2 \ldots n)$ erhält man auf bekannte Weise.

§ 18. Mit P_k und P_l mögen zwei Glieder (die auch ein und dasselbe sein können) von $\Sigma(1, 2 \ldots n)$ bezeichnet werden. Dann ist $P_k P_l$ ein Glied von $\Sigma^2(1, 2 \ldots n)$.

Man nehme aus P_k irgend ein Element (ab) und aus P_l das damit durch b zusammenhängende $\frac{b}{c}$ [d. h. (bc) oder (cb), je nachdem $b \lesseqgtr c$], hierauf aus P_k das mit $\frac{b}{c}$ zusammenhängende $\frac{c}{d}$. Hiermit fahre man fort, bis man zu einem Elemente von P_l gelangt, dessen eine Nummer a ist. Man hat dann das Product

$$\begin{matrix} a & b & c & & h \\ b & c & d & \cdots & a \end{matrix},$$

dessen Factoren abwechselnd zu P_k und P_l gehören; also wenn man dieselben wieder demgemäss trennt:

$$\begin{matrix} a & c \\ b & d \end{matrix} \cdots \times \begin{matrix} b & d \\ c & e \end{matrix} \cdots .$$

Die Nummern links sind dieselben, wie die rechts; das Ganze kann man auch hier einen Cyklus nennen, die beiden Theile Halbcyklen. (Vergl. § 4.)

Auf gleiche Weise kann man aus den noch übrigen Factoren Cyklen bilden. Nennt man die aus P_k entnommenen Halbcyklen $k_1, k_2 \ldots$, die aus P_l entnommenen $l_1, l_2 \ldots$, so ist also

$$P_k P_l = k_1 k_2 k_3 \ldots \times l_3 l_2 l_1 .$$

Zwei zusammengehörige k und l enthalten dieselben Nummern als Elementenindices. (Vergl. § 7.)

§ 19. Will man in dem Producte $P_k \times P_l$ irgendwelche Elemente aus P_k in P_l und ebenso viele aus P_l in P_k bringen, aber so, dass P_k und P_l Glieder von $\Sigma(1, 2 \ldots n)$ bleiben, $P_k \times P_l$ also noch ein Glied von $\Sigma^2(1, 2 \ldots n)$ darstellt, so muss man einen oder mehrere Halbcyklen links mit den zugehörigen rechts vertauschen. Da nämlich jedes der beiden P wieder sämmtliche Nummern enthalten muss, so müssen die nämlichen Nummern von links nach rechts und von rechts nach links gebracht werden. Sind also

$$\begin{matrix} a & c & e \\ b & d & f \end{matrix} \cdots \text{ und } \begin{matrix} b & d & f \\ c & e & g \end{matrix} \cdots$$

zwei Halbcyklen und bringt man $\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$ nach rechts, so muss $\begin{matrix} b \\ c \end{matrix}$ nach links, um dort wieder b zu erhalten, dann aber $\begin{matrix} c \\ d \end{matrix}$ nach rechts, damit hier wieder c erscheine etc.; mithin muss der ganze Cyklus umgekehrt werden. (Vgl. § 9.)

§ 20. Stimmen P_k und P_l in irgendwelchen Elementen überein, so bilden je zwei solche gleiche Elemente (den Paaren von Gegenelementen in § 11 entsprechend) einen Cyklus, durch dessen Umkehrung P_k sowohl, wie P_l unverändert bleibt, mithin auch kein neues (d. h. durch Multiplication von anderen P entstandenes) Glied von $\Sigma^2(1, 2 \ldots n)$ erhalten wird. Werden dagegen mehr- als zweielementige Cyklen umgekehrt, so entstehen lauter dem Ursprunge nach verschiedene (d. h. durch Multiplication von anderen P entstandene) Glieder von $\Sigma^2(1, 2 \ldots n)$. Ersetzt man nämlich irgendwelche Halbcyklen von P_k durch die entsprechenden, so entsteht ein von P_k verschiedenes Product, weil ein Halbcyklus mit dem zugehörigen kein Element und mit den übrigen keine Nummer gemein hat. (Vgl. § 11.)

§ 21. Alle nach § 20 durch Vertauschung von Halbcyklen aus einander entstehenden Glieder von $\Sigma^2(1, 2 \ldots n)$ sind gleich und haben auch gleiche Vorzeichen, weil durch eine solche Vertauschung nur eine gewisse Anzahl

von Inversionen aus P_k in P_l und eine andere aus P_l in P_k gebracht wird, mithin die Zahl in beiden zusammen sich nicht ändert. Die Inversionen der Nummern eines Halbcyklus mit denen der übrigen Halbcyklen ändern sich nämlich nicht, wenn man denselben durch einen andern Halbcyklus ersetzt, welcher die nämlichen Nummern enthält. (Vergl. § 10.)

§ 22. Ausser den etwaigen Paaren von gleichen Elementen möge nun ein Glied von $\Sigma^2(1,2\ldots n)$ m Cyklen enthalten. Wählt man aus diesen auf alle Weise 0, 1, 2... bis m aus und kehrt dieselben um, so erhält man

$$\binom{m}{0}+\binom{m}{1}+\binom{m}{2}\ldots+\binom{m}{m}=2^m$$

gleiche Glieder. (Vergl. § 16.)

Die Glieder von $\Sigma^2(1,2\ldots n)$ zerfallen demnach in Gruppen von gleichen Gliedern. Je zwei Glieder, welche verschiedenen Gruppen angehören, sind ungleich. (Vergl. § 12.)

§ 23. Jedes Glied von

$$\Sigma \pm (i\ddot{u} = -\ddot{u}i)_n$$

ist einem Gliede von $\Sigma^2(1,2\ldots n)$ und jedes Glied von

$$\Sigma^2(1,2\ldots n)$$

einem solchen von $\Sigma \pm (i\ddot{u} = -\ddot{u}i)_n$ gleich.

Man theile ein Glied der Determinante $\Sigma \pm (i\ddot{u} = -i\ddot{u})_n$ nach § 7. Jedes der beiden Halbglieder enthält sämmtliche Nummern 1 bis n; ersetzt man also jedes Element, dessen Zeilenindex grösser ist als der Colonnenindex, durch sein Gegenelement, so werden beide Halbglieder Glieder von $\Sigma(1,2\ldots n)$, mithin das Ganze ein Glied von $\Sigma^2(1,2\ldots n)$.

Ebenso sieht man leicht, wie sich ein in Cyklen nach § 18 zerlegtes Glied von $\Sigma^2(1,2\ldots n)$ durch Umkehrung einzelner Elemente in ein solches von $\Sigma \pm (i\ddot{u} = -\ddot{u}i)$ verwandeln lässt.

Zwei derartige Glieder von $\Sigma \pm (i\ddot{u} = -\ddot{u}i)_n$ und $\Sigma^2(1,2\ldots n)$ stimmen in der Anzahl der Cyklen und diese paarweise in der Anzahl der Elemente überein. Es ist noch zu zeigen, dass dieselben auch gleiche Zeichen haben.

Das nach § 7 zerlegte Determinantenglied sei $G_k \times G_l$. Die Zahl der Inversionen der ganzen Nummernreihen in G_k und G_l zusammen sei μ. Dann ist $(-1)^\mu$ nach §§ 6 und 8 das Vorzeichen von $G_k G_l$. Müssen nun ν Elemente umgekehrt werden, um $P_k P_l$ aus $G_k G_l$ zu erhalten, so ist $\mu-\nu$ die Zahl der Inversionen in $P_k P_l$ zusammen, mithin $(-1)^{\mu-\nu}$ das Vorzeichen von $P_k P_l$. Es muss demnach

$$(-1)^\mu G_k G_l = (-1)^{\mu-\nu} P_k P_l$$

sein. Dies ist aber in der That der Fall, da wegen der Umkehrung von ν Elementen und wegen $(i\ddot{u}) = -(\ddot{u}i)$

$$G_k G_l = (-1)^\nu P_k P_l.$$

§ 24. Es ist

$$\Sigma(i\ddot{u}=-\ddot{u}i)_n=\Sigma^2(1,2\ldots n).$$

Man nehme irgend ein Glied G von $\Sigma(i\ddot{u}=-\ddot{u}i)_n$ mit p mehr- als zweielementigen Cyklen; dasselbe ist nach § 23 gleich einem Gliede Γ von $\Sigma^2(1,2\ldots n)$ ebenfalls mit p mehr- als zweielementigen Cyklen. G sowohl, wie Γ gehört aber nach §§ 16 und 22 zu einer Gruppe von 2^p gleichen Gliedern; diese beiden Gruppen sind also gleich.

Jede Gruppe von $\Sigma(i\ddot{u}=-\ddot{u}i)_n$ ist demnach einer solchen von $\Sigma(1,2\ldots n)$ gleich, und umgekehrt. Da nun zwei verschiedene Gruppen weder in $\Sigma(i\ddot{u}=-\ddot{u}i)$, noch in $\Sigma(1,2\ldots n)$ gleich sind, so ist klar, dass $\Sigma(i\ddot{u}=-\ddot{u}i)_n=\Sigma^2(1,2\ldots n)$.

II. Die orthogonale Substitution.

Eine orthogonale Substitution lässt sich unter der Voraussetzung

$$b_{i\ddot{u}}=-b_{\ddot{u}i},\quad b_{11}=b_{22}=b_{33}\ldots$$

durch folgende Gleichungen ausdrücken:

$$b_{11}x_1+b_{12}x_2\ldots+b_{1n}x_n=b_{11}y_1+b_{21}y_2\ldots+b_{n1}y_n,$$
$$b_{21}x_1+b_{22}x_2\ldots+b_{2n}x_n=b_{12}y_1+b_{22}y_2\ldots+b_{n2}y_n$$

u. s. w. bis

$$b_{n1}x_1+b_{n2}x_2\ldots+b_{nn}x_n=b_{1n}y_1+b_{2n}y_2\ldots+b_{nn}y_n.$$

Die Zeilen der Coefficienten links stimmen hier mit den Colonnen rechts überein. Löst man diese Gleichungen das eine Mal nach den x, das andere Mal nach den y auf, so erhält man zwei Coefficientensysteme, in welchen ebenfalls, einer charakteristischen Eigenschaft der orthogonalen Substitution gemäss, die Zeilen des einen mit den Colonnen des andern übereinstimmen.

Setzt man

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{n1} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ b_{1n} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix} = B$$

und ist

$$\begin{vmatrix} \beta_{11} & \ldots & \beta_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \beta_{n1} & \ldots & \beta_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \ldots & \beta_{n1} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \beta_{1n} & \ldots & \beta_{nn} \end{vmatrix}.$$

die zu der vorigen adjungirte Determinante, stellt man ferner die Auflösung obiger Gleichungen nach y durch

$$y_i=c_{i1}x_1+c_{i2}x_2\ldots+c_{in}x_n$$

und diejenige nach x durch

$$x_{\ddot{u}}=g_{\ddot{u}1}y_1+g_{\ddot{u}2}y_2\ldots+g_{\ddot{u}n}y_n$$

dar, so bestimmen sich die Coefficienten von $x_{\ddot{u}}$ in y_i durch

$$B\,c_{i\ddot{u}}=\beta_{i1}b_{1\ddot{u}}+\beta_{i2}b_{2\ddot{u}}\ldots+\beta_{i\ddot{u}}b_{\ddot{u}\ddot{u}}\ldots+\beta_{in}b_{n\ddot{u}}.$$

Setzt man

$$s=\beta_{i1}b_{\ddot{u}1}+\beta_{i2}b_{\ddot{u}2}\ldots+\beta^{i\ddot{u}}b_{\ddot{u}\ddot{u}}\ldots+\beta_{in}b_{\ddot{u}n},$$

so ist

$$B c_{i\ddot{a}} + s = 2\beta_{ia} b_{\ddot{a}a}.$$

Da $s = B$ oder $= 0$, je nachdem $i = \ddot{a}$ oder nicht, so wird

$$c_{i\ddot{a}} = \frac{2\beta_{ia} b_{\ddot{a}a}}{B}, \quad c_{ii} = \frac{2\beta_{ii} b_{ii} - B}{B}.$$

Der Coefficient g_{ai} von y_i in x_a bestimmt sich aus

$$B g_{\ddot{a}i} = \beta_{1\ddot{a}} b_{i1} + \beta_{2a} b_{i2} \ldots + \beta_{i\ddot{a}} b_{ii} \ldots + \beta_{na} b_{in}.$$

Setzt man

$$s = \beta_{1a} b_{1i} + \beta_{2\ddot{a}} b_{2i} \ldots + \beta_{ia} b_{ii} \ldots + \beta_{na} b_{ni},$$

so ist

$$B g_{ai} + s = 2\beta_{ia} b_{ii}.$$

Da $s = B$ oder $= 0$, je nachdem $i = \ddot{a}$ oder nicht, so ist

$$g_{\ddot{a}i} = \frac{2\beta_{i\ddot{a}} b_{ii}}{2}, \quad g_{ii} = \frac{2\beta_{ii} b_{ii} - B}{B},$$

mithin

$$g_{ai} = c_{ia}.$$

Die Zeilen der Coefficienten c sind also die Colonnen der g. Man kann daher setzen:

$$y_i = c_{i1} x_1 + c_{i2} x_2 \ldots + c_{in} x_n, \quad x_i = c_{1i} x_1 + c_{2i} x_2 \ldots + c_{ni} x_n.$$

Hieraus folgt aber auf bekannte Weise

$$c^2_{1i} + c^2_{2i} \ldots + c^2_{ni} = 1,$$
$$c_{1i} c_{1a} + c_{2i} c_{2a} \ldots + c_{ni} c_{na} = 0,$$
$$x_1^2 + x_2^2 \ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 \ldots + y_n^2.$$

Das System der Coefficienten c entsteht hier auf dieselbe Weise, als wenn man die Determinante $\Sigma \pm b_{11} \ldots b_{nn}$ mit derjenigen des um die Diagonale gedrehten adjungirten Systems multiplicirt. Bestimmt man die x als Functionen der y, so erhält man die Coefficienten c, indem man die Multiplication

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{n1} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ b_{1n} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta_{11} & \ldots & \beta_{1n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \beta_{n1} & \ldots & \beta_{nn} \end{vmatrix}$$

colonnenweise ausführt und jedes Element des resultirenden Systems durch

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{n1} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ b_{1n} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

dividirt.

Bestimmt man dagegen die y als Functionen der x, so muss man die Multiplication

$$\begin{vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta_{11} & \ldots & \beta_{n1} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \beta_{1n} & \ldots & \beta_{nn} \end{vmatrix}$$

colonnenweise ausführen und jedes erhaltene Element durch B dividiren.

Da in beiden Fällen die resultirende Determinante durch B^n dividirt wird und

$$\begin{vmatrix} b_{11} & . & . & b_{n1} \\ . & . & . & . \\ b_{1n} & \dots & & b_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta_{11} & .. & \beta_{1n} \\ . & . & . \\ \beta_{n1} & \dots & \beta_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ . & . & . \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{n1} \\ . & . & . \\ \beta_{1n} & \dots & \beta_{nn} \end{vmatrix} = B^n,$$

so ergiebt sich zugleich, dass die Determinante einer durch obige Gleichungen gargestellten orthogonalen Substitution $=1$ ist. Die Substitutionen mit Determinante $=-1$ erhält man daraus auf bekannte Weise.

III. $b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} \dots + b_0$ als Determinante.

Subtrahirt man in der Determinante

$$P = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & b_n \\ a_1 & x & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & b_n \\ a_1 & a_2 & x & a_3 & \dots & a_{n-1} & b_n \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n-1}\, x & b_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n-1}\, a_n & b_n \end{vmatrix}$$

von jeder Zeile die folgende, so erhält man

$$P = \begin{vmatrix} x-a_1 & a_1-x & 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & x-a_2 & a_2-x & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & x-a_3 & a_3-x & & & 0 \\ . & & & . & . & & . \\ & & & & . & . & . \\ & & & & x-a_{n-1} & a_{n-1}-x & 0 \\ & & & & & x-a_n & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & & \dots & a_n & b_n \end{vmatrix}.$$

Jedes Glied dieser Determinante, welches aus der letzten Zeile eines der Elemente $a_1, a_2 \dots a_n$ enthält, hat aus der letzten Colonne 0. Nimmt man aber aus der letzten Zeile b_n, so kann man, ohne dass das Glied $=0$ wird, aus der vorletzten nur $x-a_n$, dann aus der drittletzten nur $x-a_{n-1}$ etc. nehmen. Es ist also

$$P = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)\,b_n.$$

Sind demnach $a_1, a_2 \dots a_n$ die Wurzeln einer Gleichung

$$b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} \dots + b_0 = 0,$$

so ist

$$b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} \dots + b_0 = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & b_n \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_{n-1} & b_n \\ . & . & . & . & . & . \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1}\, x & b_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1}\, a_n & b_n \end{vmatrix}.$$

Wiedenbrück (Westphalen). W. Veltmann.

XXIII. Ueber einen Fundamentalsatz der Determinantentheorie.

Seit unsere grossen neueren Analytiker, insbesondere Dirichlet, die Unrichtigkeit und Ungenauigkeit so mancher Sätze, Beweise und Methoden dargethan haben, die vorher von allen Mathematikern als richtig angesehen worden waren, hat man sich in vielen schwierigen Untersuchungen der grössten Genauigkeit und Strenge befleissigt.

Dies hat jedoch nicht verhindert, dass dafür in anderen Gebieten neue Irrthümer sich eingeschlichen haben und falsche Beweise, sogar falsche Sätze in manchen Werken von Mathematikern ersten Ranges zu finden sind, ohne dass sie angefochten worden wären. Ich erinnere beispielsweise nur an die zuerst von Chasles mit einem falschen Satze begründete und von Cremona seiner Theorie der algebraischen Curven zu Grunde gelegte neue Definition der Projectivität zweier Punktreihen, deren Unzulässigkeit gleichzeitig von Geiser („*Sopra un teorema fondamentale della Geometria*“ in Cremona's *Annali di Matem.*) und von mir in meinen „Abhandlungen aus dem Grenzgebiete der Mathematik und Philosophie“ (Zürich, bei Friedrich Schulthess, 1870) nachgewiesen wurde.

Zu dem Capitel dieser Incorrectheiten scheint mir auch die Art und Weise zu gehören, wie der erste Fundamentalsatz der Determinantentheorie, dass die Determinante ihren Werth nicht ändert, wenn die Horizontalreihen als Verticalreihen geschrieben werden, oder wenn statt der zweiten Indices die ersten permutirt werden, in die Wissenschaft eingeführt zu werden pflegt.

Der Satz selbst ist ohne Zweifel richtig, aber keineswegs von selbst verständlich oder unmittelbar in der Definition der Determinante enthalten, wie man meinen sollte, wenn man z. B. Salmon's Vorlesungen liest, wo als ganze Begründung die Worte stehen:

> „Dies folgt unmittelbar aus dem Bildungsgesetz, welches in Bezug auf horizontale und verticale Reihen vollkommene Symmetrie bedingt.“

Aus dem Bildungsgesetz folgt es allerdings, aber doch nicht so, dass ohne Weiteres eingesehen werden könnte, wie, und doch scheint dies die Meinung Salmon's zu sein, der ja seine Leser erst mit den Determinanten bekannt machen will und ihnen sonst nicht zumuthet, die Beweise selbst zu finden.

Ich muss daher annehmen, diese Worte sollen soviel sagen, als:

> „Wenn man die ersten Indices unverändert lässt und die zweiten permutirt, so erhält man dem Werth und Zeichen nach dieselben Glieder in derselben Reihenfolge, wie wenn man die zweiten Indices unverändert lässt und die ersten in derselben Weise permutirt, wie im andern Falle die zweiten.“

Denn nur wenn dies der Fall wäre, würde man berechtigt sein, zu sagen, der obige Satz folge unmittelbar aus der Symmetrie, die zwischen horizontalen und verticalen Reihen besteht.

Dass nun in der That vielfach die citirten Worte Salmon's so verstanden werden, wird man mir leicht zugeben, und Mancher wird sogar verwundert fragen, ob denn diese Auffassung etwa falsch sei? In dem „Taschenbuch der Mathematik" von W. Ligowsky z. B. ist die Sache einfach mit den Worten abgemacht: „Vertauscht man die Zeilen einer Determinante mit den Colonnen, dann wird dieselbe nicht geändert, weil die Anfangsglieder dieselben bleiben." Soll dies ein Grund sein, so müsste doch vorerst richtig sein, was ich als den Sinn der Salmon-schen Worte supponirt habe. Nun ist diese Voraussetzung aber nur richtig, wenn allgemein $a_{i,k} = a_{k,i}$ ist. Wird die Determinante

$$\Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{6,6}$$

einmal durch Permutation der ersten und dann durch Permutation der zweiten Indices entwickelt, so entspricht z. B. dem Gliede

$$A_1 = a_{5,1}\, a_{6,2}\, a_{1,3}\, a_{3,4}\, a_{4,5}\, a_{2,6}$$

der ersten Entwickelung das Glied

$$B_2 = a_{1,5}\, a_{2,6}\, a_{3,1}\, a_{4,3}\, a_{5,4}\, a_{6,2}$$

in der zweiten Entwickelung. Soll aber die Identität beider Entwickelungen dargethan werden, so ist zu beweisen, dass die numerisch gleichen Glieder, und nicht blos die symmetrisch entsprechenden, gleiche Vorzeichen haben, also z. B., dass A_1 mit

$$A_2 = a_{1,3}\, a_{2,6}\, a_{3,4}\, a_{4,5}\, a_{5,1}\, a_{6,2}$$

im Zeichen übereinstimmt, was erfordert, dass die Permutationen 561342 und 364512, die gar keine Symmetrie aufweisen, derselben Classe angehören. Und das versteht sich doch ganz gewiss nicht von selbst!

Baltzer giebt in seiner Theorie der Determinanten, sowie in seinen Elementen für den fraglichen Satz zwar einen Beweis, aber einen solchen, der ebenso wenig befriedigt, wie die schwer begreiflichen Worte Salmon's.

Dieser Beweis lautet nämlich so:

„Bedeutet $k_1 k_2 k_3 \ldots k_n$ irgend eine Permutation der Suffixe $12 \ldots n$, so drückt $a_{1,k_1}\, a_{2,k_2}\, a_{3,k_3} \ldots a_{n,k_n}$ irgend ein Glied der Determinante aus. Dieses Glied wird aber aus dem Anfangsglied $a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3} \ldots a_{n,n}$ sowohl dadurch abgeleitet, dass man die zweiten Suffixe $12 \ldots n$ der Reihe nach durch $k_1, k_2 \ldots k_n$ ersetzt, als auch dadurch, dass man in der Reihe der ersten Suffixe k_1 durch 1, k_2 durch 2, $\ldots k_n$ durch n ersetzt. In beiden Fällen hat man die gleiche Anzahl Vertauschungen von jedesmal zwei Suffixen vorzunehmen; folglich erhält das abgeleitete Glied bei dem zweiten Verfahren dasselbe Zeichen, wie beim ersten."

In der That erhält man aus $a_{1,1}\,a_{2,2}\,a_{3,3}\,a_{4,4}\,a_{5,5}\,a_{6,6}$ das Glied

$$A_1 = a_{5,1}\,a_{6,2}\,a_{1,3}\,a_{3,4}\,a_{4,5}\,a_{2,6},$$

wenn man in der Reihe der ersten Indices successive 1 durch 5, 2 durch 6, 3 durch 1, 4 durch 3, 5 durch 4, 6 durch 2 ersetzt, und das ihm numerisch gleiche Glied der zweiten Entwickelung

$$A_2 = a_{1,3}\,a_{2,6}\,a_{3,4}\,a_{4,5}\,a_{5,1}\,a_{6,2}$$

dadurch, dass man in der Reihe der zweiten Indices successive 5 durch 1, 6 durch 2, 1 durch 3, 3 durch 4, 4 durch 5, 2 durch 6 ersetzt. Dass aber zu der ersten Operation ebenso viele successive Vertauschungen von je zwei Suffixen erforderlich sind, wie zur zweiten, ist durchaus nicht ohne Weiteres klar.

Wenn ich in der Reihe 123456 den Index 1 durch 5 ersetzen will, so muss ich 1 mit 5 vertauschen, und dasselbe muss ich thun, um 5 durch 1 zu ersetzen. Soll ich dann 2 durch 6 oder 6 durch 2 ersetzen, so muss ich abermals in beiden Fällen 6 mit 2 vertauschen und erhalte die Complexion 563412. Hier aber hört die Uebereinstimmung auf; denn soll ich jetzt 1 an die dritte Stelle setzen, so muss ich in der vorstehenden Complexion 3 mit 1 vertauschen und erhalte 561432; soll ich aber 3 an die erste Stelle setzen, so muss ich in der Complexion 563412 die Indices 3 und 5 vertauschen und erhalte 365412. Soll jetzt im ersten Falle 3 an die vierte Stelle treten, so muss 4 mit 3 vertauscht werden und man erhält 561342; soll aber im zweiten Falle 4 an die dritte Stelle treten, so muss 4 mit 5 vertauscht werden und man erhält 364512. In der der ersten Entwickelung angehörigen Complexion 561342 sind jetzt keine Vertauschungen mehr nöthig, da bereits 4 an der fünften und 2 an der sechsten Stelle steht. Dass aber auch bei der zweiten Entwickelung mit der vierten Vertauschung die Forderung, dass 5 an der vierten und 6 an der zweiten Stelle stehen, bereits erfüllt ist, davon konnte mit Sicherheit ohne Weiteres nur das Letztere vorausgesagt werden, da gleich anfangs 6 mit 2 vertauscht und dann nicht mehr vom Platze gestellt wurde, während 5 dreimal seinen Platz ändern musste.

Man sollte sich im Gegentheil darüber verwundern, dass zu dem ersten Verfahren gerade soviel Vertauschungen von je zwei Indices erforderlich und hinreichend sind, wie zu dem zweiten, da doch im Allgemeinen schon bei der dritten Vertauschung der Index, welcher an die Stelle eines andern treten soll, nicht mit diesem, sondern mit einem dritten vertauscht wird, der inzwischen seinen Platz eingenommen hat (z. B. damit in der Complexion 123456, nachdem 2 durch 6, 3 durch 5 ersetzt ist, 2 an die Stelle von 5 trete, muss nicht 2 mit 5, sondern 2 mit 3 vertauscht werden, welches auf der fünften Stelle steht).

Baltzer hat seinem Beweise (wenigstens in den beiden ersten Auflagen seiner Determinantentheorie) ein Beispiel beigefügt, in welchem die in

dem Beweise dem Verstande gemachte Zumuthung dadurch verdeckt ist, dass allgemein jedem Factor $a_{i,k}$ ein anderer $a_{k,i}$ entspricht. Er sagt nämlich:

„Aus

$$a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3}\, a_{4,4}\, a_{5,5}\, a_{6,6}$$

entspringt

$$a_{1,3}\, a_{2,2}\, a_{3,1}\, a_{4,4}\, a_{5,6}\, a_{6,5},$$

indem man die zweiten Suffixe 123456 mit 321465 vertauscht. Dasselbe Glied kann man aus dem Anfangsgliede auch dadurch finden, dass man die ersten Suffixe 321456 der Reihe nach in 123465 verwandelt. Bei dem einen, wie bei dem andern Verfahren werden vier Suffixe durch andere ersetzt und in beiden Fällen erhält das abgeleitete Glied dasselbe Zeichen.“

Es ist nicht recht klar, ob hier der Nachsatz als eine selbstständige Bemerkung aufgefasst werden soll, deren Begründung dann dem Leser überlassen wäre, oder ob der Vordersatz als Grund, der Nachsatz als Folge zu nehmen ist. Im letzteren Falle läge ein Irrthum vor, der demnach jedenfalls dem Leser sehr nahe gelegt ist. Denn wenn gleichviel Suffixe durch andere ersetzt werden sollen, folgt daraus keineswegs, dass dazu auch gleichviel Vertauschungen nöthig sind. Um 12345 in 23451 umzuwandeln, müssen alle 5 Indices durch andere ersetzt werden; ebenso, wenn 12345 in 21453 verwandelt werden; im ersten Falle sind aber dazu vier Vertauschungen nöthig und im andern drei.

Die Behauptung also, dass ebenso viele Vertauschungen von jedesmal zwei Suffixen vorzunehmen sind, wenn man in der Reihe $1234\ldots n$ successive 1 durch k_1, 2 durch k_2 u. s. w., n durch k_n ersetzt, wie wenn man in derselben Reihe successive k_1 durch 1, k_2 durch 2, $\ldots k_n$ durch n ersetzen will, ist, so lange sie nicht anders erwiesen, als dadurch, dass es jedesmal zutrifft, wenn man's versucht, lediglich eine Hypothese. Die Richtigkeit derselben will ich zwar keineswegs bestreiten, obwohl mir bis jetzt noch ein Erkenntnissgrund fehlt, aus dem sie als unzweifelhaft hervorgeht, wohl aber ihre unmittelbare Evidenz.

Wenn man sich damit beruhigen will, dass eine Sache bei jedem einzelnen Versuche zutrifft, so kann man auch noch den folgenden Satz aufstellen, dessen wissenschaftliche Begründung ich, wie die der fraglichen Hypothese, geübteren Analytikern überlasse:

Ordnet man die Factoren eines Gliedes einer Determinante, bei deren Entwickelung die ersten Indices in der natürlichen Reihenfolge gelassen worden sind, so, dass die zweiten Indices in der natürlichen Zahlenreihe stehen, so ist die Zahl der Inversionen in der nun von den ersten Indices gebildeten Complexion ebenso gross, wie bei der ersten Anordnung die in der Complexion der zweiten Indices.

Ich begnüge mich hier, zu zeigen, dass diese beiden Complexionen derselben Classe angehören müssen (beide gerade oder beide ungerade Permutationen von 1234...n sind); denn damit ist sofort auch der in Frage gestellte Fundamentalsatz der Determinantentheorie erwiesen und somit der Zweck dieser kleinen Arbeit erfüllt.

Werden zwei Factoren des Gliedes $a_{1,k_1} a_{2,k_2} a_{3,k_3} \dots a_{n,k_n}$ vertauscht, so vertauscht man dadurch jedesmal sowohl zwei zweite, als zwei erste Indices; und wenn diese successiven Vertauschungen so ausgeführt werden, dass zuletzt die Reihe der zweiten Indices $k_1 k_2 \dots k_n$ in 123...n übergegangen ist, so ist die Reihe 123...n der ersten Indices durch ebenso viele Vertauschungen in eine im Allgemeinen von beiden verschiedene Permutation der Indices übergegangen, welche aber von derselben Classe ist, wie $k_1 k_2 \dots k_n$, weil offenbar $k_1 k_2 \dots k_n$ durch ebenso viele Vertauschungen aus 12...n erhalten wird, wie 12...n aus $k_1 k_2 \dots k_n$. Da aber durch die Vertauschungen der Factoren aus einem Gliede der durch Permutation der zweiten Indices entwickelten Determinante das ihm gleiche in der durch die Permutation der ersten Indices hervorgehenden Entwickelung geworden ist, so ist mithin für je zwei solche Glieder auch die Gleichheit der Zeichen und damit die Identität beider Entwickelungen nachgewiesen.

Die Sache ist so ausserordentlich einfach, dass es mich sehr wundern sollte, wenn dieser, wie mir scheint, einzig richtige Beweis des Satzes nicht bereits von Anderen gefunden und publicirt sein sollte. Mir ist aber bis jetzt eine solche Darstellung der Sache nicht bekannt geworden, und da gegenwärtig die Schriften Salmon's und Baltzer's die Hauptquellen für das Studium der Determinanten sind und diese Lehre immer mehr auch in Gymnasien und Realschulen Eingang findet, wo nichts gelehrt werden sollte, was nicht durchaus klar gemacht werden kann, nehme ich keinen Anstand, diese kleine Erörterung zu veröffentlichen, obwohl ich mich dadurch in die Lage versetzt sehe, zum drittenmal gegen Herrn Professor Dr. Baltzer zu polemisiren, dessen trefflichen Werken ich sehr viele Anregung zu verdanken habe und deren ausserordentliche Vorzüge Niemand weniger verkleinern möchte, als meine Wenigkeit.

Schaffhausen, 6. Juni 1871. Prof. J. C. Becker.

XXIV. Kleine Beiträge zur Geometrie.

(Hierzu Taf. X, Fig. 1 — 3.)

I. Einfache Construction des Kegelschnittes durch fünf gegebene Punkte.

Seien P, S_1, S_2, A und B (Fig. 1) die gegebenen Punkte, so ziehe ich, um leicht eine beliebige Anzahl weiterer Punkte des durch sie bestimmten Kegelschnitts zu erhalten, eine beliebige Parallele zu $S_1 P$, welche von den

Strahlen $S_1 A$, $S_1 B$ beziehungsweise in M_1 und N_1 geschnitten werde, und ebenso eine Parallele zu $S_2 P$, welche die Strahlen $S_2 A$, $S_2 B$ in M_2 und N_2 treffe.

Diese beiden Geraden werden von den beiden projectivischen Strahlenbüscheln S_1 und S_2, deren entsprechende Strahlen sich in dem Kegelschnitte schneiden, in projectivisch ähnlichen Punktreihen geschnitten. Da nun M_1 und N_1, M_2 und N_2 entsprechende Punkte sind, so ist es sehr leicht, beliebig viele andere Paare entsprechender Punkte und damit auch Paare entsprechender Strahlen der Strahlenbüschel S_1 und S_2 zu finden.

II. Büschelcoordinatensysteme.

Wird eine Curve auf ein Parallelcoordinatensystem bezogen, so kann man sie auch ansehen als die Durchdringungscurve zweier auf einander bezogener Strahlenbüschel, deren Scheitel die unendlich fernen Punkte der Axen sind. Denn durch eine Gleichung zwischen Abscissen und Ordinaten werden nicht blos diese, sondern auch die dadurch bestimmten Strahlen einander zugeordnet. Es liegt nun nahe, die Scheitel der auf einander bezogenen Strahlenbüschel in endlichem Abstande vom Coordinatenanfang zu nehmen, wodurch wir eine neue Classe von Coordinatensystemen erhalten, wovon die Parallelcoordinaten nur ein besonderer Fall sind.

In dem berühmten Werke von Clebsch und Gordan über die Abel'schen Functionen wird ein solches Büschelcoordinatensystem (so darf ich es wohl nennen) angewendet, das auf folgender Betrachtung beruht: Bezeichnen S_1, S_2, S_3, S_4 beliebige lineare Ausdrücke in x und y, so stellen in Bezug auf ein beliebiges Linearcoordinatensystem

$$S_1 + k S_2 = 0, \quad S_3 + i S_4 = 0$$

zwei Strahlenbüschel dar, und jedem Werthepaar von k und i entspricht dann ein ganz bestimmter Punkt, einer Gleichung zwischen k und i also eine Curve, in welcher sich die durch dieselbe auf einander bezogenen Strahlen der Büschel schneiden.

In dem Folgenden möchte ich auf ein Büschelcoordinatensystem aufmerksam machen, durch welches die Strahlen zweier Büschel ohne Hilfe eines Parallelcoordinatensystems auf einander bezogen werden.

Um einen Strahl eines Büschels zu bestimmen, genügt es, den Abstand seines Durchschnittspunktes mit einer festen Geraden von einem Punkte derselben zu messen, wenn man noch feststellt, dass derselbe als positiv oder negativ anzusehen, je nachdem er nach der einen oder andern Seite von diesem festen Punkte abzumessen ist.

Sind nun $O_2 Y$, $O_1 X$ (Fig. 2) zwei feste Gerade, S_1, S_2 zwei Strahlenbüschel, P ein beliebiger Punkt in der Ebene; schneidet ferner PS_1 die Gerade $O_1 X$ in A, und PS_2 die Gerade $O_2 Y$ in B, so können

$$O_1 A = x, \quad O_2 A = y$$

als Coordinaten des Punktes P angesehen werden. Denn jedem Werthepaar von x und y entspricht ein und nur ein Punkt P, ausgenommen nur die Punkte der Geraden $S_1 S_2$, welche sämmtlich demselben Werthepaar von x und y entsprechen.

Zur Vereinfachung dieses Büschelcoordinatensystems kann man die Nullpunkte O_1, O_2 in den Schnittpunkt O der Axen $O_1 X$, $O_2 Y$, und diese selbst durch die Scheitel S_2, S_1 der Strahlenbüschel legen (wie beim gewöhnlichen Linearcoordinatensystem). Liegen die Scheitel beider Strahlenbüschel im Endlichen, so kann man sie auch (Fig. 3) auf eine und dieselbe Axe OAC beziehen und als Nullpunkt den Schnittpunkt derselben mit der Geraden $S_1 S_2$ annehmen.

Bei allen diesen Coordinatensystemen ist der Grad der Gleichung einer darauf bezogenen Curve nicht mehr von der Lage gegen das System unabhängig. Dennoch dürften bei manchen speciellen Untersuchungen sich auch diese Coordinatensysteme empfehlen, zumal in solchen Fällen, wo eine Curve höherer Ordnung in Bezug auf ein solches System durch eine Gleichung niedrigeren Grades ausgedrückt werden kann.

Aus den Elementen der neueren synthetischen Geometrie folgt sofort, dass ein durch die Scheitel S_1, S_2 gehender Kegelschnitt nothwendig durch eine Gleichung von der Form

$$1) \qquad axy + bx + cy + d = 0$$

dargestellt wird. Wählt man aber die Axen so, dass die im Kegelschnitt sich schneidenden projectivischen Strahlenbüschel S_1, S_2 auf denselben projectivisch ähnliche Punktreihen bestimmen, so ist die Gleichung des Kegelschnittes vom ersten Grade.

Da zwei Strahlenbüschel, deren entsprechende Strahlen sich auf einer Geraden schneiden, projectivisch sind und perspectivisch liegen, so folgt, dass auch die Gleichung der Geraden im Allgemeinen von der Form 1) sein muss. Schneidet ferner S_1, S_2 die Axe $O_1 X$ im Punkte $x = s_1$, die Axe $O_2 X$ im Punkte $y = s_2$, so muss die Gleichung der geraden Linie so beschaffen sein, dass sie durch das Werthepaar $x = s_1$, $y = s_2$ befriedigt wird.

Nehmen wir OX, OY (Fig. 2) als Axen eines Linearcoordinatensystems, ziehen $PQ \| OY$ und $PR \| OX$, so sind

$$OQ = PR = x_1, \quad OR = PQ = y_1$$

die auf dasselbe bezogenen Coordinaten des Punktes P.

Sei nun

$$DS_2 = \sigma_2, \quad CS_1 = \sigma_1, \quad S_2 S_1 = d,$$
$$OD = s_2, \quad OC = s_1, \quad OO_1 = a, \quad OO_2 = b,$$

so erhält man zur Transformation des Linearcoordinatensystems auf das Büschelcoordinatensystem die Gleichungen (wobei zur Abkürzung

$$\sigma_2 + d - \sigma_1 = c$$

gesetzt ist):

$$2)\quad \begin{cases} x = \dfrac{y_1\,[+s_1(\sigma_1-c)+ac]+s_2\sigma_1(x_1-a)}{s_2\sigma_1-cy_1}, \\ y = \dfrac{x_1\,[s_2(\sigma_2-c)+cb]+s_1\sigma_2(y_1-b)}{s_1\sigma_2-cx_1}. \end{cases}$$

Nach x_1 und y_1 aufgelöst:

$$3)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{s_1 s_2 \sigma_1 \sigma_2 (a+x) - s_1 \sigma_2 (b+y)\,[s_1(\sigma_1-c)+c\,(a+x)]}{[s_1(\sigma_1-c)-c\,(a+x)]\,[s_2(\sigma_2-c)+c\,(b+y)]+s_1 s_2 \sigma_1 \sigma_2}, \\ y_1 = \dfrac{s_1 s_2 \sigma_1 \sigma_2 (b+y) - s_2 \sigma_1 (a+x)\,[s_2(\sigma_2-c)+c\,(b+y)]}{[s_1(\sigma_1-c)-c\,(a+x)]\,[s_2(\sigma_2-c)+c\,(b+y)]+s_1 s_2 \sigma_1 \sigma_2}. \end{cases}$$

Wählt man die Scheitel S_1, S_2 auf den Axen OY, OX und lässt O_1 und O_2 mit O zusammenfallen, setzt man also

$$\sigma_1 = \sigma_2 = c = d, \quad a = b = 0,$$

so erhält man einfacher:

$$4)\quad x = \frac{s_2 x_1}{s_2 - y_1}, \quad y = \frac{s_1 y_1}{s_1 - x_1}$$

und

$$5)\quad x_1 = \frac{s_1 x\,(y-s_2)}{s_1 s_2 - xy}, \quad y_1 = \frac{s_2 y\,(x-s_1)}{s_1 s_2 - xy}.$$

Um auch das in Fig. 3 dargestellte einaxige Büschelcoordinatensystem mit einem Linearcoordinatensystem vergleichen zu können, wähle ich ein System, in welchem OX als Abscissen-, OS_1 als Ordinatenaxe angenommen. Ist $PQ \parallel OS_1$ und

$$OQ = x_1, \quad QP = y_1, \quad OA = x, \quad OB = y, \quad OS_1 = s_1, \quad OS_2 = s_2,$$

so hat man

$$6)\quad y = \frac{s_2 x_1}{s_2 - y_1}, \quad x_2 = \frac{s_1 y_1}{s_2 - y_2}$$

und

$$7)\quad y_1 = \frac{s_1 s_2 (y-x)}{s_1 y - s_2 x}, \quad x_1 = \frac{xy\,(s_1 - s_2)}{s_1 y - s_2 x}.$$

Aus den Gleichungen 6) folgt, dass der Punkt P um Q als Mittelpunkt einen Kreis beschreibt, wenn OS_2S_1 sich um O dreht.

Dagegen lehrt die erste der Gleichungen 7), dass P eine Parallele zu OB beschreibt, wenn die Strahlen S_2B, S_1A um ihre Scheitel sich so drehen, dass das Verhältniss $OA : OB$ constant bleibt.

Die sämmtlichen gefundenen Transformationsformeln lehren, dass, wenn eine Curve n^{ten} Grades auf ein Büschelcoordinatensystem bezogen wird, ihre Gleichung im Allgemeinen vom $2n^{\text{ten}}$ Grade sein wird. Umgekehrt wird aber auch eine Curve, welche auf ein Büschelcoordinatensystem durch eine Gleichung n^{ten} Grades ausgedrückt ist, im Allgemeinen vom $2n^{\text{ten}}$ Grade sein.

Werden demnach dieselben Gleichungen mit zwei Variabeln einmal auf ein Linearcoordinatensystem, das andere Mal auf ein Büschelcoordinatensystem bezogen, so stehen

die auf die letztere Art erhaltenen Gebilde zu denen auf die erstere Art erhaltenen in einer Verwandtschaft zweiten Grades. In den Büschelcoordinatensystemen hat man demnach neue Mittel, diese Verwandtschaft zu studiren.

III. Eine polygonometrische Formel.

Der Flächeninhalt eines ebenen Polygones, dessen auf einander folgende Seiten $a_1, a_2 \dots a_n$ mit einer beliebigen Richtung die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_n$ bilden, ist

$$f_n = \tfrac{1}{4} \sum_{i=1}^{i=n} a_i^2 \sin 2\alpha_i + \sum_{i=2}^{i=n} \left(a_i \cos \alpha_i \sum_{k=1}^{k=i-1} a_k \sin \alpha_k \right)$$
$$= \tfrac{1}{4} \sum_{i=1}^{i=n} a_i^2 \sin 2\alpha_i + \sum_{i=1}^{i=n-1} \left(a_i \sin \alpha_i \sum_{k=i+1}^{k=n} a_k \cos \alpha_k \right).$$

Um diese Formel zu entwickeln, nehme ich ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Hilfe, dessen positive Abscissenrichtung mit der angenommenen Richtung übereinstimmt, und zwar des leichteren Verständnisses wegen von der Lage, dass das ganze Polygon in den positiven Quadranten fällt. Seien nun bei negativem Umlaufe (wie der Zeiger einer Uhr) von Seite a_1 beginnend die Coordinaten der auf einander folgenden Eckpunkte $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3 \dots x_n y_n$, sei ferner α_i der Winkel, den die positive Abscissenaxe beschreibt, wenn sie sich in positivem Sinne so lange dreht, bis sie die Richtung erhält, in welcher a_i bei negativem Umlaufe durchlaufen wird, so hat man für alle i von $i=1$ bis $i=n-1$:

$$1)\qquad a_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{\cos \alpha_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\sin \alpha_i}$$

und

$$2)\qquad a_n = \frac{x_1 - x_n}{\cos \alpha_n} = \frac{y_1 - y_n}{\sin \alpha_n}.$$

Andererseits ist bekanntlich

$$3)\qquad f_n = \tfrac{1}{2} \{ (y_1 + y_2)(x_2 - x_1) + (y_2 + y_3)(x_3 - x_2) + \dots + (x_1 - x_n)(y_1 + y_n) \}.$$

Nun folgt aus 1):

$$y_2 = a_1 \sin \alpha_1 + y_1,$$
$$y_3 = a_2 \sin \alpha_2 + y_2 = a_2 \sin \alpha_2 + a_1 \sin \alpha_1 + y_1$$

u. s. w. Allgemein:

$$4)\qquad y_i = y_1 + a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + \dots + a_{i-1} \sin \alpha_{i-1};$$

endlich die bekannten Formeln:

$$5)\qquad \begin{cases} 0 = a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + \dots + a_n \sin \alpha_n, \\ 0 = a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + \dots + a_n \cos \alpha_n. \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich ferner für alle i von $i=1$ bis $i=n-1$:

$$y_{i+1} + y_i = 2 y_1 + a_i \sin \alpha_i + 2 (a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + \dots + a_{i-1} \sin \alpha_{i-1}).$$

Dies in 3) eingesetzt, giebt mit Rücksicht auf die zweite der Gleichungen 5):

$$f_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n} a_i^2 \sin\alpha_i \cos\alpha_{i1} + a_1 a_2 \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 + (a_1 \sin\alpha_1 + a_2 \sin\alpha_2)\, a_3 \cos\alpha_3$$
$$+ (a_1 \sin\alpha_1 + a_2 \sin\alpha_2 + a_3 \sin\alpha_3)\, a_4 \cos\alpha_4 + \ldots$$
$$+ (a_1 \sin\alpha_1 + a_2 \sin\alpha_2 + \ldots + a_{n-1} \sin\alpha_{n-1})\, a_n \cos\alpha_n,$$

was mit den oben für f gegebenen Ausdrücken identisch ist.

Diese, wie mir scheint, noch nicht bekannte Formel enthält zwar n Glieder mehr, wie die bekannte von L'Huilier (*Polygonométrie, p.* 8; siehe auch Baltzer, Elemente, II. Bd. 6. Buch S. 6, Satz 12), hat aber für grössere n den Vorzug vor derselben, dass zwischen den in ihr vorkommenden Grössen immer nur die zwei bekannten Relationen 5) bestehen, während die in die Formel von L'Huilier eingehenden Grössen durch eine viel grössere Anzahl und überdies durch keine bekannten Formeln gegebene Relationen verbunden sind.

Schaffhausen. Prof. J. C. Becker.

XXV. Ableitung des Wärmeverhältnisses bei constantem Volum und Druck $\left(\frac{c}{c'}\right)$ aus der mechanischen Wärmetheorie.

Das Verhältniss derjenigen Wärmemenge, welche nöthig ist, ein Gas bei constantem Volum und Druck auf dieselbe Temperatur zu erwärmen, kann nicht experimental festgestellt werden, weil die Gase bei ihrem geringen Gewichte und kleiner Wärmecapacität niemals ohne den Einfluss starker und gutleitender Wände gehandhabt werden können. Es ist deshalb auch dies Verhältniss auf einem Umwege aus der wirklichen Schallgeschwindigkeit im Vergleich zur theoretischen abgeleitet und zu 1,417 gefunden worden. Es ist nun überall wünschenswerth, wenn solche theoretische Grössen auch noch auf einem andern Wege gefunden werden können, wie die Geschwindigkeit des Lichtes aus astronomischen Beobachtungen und Experimenten mit Apparaten, das specifische Gewicht der Erde aus dem Mondumlauf und den Versuchen von Cavendish und Reich, und ähnliche, und es bietet eine grosse Sicherheit, wenn zwei auf verschiedenen Wegen gefundene Grössen übereinstimmen. Aus diesem Grunde versuche ich die Ableitung des Verhältnisses $\frac{c}{c'}$ aus der mechanischen Wärmetheorie.

Man habe 1 Liter Luft von 0^0 und 760^{mm} Druck, und erwärme es bei constantem Druck auf 273^0C. Es hat dann sein Volum verdoppelt, aber sein Druck ist unverändert geblieben. Denkt man sich das Liter Luft in einem Cylinder von 1 Quadratdecimeter Querschnitt, so nimmt es darin eine Höhe von 0,1 Mtr. ein. Durch die Erwärmung wird der ohne Reibung gedachte Kolben um 0,1 Mtr. gehoben und übt bei dem Gewichte der Atmosphäre von 103,33 K°. auf 1 Quadratdecimeter eine Arbeit von

$$103{,}33 \times 0{,}1 = 10{,}333 \text{ K}^0\text{Mtr.}$$

aus. Nimmt man das auf anderem Wege gefundene Aequivalent der Arbeit 424 K°Mtr. = 1 Wärmeeinheit an, so entsprechen obige 10,333 K°Mtr. einer Wärmemenge von $\frac{10,333}{424} = 0,0244$ W. E. Diese Wärmemenge ist also hinreichend, 1 Liter Luft bei gleichbleibendem Druck auf 2 Liter auszudehnen.

Die specifische Wärme der Luft bei gleichbleibendem Druck ist von Regnault zu 0,2377 von der Menge eines gleichen Gewichtes Wasser auf experimentalem Wege festgestellt worden. 1 Liter Luft wiegt 0,001293 K°. und hat von 0° bis 273° C. eine Wärmemenge von

$$273 \times 0,001293 \times 0,2377 = 0,083311 \text{ W.E.}$$

aufgenommen. Wäre die Luft bei constantem Volum auf 273° C. erwärmt worden, so wären jene 0,0244 W. E. weniger verbraucht worden, die auf die Ausdehnung kamen und sich aus der geleisteten Arbeit berechneten. Es wären also zur Erwärmung bei constantem Volum

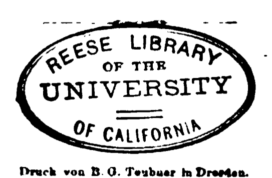
$$0,083811 - 0,0244 = 0,05941 \text{ W.E.}$$

verbraucht worden und das Verhältniss $\frac{c}{c'}$ ist $= \frac{0,083811}{0,05941} = 1,411$, was mit dem aus der Schallgeschwindigkeit abgeleiteten 1,417 sehr gut stimmt.

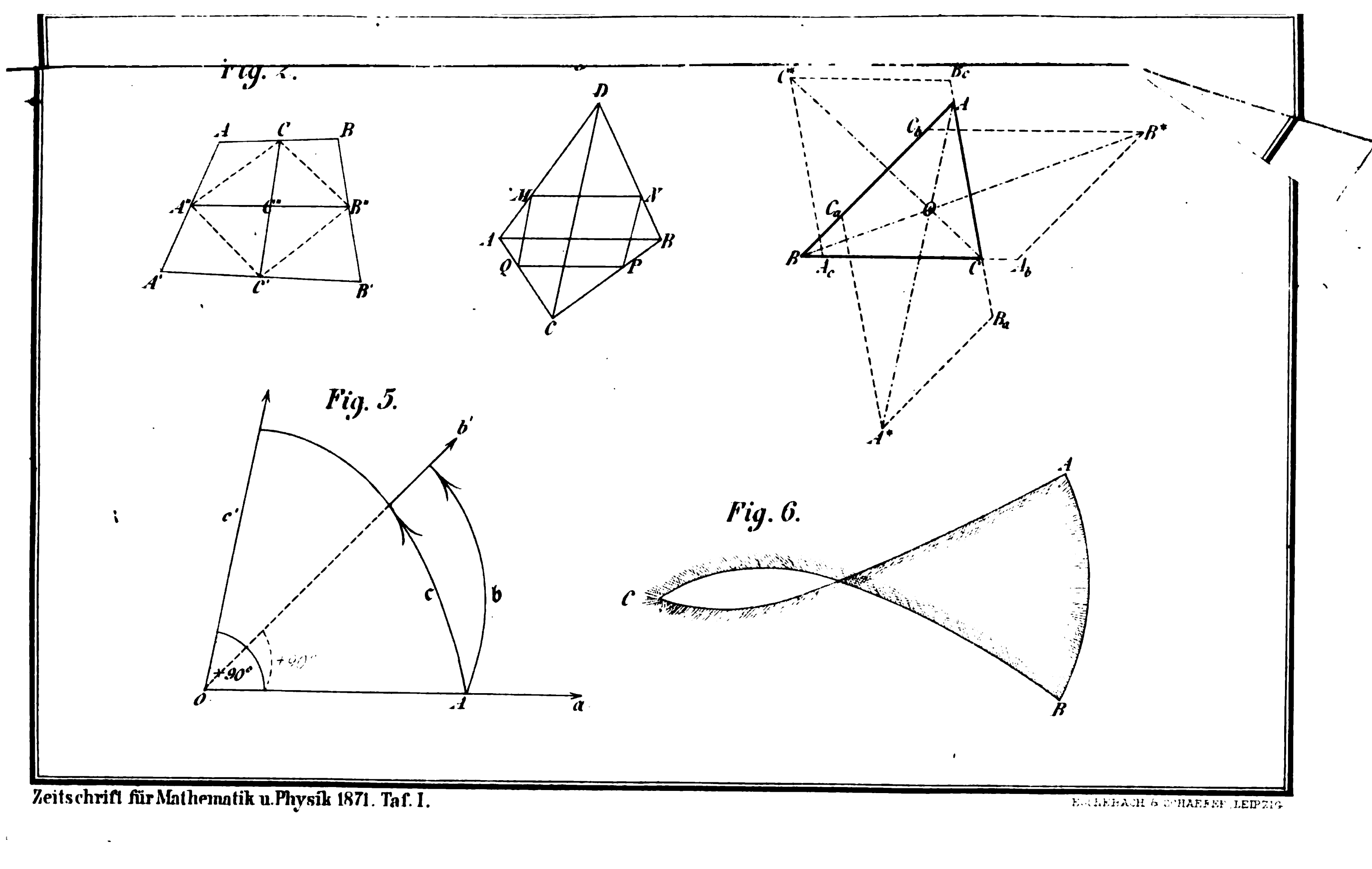
Behalten wir die specifische Wärme bei constantem Druck = 0,2377 bei, so ergiebt sich jene bei constantem Volum, die wir als x einführen, aus der Gleichung $273 \times 0,001293 \,.\, x = 0,0591$, woraus $x = 0,1683$ (bei Müller, Physik, 6. Aufl., 2,795 = 0,1686).

Wenn man die auf 273° C. erwärmte und auf 2 Volum ausgedehnte Luft plötzlich wieder auf 1 Volum zusammendrückt, so muss sie die Temperatur $273 \times 1,411 = 385,2$ zeigen; man hat alsdann zuletzt eine höhere Spannung als 2 Atmosphären zu überwinden gehabt. Denkt man sich aber die Compression so langsam vor sich gehend, dass der Ueberschuss über 273° C. entweichen kann, so ist zuletzt eine innere Spannung von 2 Atmosphären vorhanden, die Temperatur um 112,2° C. gesunken und die 0,0244 W.E. sind entwichen. Könnte man die bei der Compression auf 1 Volum eintretende höhere Spannung durch den Versuch bestimmen, was Witte (Pogg. 138, 155) versucht hat, so liesse sich auch daraus der Quotient $\frac{c}{c'}$ berechnen. Dies scheint aber nicht möglich, weil das kleine Gewicht der Luft durch die Metallwände rasch abgekühlt wird und niemals die Temperatur 385,2° C. annehmen kann.

Bonn. Dr. Mohr.

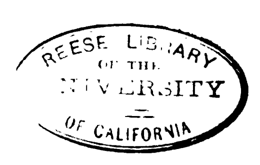


Druck von B. G. Teubner in Dresden.



Zeitschrift für Mathematik u. Physik 1871. Taf. I.

E…LEBACH & SCHAEFER LEIPZIG


REESE LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Literaturzeitung

der

Zeitschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.



Sechszehnter Jahrgang.



LEIPZIG,

Verlag von B. G. Teubner.

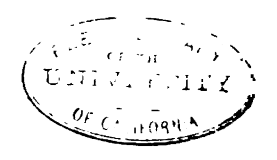
1871.




UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Inhalt.




UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Literaturzeitung.

Recensionen.

1. **Der Inquisitionsprocess des Galileo Galilei**, eine Prüfung seiner rechtlichen Grundlage nach den Acten der römischen Inquisition von EMIL WOHLWILL. Berlin 1870, Verlag von Robert Oppenheim. 96 S.
2. **Il Processo Galileo** *riveduto sopra documenti di nuova fonte dal Prof. Comm. Silvestro Cherardi segretario generale indi Ministro interino dell' istruzione pubblica a Roma ne* 1849. *Estra dei fascicoli* 1° *e* 2°, *Vol. III*, 1° *giugne e* 1° *luglio* 1870 *della Rivista Europea diretta in Firenze dal Cav. Prof. Angelo de Gubernatis.* 60. *S.*

Wenn Referent schon in einer Besprechung des Martin'schen Buches über Galilei in der Literaturzeitung des XIII. Bandes dieser Zeitschrift seine Verwunderung laut werden lassen durfte, dass der vielfach behandelte Gegenstand noch immer neue Seiten darbiete, welche den früheren Bearbeitern entgangen waren, um wie viel mehr wird er verpflichtet sein, heute den gleichen Gefühlen Ausdruck zu geben, wo zwei Forscher gleichzeitig mit einer historischen Entdeckung von grösster Tragweite hervortreten, welche vor ihnen kein Geschichtskundiger auch nur ahnte, und welche Alles über den Haufen wirft, was man bisher über den Process Galilei's zu wissen glaubte. Um es gleich mit einem Worte zu sagen: durch die Herren Wohlwill und Gherardi ist unabhängig von einander, aber sich bestätigend und ergänzend der Beweis geliefert worden, dass das Protocoll von 1616, welches die eigentliche juristische Grundlage des Anklageverfahrens von 1633 bildet, nicht mehr noch weniger als eine nichtswürdige Fälschung ist!

Gehen wir nun zunächst mit Herrn Wohlwill auf die genauere Beweisführung ein. Im Winter des Jahres 1615 auf 1616 wurde, während Galilei's Anwesenheit in Rom, eine doppelte Frage zur Entscheidung gebracht: die Frage, ob das copernicanische System überhaupt mit dem Glauben in Einklang zu bringen sei, und die zweite Frage, ob Galilei durch seine Schrift über die Sonnenflecken sich als Befolger jener Lehre mit der Religion in Widerspruch gesetzt habe. Die doppelte Frage wurde doppelt

beantwortet; das Verfahren gegen die copernicanischen Lehre endete mit einer öffentlichen Verurtheilung, das gegen Galilei mit einer vertraulichen Warnung. Unter dem Datum des 19. Februar ward von den Qualificatoren der Inquisition die Lehre des Copernicus als thöricht und absurd in der Philosophie, als theilweise irrig, theilweise geradezu ketzerisch im Glauben gebrandmarkt, und am 5. März erschien das Decret, welches Schriften wie die des Pater Foscarini, welche den Nachweis der Wahrheit der copernicanischen Lehre zu führen bestimmt waren, durchaus verbot, die Schriften des Copernicus selbst dagegen zur Veränderung in dem Sinne verurtheilte, dass die Erdbewegung eine blosse Hypothese sei, von welcher aus mathematisch richtige, philosophisch zweifelhafte, weil auf zweifelhafter Grundlage beruhende Folgerungen gezogen wurden. Was mit Bezug auf Galilei und zwar am 25. Februar beschlossen wurde, darüber geben uns die Processacten, welche im Vatican aufbewahrt, Herrn Henri de l'Epinois 1867 zur Verfügung standen, deutliche Auskunft. Cardinal Bellarmin hatte von Papst Paul V. den Auftrag, Galilei vor sich zu laden und ihn zu ermahnen, dass er die copernicanischen Ansichten aufgebe, und wenn er sich weigern sollte zu gehorchen, sollte der Pater Commissarius der heiligen Inquisition in Gegenwart von Notar und Zeugen ihm den Befehl ertheilen, gänzlich darauf zu verzichten, eine derartige Lehre und Meinung zu lehren (docere), zu vertheidigen (defendere), oder zu erörtern (tractare); wenn er aber sich nicht dabei beruhigte, sollte man ihn in's Gefängniss werfen. Dieses Urtheil blieb seiner Existenz wie seinem Wortlaut nach volle 250 Jahre unbekannt. Die Wirkung desselben dagegen ist seit geraumer Zeit durch zwei Actenstücke bezeugt, durch einen Brief des Cardinals Bellarmin an Galilei und durch ein in den Processacten des Vatican vorhandenes Protocoll, dessen ganzen Wortlaut wir freilich auch erst durch Herrn de l'Epinois erhalten haben. Beide Actenstücke wollen wir hier in den Uebersetzungen mittheilen, welche Herr Wohlwill den Originaltexten beigefügt hat. Darnach lautet der Brief folgendermassen: „Rom, 26. Mai 1616. Wir Robert Cardinal Bellarmin, der wir vernommen, dass der Herr Galileo Galilei verläumdet und ihm zur Last gelegt worden sei, in unsere Hand abgeschworen zu haben, so wie dass aus diesem Anlass ihm heilsame Büssungen auferlegt worden seien, und da wir um ein Zeugniss für die Wahrheit angegangen sind, erklären, dass der gedachte Herr Galileo weder in unsere Hand, noch vor anderen in Rom, noch, so viel wir wissen, anderswo irgend eine seiner Ansichten und Lehren abgeschworen hat, so wie auch, dass ihm keine heilsamen Büssungen auferlegt, sondern nur die von Unserem Herrn abgegebene und von der heiligen Congregation des Index publicirte Erklärung zur Kenntniss gebracht worden ist, des Inhalts, dass die dem Copernicus beigemessene Lehre, dass die Erde sich um die Sonne bewege und die Sonne im Centrum des Weltgebäudes stehe, ohne sich von Aufgang zu

Niedergang zu bewegen, der heiligen Schrift zuwider ist und somit weder für wahr gehalten, noch vertheidigt werden darf. Zu Urkund dessen haben wir Gegenwärtiges eigenhändig geschrieben und unterschrieben. Wie oben Robert Cardinal Bellarmin." Das Protocoll dagegen in den Processacten, unmittelbar an den schon erwähnten Beschluss vom 15. Februar sich anschliessend, lautet: „Freitag am 26. desselben. In der gewöhnlichen Residenz des Herrn Cardinals Bellarmin hat der Herr Cardinal, nachdem genannter Galilei vorgeladen und vor Sr. Eminenz erschienen war, in Gegenwart des sehr ehrwürdigen Bruders Michael Angelo Segnitius de Lauda vom Dominicanerorden, des Generalcommissars des heiligen Officium, vorgenannten Galilei ermahnt wegen des Irrthums obengenannter Meinung, und dass er sie aufgeben möge, und darauf folgend und sofort in meiner und der Zeugen Gegenwart und während derselbe Herr Cardinal gleichfalls noch anwesend war, hat der obengenannte Pater Commissarius dem vorgenannten noch ebendaselbst anwesenden und auf Vorladung erschienenen Galilei im Namen Sr. Heiligkeit und der ganzen Congregation des heiligen Officium die Anweisung und den Befehl ertheilt, dass er die obengenannte Meinung, dass die Sonne das Centrum der Welt und unbeweglich sei und die Erde sich bewege, gänzlich aufgebe und sie fernerhin in keinerlei Weise für wahr halte, lehre oder vertheidige, in Worten oder Schriften; sonst werde gegen ihn im heiligen Officium verfahren werden; und bei diesem Befehl hat derselbe Galilei sich beruhigt und zu gehorchen versprochen. Worüber verhandelt zu Rom an oben gemeldetem Ort, in Gegenwart von Badino Nores aus Nicosia im Königreich Cypern und Augustin Mongard aus einem Orte des Abtes Rollz diocesis Politianeti, Hausgenossen des genannten Herrn Cardinals als Zeugen." Wer diese beiden Erzählungen desselben Ereignisses vor Augen hat, muss auf die Widersprüche aufmerksam werden, welche darin enthalten sind. Dem Briefe nach waren Bellarmin und Galilei allein, oder wenn noch Jemand zugegen war, so erschien dessen Gegenwart unerheblich genug, um unerwähnt zu bleiben; dem Protocolle nach wohnte der Inquisitionscommissar von Anfang an der Unterredung bei, eine Persönlichkeit, welche man nicht leicht zu nennen vergessen hätte. Dem Briefe nach wurde dem Galilei nur mitgetheilt, die dem Copernicus beigemessene Lehre dürfe weder für wahr gehalten, noch vertheidigt werden; das Protocoll hat ausserdem die verfänglichen Worte „in keinerlei Weise" (nec eam quovis modo teneat etc.), mit deren Hilfe jede, sogar eine hypothetische Darstellung zum Verbrechen angerechnet werden konnte. Das Protocoll weiss von einer Drohung, die Inquisition werde einschreiten, weiss von Notar und Zeugen, durch welche diese Drohung an formeller Bedeutung gewann; der Brief weiss weder von Notar, noch von Zeugen, noch von einer Drohung. Das Protocoll endlich lässt Galilei zu gehorchen versprechen; der Brief stellt in directe Abrede, dass ein Schwur

von Galilei's Seite geleistet worden wäre. Martin hat auch wirklich schon (Galilée p. 79) auf die Unverträglichkeit der zwei Darstellungen mit einander hingewiesen, wenn er auch nicht die schreienden Widersprüche hervorhebt, von welchen soeben die Rede war, sondern sich damit begnügt, an den Brief eine Kritik anzulegen, welche bemängelt, dass 1. nur von einer dem Copernicus beigemessenen Lehre die Rede sei, statt von der offenkundig dem Copernicus eigenthümlichen; dass 2. die gegen jene Lehre abgegebene Erklärung dem Papste zugeschrieben wird, während sie von der Inquisitionsbehörde herstammte; dass 3. keinenfalls am 26. Februar schon eine Erklärung habe insinuirt werden können, welche erst am 5. März für die Oeffentlichkeit vorhanden war. Aus diesen Ungenauigkeiten folgert Martin die Unzuverlässigkeit des Briefes, ja mehr noch die absichtliche Verkehrung der Sachlage durch denselben. „An die Stelle der wirklichen und gewichtigen Mahnung setzt der Brief des Cardinals Bellarmin eine der Einbildungskraft entstammende. Und warum? Weil die Inquisition über die Mahnung vom 26. Februar das Geheimniss bewahrt wissen wollte: die Geheimnisse der Inquisition mussten aber um jeden Preis bewahrt werden, selbst, wie es scheint, auf Kosten der Wahrheit." Herr Wohlwill ist durch die vorhandenen Widersprüche freilich auch zu der Ueberzeugung geführt worden, eines der beiden Schriftstücke müsse es mit der Wahrheit nicht genau nehmen, aber er findet die Lüge im Protocolle, und da nicht anzunehmen ist, dass ein Protocoll sofort falsch geführt werde, was ja durch Uebereinstimmung sämmtlicher an der Verhandlung betheiligter Personen nachgewiesen werden könnte, so sieht er sich veranlasst, in dem Protocolle eine spätere absichtliche Fälschung zu erkennen, welche erst zu einer Zeit auftrat, als die Fälschung nicht nachzuweisen war.

Als betheiligte Personen kommen besonders in Betracht: der Notar, Cardinal Bellarmino und Galilei, sowie der Generalcommissar der Inquisition. Als nun im Jahre 1633 der Process Galilei's geführt wurde, war von diesen Personen Galilei und der Inquisitionscommissar, wenn Letzterer noch lebte, Partei; der wichtige Gewährsmann, Cardinal Bellarmino war seit dem 17. September 1621 todt; der Notar war nicht zu ermitteln, denn gegen alle Sitte und Ordnung ist er in dem Protocolle, welches er geführt haben soll, gar nicht genannt. Das ist schon ein bedeutsames Zeichen gegen die Echtheit des Protocolls. Aber andere Beweisgründe kommen zur Unterstützung hinzu. Herr Wohlwill hat eben so scharfsinnig als klar durchgeführt, dass das Benehmen und die mündlichen sowie die schriftlichen Aeusserungen Galilei's sowohl 1616 kurz nach dem 26. Februar, als in der Zwischenzeit zwischen 1616 und 1633, als in den Constituten von 1633 Wort für Wort mit dem Briefe Bellarmin's in Uebereinstimmung sind, dagegen vollständig unverständlich der Beweis eines durch 17 Jahre fortgesetzten Heuchlersystems sind, wenn das Protocoll die

Wahrheit enthält. Er hat ebenso gezeigt, dass der Thatbestand, wie er im Briefe enthalten ist, gar kein Einschreiten gegen Galilei im Jahre 1633 möglich gemacht hätte, dass wer dem Galilei Etwas anhaben wollte, vielmehr einer solchen Darstellung bedurfte, wie das Protocoll sie uns überliefert. Und nun wird plötzlich gerade in der Zeit, in welcher man ein solches Mittel, den schändlichen Gelehrten, welcher das Unrecht begangen hat, seine wissenschaftlichen Gegner immer zu schlagen und lächerlich zu machen, mit Gold aufwiegen musste, in der Zeit, in welcher man Urban VIII. dem früheren Freunde abwendig gemacht hatte und also den unbeschützten Greis vor Gericht ziehen konnte, gerade in dieser Zeit wird plötzlich jenes Protocoll in alten Acten wieder „gefunden"! Wahrlich ein so eigenthümlich glücklicher Fund, dass Herr Wohlwill, ohne selbst der Verwegenheit angeklagt zu werden, an eine zweckmässige Unterschiebung, an eine Fälschung glauben durfte.

Eines blieb indessen immer noch zu wünschen: eine weitere Prüfung der Handschrift des Protocolles, ob vielleicht daraus noch weitere Gründe gegen oder für deren Echtheit sich ergeben möchten. Herr Wohlwill wünscht dringend, eine solche Untersuchung möge vorgenommen werden, und was bei Veröffentlichung seiner Abhandlung kaum möglich schien, heute dürfte es ein Leichtes sein, nachdem die weltliche Macht in Rom auf den König von Italien übergegangen. Aber eigenthümlicher Zufall! Jetzt ist eine solche Prüfung durchaus unnöthig, wenn auch immer noch interessant genug. Dass nämlich eine Fälschung vorliegt, ist inzwischen durch Herrn Gherardi unwiderleglich nachgewiesen.

Herr Gherardi war persönlich an jenen Ereignissen des Jahres 1848 und 1849 betheiligt, welche für eine kurze Zeit die päpstliche Herrschaft aus Rom entfernten. Mitglied des von Pius IX. einberufenen Parlamentes, Mitglied der römischen constituirenden Versammlung, Staatssecretär, dann Unterrichtsminister der revolutionären Regierung, das waren die Stellen, welche er der Reihe nach bekleidete, bis er als politischer Flüchtling in Genua die wiedergewonnene Muse den Wissenschaften auf's Neue zuwenden durfte. Seine amtliche Stellung in Rom hatte ihn in Berührung mit den Acten und sonstigen Schriftstücken der Inquisition gebracht, welche vom December 1848 bis April 1849 in dem Archive des Inquisitionspalastes selbst durch Regierungsmassregeln vor der Wuth des Volkes geschützt werden mussten, dann aber nach der Appollinariuskirche verbracht wurden, wo Herr Gherardi die werthvolle Sammlung einen Augenblick sah, aber, wie er selbst erzählt, nur einen Augenblick, da er die Verantwortlichkeit der Oberaufsicht über eine solche Bibliothek durchaus ablehnte. Genug, Herr Gherardi hatte die Gelegenheit, die historische Schatzkammer zu durchmustern, welche vorher und nachher strenge verschlossen geblieben ist, wenn auch einzelne Kleinodien derselben den Weg in die Aussenwelt fanden, als die französische Armee die „Rettung" Roms vollzog

und unmittelbar darauf etwa 50 Quartbände voll Inquisitionsacten in Paris an den Herzog von Manchester verkauft werden konnten, welche gegenwärtig das Eigenthum des Dubliner Trinity - College sind. Herr Gherardi erkannte damals, worüber man sonst nicht gut unterrichtet zu sein scheint, dass die Acten der Inquisition wesentlich in zwei Rubriken aufbewahrt wurden, als Decreta und als Processus. Beide sind oder waren wenigstens damals in Bände gebunden, denen jeweils ein fortlaufendes Sachregister entsprach. Die Decrete enthielten die Sitzungsprotocolle und die Beschlüsse der heiligen Congregation; die Processe enthielten die Verhöre der Angeklagten und der Zeugen, alle auf die Verhandlungen sich beziehenden Schriftstücke und endlich die Urtheile. Ein drittes Hauptregister — Rubricelle bezeichnet — diente Alles auf eine bestimmte Sache oder Person Bezügliche sowohl in den Bänden der Decrete als der Processe aufzufinden. Man begreift es, dass Herr Gherardi trotz angestrengter Amtsthätigkeit, welcher er sich unterziehen musste, sich nicht enthalten konnte, Blicke in jene Acten zu werfen, in denen er hoffen durfte, auf jeder Seite auf Geheimnisse zu stossen, fesselnd und spannend wie ein Roman, aber leider keine Erfindung einer dichterischen Einbildungskraft, sondern von Wort zu Wort traurige, geschichtliche Wahrheit. Herr Gherardi benutzte mit Vorliebe die Decrete, welche, wenn man so sagen darf, als noch unzugänglicher, als die schon geheim genug gehaltenen Processe angesehen werden dürfen, welche deshalb auch weniger Lücken und dergleichen zeigen als die Processe, wenn sie auch ein und dasselbe zum Gegenstand haben.

Das ganz besondere Augenmerk des Herrn Gherardi war auf die Geschichte der Verfolgungen gerichtet, welchen Galilei unterworfen worden ist. Schon hatte er zehn wichtige Stellen aus den Decreten ausgeschrieben, welche sich auf dieses Opfer der Inquisition bezogen, als er auf einen schon vorhandenen Auszug stiess, welcher offenbar in officieller Weise schon eine Reihe von Jahren vorher angefertigt worden war, und welcher in den zehn von Herrn Gherardi selbstgefundenen Stellen so buchstäblich genau war, dass daraus auch auf die vollständige Genauigkeit der Rückschluss gezogen werden durfte, und dass Herr Gherardi aufhörte, mühsam zusammenzusuchen, was hier schon vereinigt vorlag. Mit jenem Auszuge, von welchem vor der Abhandlung des Herrn Gherardi nie Etwas in die Oeffentlichkeit gedrungen ist, verhält es sich, wie folgt: Bekanntlich waren im Jahre 1798 wie so vieles Andere auch die Processacten Galilei's nach Paris geschleppt worden und nicht nach Rom zurückgekehrt. Der Herzog von Blacas, Hausminister während der Restauration, gestand zwar das Vorhandensein dieser Acten in einem bei Marino Marini (Galileo e l'Inquisizione S. 145 flgg.) abgedruckten Briefe vom 15. December 1814 zu, allein schon am 2. Februar 1815 sollten nach einem zweiten Briefe desselben Ministers die Acten sich im Cabinete des Königs befinden, welcher

sie durchzulesen beabsichtige, und am 6. November 1815 werden sie als verschleppt bezeichnet; erst am 8. Mai 1850 kehren die Processacten in den Vatican zurück, nachdem Graf Rossi sich 1845 verpflichtet hatte, neue Nachforschungen in dem Archive des Ministerium der auswärtigen Angelegenheiten in Paris anstellen zu lassen und für die Auslieferung alles etwa Gefundenen sorgen zu wollen, falls von päpstlicher Seite eine vollständige und unparteiische Veröffentlichung zugesichert würde. Marino Marini versichert zwar, er habe nie aufgehört, in Paris zu mahnen, allein aus der ganzen Zeit nach 1817 ist kein darauf hinzielendes Schriftstück bekannt gegeben. Nun scheint um das Ende des Jahres 1834 ein solcher Mahnbrief nach Prag an den dort ein Flüchtlingleben führenden Herzog von Blacas abgegangen zu sein, und es scheint ferner diesem Briefe die Abschrift aller den Galilei berührenden Stellen dem Decrete beigelegen zu haben, vielleicht um dadurch die Bereitwilligkeit zu constatiren, die gesammten Actenstücke aus Decreten und Process zusammen vereinigen zu wollen. Diese Folgerungen zieht wenigstens Herrn Gherard aus dem Umstande, dass dem mehrerwähnten vollständigen Auszuge aus den Decreten ein Bruchstück eines Briefes des Herzog von Blacas, datirt Prag, 20. Januar 1835, beigeheftet ist, in welchem dieser erstlich behauptet, er habe vergebliche Nachforschungen nach den Galilei-Acten angestellt, dann aber noch bemerkt, der Augenblick scheine ihm nicht geeignet, sich um die Wiedererlangung zu bemühen. Wir finden es unnöthig, uns in eine Polemik über die Vermuthung des Herrn Gherardi bezüglich jenes Briefes und jenes Auszuges einzulassen. Gewiss lässt das Vereinigtsein beider auch noch ganz andere, vielleicht richtigere Erklärungen zu. Allein darauf kommt es ja gar nicht an, sondern wir begnügen uns mit der Thatsache, dass ein solches Heft von Herrn Gherardi seiner Zeit aufgefunden wurde, und dass er mit Hinblick auf dasselbe es unterliess, selbst weitere Notizen zu sammeln. Nun kam die Niederwerfung der römischen Revolution. Herr Gherardi musste fliehen und konnte nur seine eigenen 10 Excerpte mitnehmen. Endlich ist er auf nicht weiter erörterte Weise in den Besitz jenes Auszuges oder einer Abschrift desselben — auch dieses bleibt im Unklaren — gelangt und theilt in der in der Ueberschrift genannten Abhandlung die sämmtlich 32 Bruchstücke aus den Decreten mit. Wir wollen hier nur das sechste Excerpt mittheilen, welches in deutscher Uebersetzung des lateinischen Urtextes etwa folgendermassen lauten würde: „Am 3. März 1616. Zuerst berichtete Cardinal Bellarmin, dass dem Galileo Galilei dem Mathematiker gemäss Befehls der heiligen Congregation die Ermahnung geworden, er solle von der bisher durch ihn für wahr gehaltenen Meinung ablassen, als wenn die Sonne Mittelpunkt der Weltkugel und unbeweglich, die Erde aber beweglich wäre, und dass er sich dabei beruhigt habe; hierauf wird der Beschluss der Indexcongregation über das Verbot, beziehungsweise über die einstweilige Unterdrückung der Schriften des

Nicolaus Copernicus, des Didacus von Stunica und des Carmelitermönches Bruder Paulus Antonius Foscarini mitgetheilt; demnächst ordnet Se. Heiligkeit an, das Edict über jenes Verbot, beziehungsweisse einstweilige Unterdrückung solle durch den Palastmeister veröffentlicht werden." Wir können aus diesem Protocolle einer offenbar geheimen Sitzung keine andere Folgerung ziehen, als H. Gherardi daraus zog und als wir bereits oben angekündigt haben. Der Brief Bellarmin's an Galilei ist damit buchstäblich bestätigt, die Fälschung des Protocolles vom 26. Februar oder, noch richtiger gesagt, die nachträgliche Entstehung desselben zu bestimmten Rachezwecken ist bis zur Evidenz erwiesen. Oder wie? In Bellarmin's Behausung, in seiner Gegenwart sollte dem Galilei von Amtswegen eine so wichtige Drohung eingeschärft worden sein, wie sie dort dem Inquisitionscommissare in den Mund gelegt wird, Notar und Zeugen sollten jene Einschärfung protocollirt haben und keine ganze Woche später berichtete Bellarmin nur über eine einfache Ermahnung, bei welcher Galilei sich beruhigt habe, genau in derselben Weise, wie er es 3 Monate später in seinem Briefe thut? Bellarmin, könnte man sagen, berichtete eben nur über den Theil der Eröffnung, welcher ihm selbst anvertraut war. Gut; aber wo ist denn der Bericht von Bruder Michel Angelo Segnitius de Lauta, welcher sich nothwendig anschliessen musste? Er sollte nicht eingeholt sein? Ueber den wichtigsten Theil der am 25. Februar Galilei gegenüber gethanenen Schritte sollte die Congregation sich keine Mittheilung haben machen lassen? Das ist geradezu unmöglich, und jeder Leser wird es mit uns begreifen, dass Herr Gherardi aus seinem Funde auf die Unechtheit des mehrgenannten Protocolles vom 26. Februar schliesst.

Nun haben wir aber beide Gedankenfolgen, die des Herrn Wohlwill wie des Herrn Gherardi, welche von durchaus verschiedenen Ausgangspunkten nach demselben Ziele gelangen, und ein besserer Beweis für die Richtigkeit der doppelt begründeten Ansicht dürfte kaum beizubringen sein. Wir wenigstens betrachten es hinfort als historisch feststehend, dass zum Nachtheil des Galilei eine Fälschung schändlichster Art begangen worden ist, und halten nur die einzige Frage für eine offene, von wem und in welchem genauen Zeitpunkte das Verbrechen verübt wurde.

CANTOR.

Untersuchungen über die Dioptrik der Linsensysteme. Von Dr. H. ZINKEN genannt SOMMER, Professor am Collegium „Carolinum“ zu Braunschweig. Druck und Verlag von F. Vieweg & Sohn in Braunschweig.

Verschiedene Umstände haben von jeher Veranlassung gegeben, mich für dioptrische Untersuchungen zu interessiren und um so mehr, seit durch Daguerre's Erfindung die Anforderungen an dioptrische Apparate so bedeutend gesteigert wurden, dass die bis dahin bekannten dioptrischen Untersuchungen nicht mehr ausreichend erschienen und bekanntlich durch Professor Petzval's Berichte über optische Untersuchungen höchst wichtige weitere Entwickelungen der Theorie optischer Instrumente in Aussicht gestellt wurden.

Soviel mir bekannt, ist, bis auf einige Sätze, von Professor Petzval's Resultaten seiner theoretischen Untersuchungen Nichts in die Oeffentlichkeit gelangt. Wohl aber sind die auf Grundlage seiner gewonnenen Resultate construirten optischen Apparate, besonders durch die eminenten Leistungen des Optikers Friedr. Voigtländer & Sohn, damals in Wien, weltbekannt geworden.

Die oben bezeichnete Schrift liefert nun einen wesentlichen Beitrag zu der oben erwähnten weitern Entwickelung der Theorie, und habe ich nach gehöriger Durchsicht derselben soviel Neues und Interessantes gefunden, dass ich im Interesse der Wissenschaft und der Freunde dioptrischer Untersuchungen eine weitere Eingehung und Besprechung für schuldig erachte.

Schon in der Vorrede ist hingewiesen, nach welcher Richtung hin die niedergelegten Untersuchungen von bisher veröffentlichten sich unterscheiden.

Dies ergiebt sofort der specielle Inhalt der in vier Theilen entwickelten Untersuchungen.

Im ersten Theil wird der Weg eines in der Axenebene fortschreitenden Lichtstrahles verfolgt und für die Brechung an einer Kugelfläche die bekannte Formel entwickelt. Es gelingt, diese auf ein System von Linsen, die derselben Axe angehören, so auszudehnen, dass auch mit Berücksichtigung der Liniendicken und Entfernungen, sowie der sphärischen Abweichung erster Ordnung die Gleichungen für die Bestimmung der Axenschnitte der Strahlen die bisher bekannte Gestalt behalten. Gauss hat durch die geniale Einführung der Hauptpunkte den ersten wirklich erfolgreichen Schritt zur Berücksichtigung der Entfernung der Flächenscheitel sogar für windschiefe Strahlen gethan; er hat aber die sphärische Abweichung ganz ausser Acht gelassen.

Im zweiten Theile wird mit der Betrachtung der Abbildung eines in der Axe befindlichen leuchtenden Punktes begonnen, die bekannte Gleichung der Diacaustica aufgestellt etc., überhaupt Bekanntes sehr kurz gehalten. Dagegen ist der Kern für alle weiteren Untersuchungen in dem Abschnitte enthalten,

welcher sich mit der Aufsuchung des Bildpunktes beschäftigt, der einem seitwärts von der Axe, aber in deren Nähe gelegenen Objectpunkte entspricht. Für abbildende Strahlen, welche in der Axenebene liegen, hat der Verfasser zuerst im 95. Bande von Poggendorff's Annalen die Resultate mitgetheilt; für Strahlen, die zur Axe windschief sind, ist die Untersuchung durchaus neu und eigenthümlich. Es ist von besonderer Wichtigkeit, dass der Verfasser die zur Abbildung verwendeten benachbarten Strahlen nicht durch ihre Schnittpunkte mit der brechenden Fläche charakterisirt, sondern durch die Punkte, in welchen sie die Axe, oder wenn sie windschief dazu sind, in welchen sie die Axenebene schneiden, die zu der des leuchtenden Punktes senkrecht ist. Bei dieser Beobachtungsweise lässt sich nämlich leicht beurtheilen, was für Abbildungen die Strahlen liefern, die durch eine sogenannte Blende erhalten werden. Um den Fall der Abbildung nach der Brechung durch eine Kugelfläche ausdehnen zu können auf die Voraussetzung von beliebig vielen Kugelflächen, hat nun der Verfasser statt der seitwärts der Axe gelegenen Bild- und Objectpunkte selbst, die Krümmungsradien der Rotationsflächen in Betracht gezogen, in welchen diese Punkte liegen, und damit eine ganz neue Bahn betreten. Er hat aus der Scheitelkrümmung der Objectfläche die der Bildfläche nach der Brechung durch ein beliebiges System abgeleitet, und zwar für irgendwelche Gruppe von abbildenden Strahlen. Es ergeben sich darnach unendlich viele Bildflächen, von denen eine beliebige eben, oder mit willkürlicher Scheitelkrümmung hergestellt werden kann. Die Folgerungen gehen noch weiter. Wird der reciproke Werth des Krümmungsradius, der sich für eine Gruppe von Axenstrahlen ergeben hat, nach der Schnittentfernung vom ersten Hauptpunkte differentiirt und werden die beiden einzig auftretenden Derivirten zu Null gemacht, so fallen alle durch Axenstrahlen hervorgebrachten Bildflächen zusammen, und dass mit der Erfüllung dieser Bedingungen auch die sphärische Randabweichung aufgehoben ist, lässt sich am Kürzesten durch die eigenen Worte des Verfassers darthun. Es heisst: „Von einem neben der Axe liegenden leuchtenden Punkte gehen zwei unmittelbar benachbarte Strahlen aus; sie durchschneiden die Axe in der Entfernung $\mathfrak{T}$, resp. $\mathfrak{T}+\partial\mathfrak{T}$, vom ersten Hauptpunkte und liefern nach der Brechung im Durchschnitt einen Bildpunkt, dem eine gewisse, in oben angegebener Weise zu berechnende Bildkrümmung zugehört. Betrachten wir drei unmittelbar aufeinanderfolgende Strahlen, so ergiebt der Durchschnitt der beiden ersten und ebenso der Durchschnitt der beiden letzten je einen Bildpunkt mit bestimmter zugehöriger Krümmung des Bildes. Erreichen wir nun, wie oben entwickelt, das Zusammenfallen der beiden Bildflächen, so erreichen wir auch das Zusammenfallen der beiden Bildpunkte, da dieselben jedenfalls auf dem mittleren Strahle und folglich in dessen Durchschnitt mit der gemeinsamen Bildfläche liegen müssen. Ebenso werden auch beliebig viele, demselben leuchtenden Punkte entstammende Strahlen nach

der Brechung durch das System nur einen einzigen Bildpunkt ergeben, sobald das Zusammenfallen der sämmtlichen Bildflächen erzielt ist, da wir für je drei aufeinanderfolgende Strahlen dieses nachgewiesen haben." Was die Bildflächen für windschiefe Strahlengruppen anbetrifft, so lassen sich diese selbstständig ebenso behandeln; es ist aber wieder höchst merkwürdig, dass die vorhin erwähnten Derivirten mit denen für Axenstrahlen identisch sind und die reciproken Werthe der Krümmungsradien selbst nur um den Werth $\frac{2}{3} \sum \frac{1}{n} \left(\frac{n-1}{r} - \frac{n-1}{r^0} \right)$ von einander abweichen, so dass nach Erfüllung dieser theoretisch höchst einfachen, aber praktisch grosse Schwierigkeiten darbietenden Bedingung die sämmtlichen Bildflächen für windschiefe Strahlen mit der für Axenstrahlen zusammenfallen. Es ist ebenfalls merkwürdig, dass die zweite Derivirte der Bildkrümmung bei aufgehobener sphärischer Abweichung von selbst zu Null wird; beide Forderungen bedingen das Zusammenfallen der Bildscheitel.

Auch verdient noch als neu hervorgehoben zu werden: der Nachweis, dass nur von der Stellung der Blende die richtige Zeichnung des Bildes abhängt; die im Hauptpunkte aufgestellte unendlich lichtschwache Blende liefert ein winkelgetreues Bild; und ferner die mit vollständiger Berücksichtigung der Linsendicken und Entfernungen durchgeführte Theorie des Achromatismus.

Im dritten Theile wird nun auf Grundlage der vorigen allgemeinen Betrachtungen auf die Leistungen besonderer Linsensysteme eingegangen und die Berechnung derselben, wenn sie gewissen Bedingungen entsprechen sollen, durchgeführt. Es wird nachgewiesen, was sich mit der einfachen, der Doppellinse etc. erreichen lässt, und dann zur Entwickelung der Theorie der Doppelobjective übergegangen. Durch Rechnungsbeispiele wird die Verwerthung der aufgestellten Formeln dargethan.

Im vierten Theile werden die trigonometrischen Formeln für die genaue Verfolgung eines Strahles durch ein beliebiges System aufgestellt. Diese waren für einen Axenstrahl längst bekannt, für einen windschiefen Strahl durch Seidel bereits entwickelt; immerhin ist die hier gegebene Form derselben neu und ganz praktisch. Die gleichzeitig entwickelten Ablenkungen, welche der Strahl durch geringe Aenderungen der dioptrischen Elemente verbinden würde, gestatten, an den Radien und Linsenentfernungen, welche bis dahin mit Vernachlässigung der Abweichungen von höherer Ordnung, also nur näherungsweise aufgefunden waren, noch Correctionen anzubringen, so dass den gestellten Anforderungen in immer grösserer Annäherung entsprochen werden kann.

Der Inhalt dieser nur als wissenschaftliche Monographie aufzufassenden Schrift wird freilich nur einen kleinen Leserkreis haben und aus diesem Gesichtspunkte war eine grössere Vollständigkeit nicht erforderlich, und hat daher der Verfasser mit Recht auf die systematische Entwickelung des

Neuen und Interessanten in möglichst gedrängter Form sein Hauptaugenmerk gerichtet.

Für den ausführenden Optiker sind diese Untersuchungen in dieser Form überhaupt nicht geniessbar und daher das Eingehen auf einzelne optische Apparate, Fernröhre, Mikroskope etc. nicht nothwendig, da theoretisch Alles mitgetheilt ist, was bei der Berechnung irgend eines Apparates in Frage kommen kann. In diesem Sinne müssen auch die Zahlenbeispiele aufgefasst werden; sie sind nur gegeben, weil sich besser daraus ersehen lässt, wie die allgemeinen Gleichungen zur Verwerthung gelangen können, auch wohl, um die Unterscheidung der bedeutungsvollen Glieder und der kleinen Correctionsglieder klarer hervortreten zu lassen.

Dresden, 21. November 1870.

J. B. Schneider, Reg.-Rath und Professor.

Bibliographie

vom 16. October bis 31. December 1870.

Periodische Schriften.

Abhandlungen der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften. Aus dem Jahre 1869. Berlin, Dümmler.
Mathematische Abhandlungen ½ Thlr.
Physikalische „ 10½ Thlr.

Abhandlungen der mathemat.-physikal. Classe der königl. bayerischen Akademie der Wissenschaften. 10. Bd. 3. Abth. München, Franz. 3 Thlr. 17 Ngr.

Sitzungsberichte der königl. bayerischen Akademie der Wissenschaften. 1870, II, 1. und 2. Heft. Ebendas. à 16 Ngr.

Sitzungsberichte der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. 1870, 1. und 2. Heft. Leipzig, Hirzel. ⅔ Thlr.

Jahrbücher der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus, herausgegeben von C. Jelinek und C. Fritsch. Neue Folge, 5. Bd. Jahrg. 1868. Wien, Braumüller. 2 Thlr.

Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica, *ed.* H. Guthe. 20. Jahrg. 1. Heft, Januar-Juni 1870. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 6 Ngr.

Mélanges tirés du bulletin de l'académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. Leipzig, Voss.
Mélanges mathématiques et astronomiques, *IV*, 5 17 Ngr.
„ *physiques et chimiques*, *VIII*, 2 20 Ngr.

Reine Mathematik.

Lejeune-Dirichlet, **Vorlesungen über Zahlentheorie**, herausgegeben von Dedekind. 2. Aufl. 1. Abth. Braunschweig, Vieweg. 1⅓ Thlr.

Winckler, A., **Ueber die Relationen zwischen den vollständigen Abel'schen Integralen verschiedener Gattung.** (Akad.) Wien, Gerold. ⅙ Thlr.

KÖNIG, J., Zur Theorie der Modulargleichungen der elliptischen Functionen. Heidelberg, Winter. 6 Ngr.

STUDNIČKA, J., Einleitung in die Theorie der Determinanten Prag, Calve. 16 Ngr.

PRISI, J., Schlüssel zum Leitfaden für den Unterricht in der Algebra. I. Theil. Bern, Heuberger. ⅙ Thlr.

BRETSCHNEIDER, C. A., Die Geometrie und die Geometer vor Euklides. Leipzig, Teubner. 1⅔ Thlr.

LIPPICH, F., Die Ebene und Gerade als Elemente eines dem barycentrischen analogen Calculs. Graz, Leuschner & Lubensky. 12 Ngr.

WEYR, E., Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein-zweideutiger Gebilde, insbesondere der Kegelflächen dritter Ordnung. Leipzig, Teubner. 1⅓ Thlr.

LANGE, TH., Aufgaben aus der Elementargeometrie. 1.—3. Heft. Berlin, Bornträger. à ¼ Thlr.

FRISCHAUF, J., Elemente der Geometrie. Graz, Leuschner & Lubensky. 26 Ngr.

WOLFF, F., Lehrbuch der Geometrie. 1. Theil. 8. Aufl. Berlin, G. Reimer. 1⅔ Thlr.

ZETZSCHE, K., Katechismus der Geometrie. Leipzig, Weber. ⅔ Thlr.

BALTZER, R., Die Elemente der Mathematik. 2. Bd. 3. Aufl. Leipzig, Hirzel. 2 Thlr.

WIEGAND, A., Lehrbuch der Stereometrie. 6. Aufl. Halle, Schmidt. ⅓ Thlr.

——, Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. 5 Aufl. Halle, Schmidt. ⅓ Thlr.

HECHEL, C., Leitfaden zum Unterricht in der ebenen Trigonometrie. Reval, Kluge. ½ Thlr.

ZIEGLER, A., Ebene und sphärische Trigonometrie. München, Lindauer. ⅙ Thlr.

ZORER, Das Malfatti'sche Problem, trigonometrisch gelöst. Tübingen, Fues. 6 Ngr.

GAUSS, G., Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Berlin, Rauh. ⅔ Thlr.

STAMPFER, S., Logarithmisch-trigonometrische Tafeln. 8. Aufl. Wien, Gerold. ⅚ Thlr.

GAUSS, G., Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Handtafel. Berlin, Rauh. ⅙ Thlr.

WITTSTEIN, TH., Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln. 4. Aufl. Hannover, Hahn. ⅚ Thlr.

FRISCHAUF, J., Einleitung in die analytische Geometrie. Graz, Leuschner & Lubensky. 16 Ngr.

KIEPERT, L., *De curvis quarum arcus integralibus ellipticis primi generis exprimuntur. Dissertatio.* Neisse, Graveur. ⅓ Thlr.

Angewandte Mathematik.

SCHELL, W., Theorie der Bewegung und der Kräfte. 5. (letzte) Lief. Leipzig, Teubner. 28 Ngr., complet 4⅔ Thlr.

OTT, K. v., Vorträge über Baumechanik. 1. Theil. Prag, Dominicus. 1 Thlr.

SCHLOTTER, H., Ueber die Bewegung des Wassers in Leitungsröhren. Gera, Griessbach. ⅓ Thlr.

REBHANN, G., Theorie des Erddrucks und der Futtermauern. 3. u. 4. Heft. Wien, Gerold. à ⅔ Thlr.

BAMMERT, Aufgaben aus der mathematischen Geographie. Tübingen, Fues. ¼ Thlr.

RATH, F., Bestimmung der Seehöhen auf graphischem Wege. Wien, Beck'sche Univers.-Buchh. 1 Thlr.

REUSCH, E., Constructionen zur Lehre von den Haupt- und Brennpunkten eines Linsensystems. Leipzig, Teubner. 1 Thlr.

GRASHOF, F., Resultate der mechanischen Wärmetheorie. Heidelberg, Bassermann. 24 Ngr.

NEUMAYER, G., Ein Project für die Vorarbeiten betreffs des Venusdurchganges vom Jahre 1874. (Akad.) Wien, Gerold. ¼ Thlr.

KLINKERFUES, W., Theoretische Astronomie. 1. Abtheilg. Braunschweig, Vieweg. 1½ Thlr.

ECKARDT, P., Neue Sternkarte. 5. Aufl. Giessen, Noth. 1 Thlr.

BEER, G., und H. MÄDLER, *Mappa selenographica.* 4. Blatt. Neue Aufl. Berlin, Schropp. 6⅔ Thlr.

Physik.

WÜLLNER, A, Lehrbuch der Experimentalphysik. 1. Bd. Mechanik und Akustik. 3. Ausg. Leipzig, Teubner. 2⅔ Thlr.

MOUSSON, A., Die Physik auf Grundlage der Erfahrung. 1. Bd. Allgemeine und Molecularphysik. Zürich, Schulthess. 1 Thlr. 24 Ngr.

SCHOLL, G., Grundriss der Naturlehre, neu bearb. von BÖKLEN. 7. Aufl. 2. Abth. Ulm, Wohler. ⅓ Thlr.

REIS, P., Lehrbuch der Physik. 2. Hälfte. 1. Abth. Leipzig, Quandt & Händel. ½ Thlr.

WEINHOLD, F., Vorschule der Experimentalphysik. 1. Theil. Leipzig, Quandt & Händel. 1⅓ Thlr.

HANSEMANN, G., Die Atome und ihre Bewegungen. Leipzig, Mayer. 1⅓ Thlr.

SCHELLEN, H., Die Spectralanalyse und ihre Anwendungen. 2. Aufl. 1. Abth. Braunschweig, Westermann. 2⅔ Thlr.

TYNDALL, J., Die Wärme betrachtet als eine Art der Bewegung. Deutsch von H. HELMHOLTZ und G. WIEDEMANN. 2. Auflage. 1. Abth. Braunschweig, Vieweg. 1⅔ Thlr.

KNOBLAUCH, H., Ueber den Durchgang der strahlenden Wärme durch Steinsalz und Sylvin. Halle, Schmidt. 6 Ngr.

PFAUNDLER und PLATTER, Ueber die Wärmecapacität des Wassers in der Nähe seines Dichtigkeitsmaximums. (Akad.) Wien, Gerold. 3 Ngr.

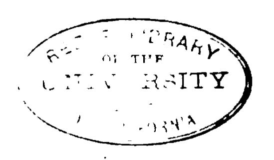
LOSCHMIDT, Experimentaluntersuchungen über die Diffusion von Gasen ohne poröse Scheidewände. (Akad.) Wien, Gerold. 3 Ngr.

WALTENHOFEN, A. v., Ueber einen einfachen Apparat zur Nachweisung des magnetischen Verhaltens eiserner Röhren. (Akad.) Wien, Gerold. 4 Ngr.

——, Ueber die elektromagnetische Tragkraft. (Akad.) Wien, Gerold. 12 Ngr.

——, Elektromagnetische Untersuchungen mit besonderer Rücksicht auf die Anwendbarkeit der Müller'schen Formel. 2. Abhdlg. (Akad.) Wien, Gerold. ¼ Thlr.

WEISS, E., Beiträge zur Kenntniss der Sternschnuppen. 2. Abhandlg. (Akad.) Wien, Gerold. 9 Ngr.



Literaturzeitung.

Recensionen.

Die Atome und ihre Bewegungen. Ein Versuch zur Verallgemeinerung der Krönig-Clausius'schen Theorie der Gase. Von GUSTAV HANSEMANN. Köln und Leipzig, E. H. Mayer.

Der Verfasser hat die bekannte Krönig'sche Theorie der Gase in der Weise erweitert, dass er dieselbe nicht nur auf die sämmtlichen rein physikalischen Zweige anwendet, sondern sogar auch andere Vorkommnisse, wie z. B. Ernährung organischer Gebilde, Accommodationsvermögen, Fortpflanzung, Sinnesorgane u. s. w. daraus ableitet.

Die Grundlagen, auf denen in dem Buche die Welt aufgebaut ist, sind folgende: Die sämmtliche materielle Substanz ist durchaus die nämliche; sie ist aber in eine grosse Anzahl von Kugeln getheilt. Die Kugeln sind vollständig mit materieller Substanz angefüllt, absolut starr, verhalten sich aber doch als absolut elastisch und ziehen sich (in jeder Distanz) mit einer Kraft an, die dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist. Die Grösse dieser Kugeln ist verschieden, die kleinen sind Aetherkugeln, die grossen Körperatome. Die Masse eines Körperatomes beträgt das 10^{33}fache der Masse einer Aetherkugel, abgesehen von kleineren Verschiedenheiten der Atome, die von 1 (Wasserstoff) bis 308 (Wismuth) wechseln können; dagegen beträgt die Zahl der Aetherkugeln das 10^{22}fache derjenigen der Körperatome.

Befindet sich nun irgendwo eine Atomgruppe, so wirkt dieselbe anziehend auf die im Raume sich herumbewegenden Kugeln verschiedener Grösse und diese gehen dann mit beschleunigter Geschwindigkeit gegen den Anziehungsmittelpunkt, um von dort reflectirt zu werden und die Geschwindigkeit nach und nach wieder zu verlieren. Geschieht dieses, so treffen zurückkehrende Körperatome mit hereinkommenden Aetherkugeln zusammen und nach dem Gesetze von dem Stosse absolut elastischer Körper geht lebendige Kraft von den ersteren auf letztere über. Die Folge davon ist, dass die Körperatome mit geringerer Geschwindigkeit zum Anziehungsmit-

telpunkte zurückkehren, die Aetherkugeln mit grösserer sich entfernen und da und dort mit anderen zusammenstossend, endlich die verschiedensten Richtungen bekommen. Die Körperatome, die so einen Theil ihrer lebendigen Kraft verloren haben, gehen also wieder auf das Centrum zurück, und wenn sie dort anlangen, werden sie wohl wieder reflectirt, aber die Geschwindigkeit, die sie nunmehr haben, ist geringer als bei dem ersten Anprall. So geht es nun weiter, und endlich wandern die Atome nur noch innerhalb enger Grenzen hin und her. Ein Atom kann sich nicht über eine gewisse Distanz von dem Centrum wegbegeben, wenn die Wirkung der von aussen herein auf dasselbe stossenden und von ihm reflectirten Aetherkugeln seine Bewegung aufgezehrt hat, sobald es an diesem Punkte angekommen ist. Dadurch grenzt sich ein Weltkörper, der eine grössere oder geringere Menge von Körperatomen enthält, die mit Aetherkugeln untermischt sind, von dem allgemeinen Raume ab. Im Innern dieses Körpers stossen fortwährend Aetherkugeln und Körperatome auf einander und reflectiren sich gegenseitig; es kann aber nicht zur Zerstreuung kommen, weil die im allgemeinen Raume befindlichen Aethertheilchen fort und fort auf die Oberfläche des Körpers aufstossen und die Theile, welche sich entfernen wollen, zurückdrängen. Jedes zusammenhängende Körperatomsystem besitzt infolge der Bewegungen seiner Atome ein Bestreben, sich auszudehnen, und diesem Bestreben steht die Aetherwirkung entgegen. Die beiden entgegengesetzten Tendenzen liegen fortwährend im Kampfe mit einander und das Resultat dieses Kampfes ist: fortwährendes Schwanken um einen aus den beiderseitigen Machtverhältnissen sich ergebenden Gleichgewichtszustand.

Eine grosse Rolle spielt in dem Buche die nachfolgende Betrachtung: Auf ein isolirtes Körperatom wirken die Aetheratome durch ihre Stösse von allen Seiten gleichmässig ein; sind aber zwei Körperatome nahe bei einander, so ist immer eines gewissermassen im Schatten des andern; der Aether wirkt auf jedes nur auf derjenigen Seite, die dem andern Atom abgewendet ist, und dieser gegenseitige Schutz bewirkt, dass die Atome trotz ihrer fortwährenden Stösse gegen einander doch beisammen bleiben müssen. Die mittlere Entfernung der Atome, die sich hieraus ergiebt, ist die kleinstmögliche, wenn sich keine Aetherkugeln zwischen sie einschieben; geschieht dieses aber, so nimmt der Verfasser an, dass die Distanz 120 mal grösser werden könne. Die grösstmögliche Entfernung beider Atome hängt nun von der Grösse des gegenseitig gewährten Schutzes ab. Uebersteigt sie das Fünffache des Durchmessers, so hört der Schutz auf, das System löst sich in Aether auf und es entsteht ein Gas. Beträgt die grösste Entfernung nur das Zwei- bis Fünffache des Durchmessers einer Kugel, so ist die Möglichkeit gegeben, dass ein drittes Atom zwischen beiden durchschlüpft und so auf die gegenseitige Stellung derselben von Einfluss ist — Flüssigkeiten. Steigt die Entfernung nicht über das Doppelte des Durchmessers einer Kugel, so entsteht ein fester Körper. Vergrösserung der lebendigen Kraft

(Temperaturerhöhung) bewirkt ein Anwachsen der gegenseitigen Entfernung der Atome und mithin eine Aenderung des Aggregatzustandes.

Wenn zwei Weltkörper sich einander nähern, so wächst ihre Geschwindigkeit, also auch die lebendige Kraft, welche jeder als Ganzes neben derjenigen hat, die seine Atome besitzen; stossen sie auf einander und bilden sie von nun an einen einzigen Körper, so addirt sich der Ueberschuss der lebendigen Kraft, welche jeder als Ganzes neben derjenigen hat, die seine Atome besitzen; stossen sie auf einander und bilden sie von nun an einen einzigen Körper, so addirt sich der Ueberschuss der lebendigen Kraft der früher isolirten Körper über die des nunmehr einzigen zu jener der Atome. Dadurch wird die Temperatur erhöht, die Entfernung der Atome vergrössert sich, der gegenseitige Schutz derselben wird kleiner und hört endlich auf, der Körper wird also zu Gas und seine Theile fliegen hinaus ins Weltall. Bei dieser gegenseitigen Entfernung nimmt die Geschwindigkeit ab, also auch die lebendige Kraft; durch die allgemeine Anziehung sammeln sich die Atome wieder zu Weltkörpern und die Reihenfolge der Erscheinungen wiederholt sich *in perpetuum.* In dieser Weise beantwortet der Verfasser die Frage von der Entropie der Welt.

Stellen zwei sich berührende Kreise die Durchschnitte zweier Atome mit der Ebene des Papieres vor, und zieht man von den Mittelpunkten eines jeden Kreises zwei Tangenten an den andern Kreis, so schneiden sich diese Tangenten unter den Winkeln p und p_1. Sind die Radien beider Kreise gleich, so ist $p + p_1 = 120^0$; sind aber die Radien ungleich, so wird $p + p_1 > 120^0$. Nimmt man nun mit dem Verfasser an, dass der Schutz, den zwei Atome sich gewähren, nach irgend einem Gesetze mit der Grösse $p + p_1$ wachse, so ergiebt sich, dass zwei ungleiche Kugeln sich mehr Schutz gewähren, also leichter beisammen bleiben, als wenn die Atome gleiche Grösse haben, und in diesem Umstande wäre dann die Grundlage der chemischen Verwandtschaft zu suchen.

Die Betrachtungen des Verfassers über die Vorgänge der organischen Welt beruhen mitunter auf Voraussetzungen, deren Nothwendigkeit sich nicht allemal gut einsehen lässt, und es dürfte um so eher gestattet sein, dieselben hier zu übergehen, als sie ausserhalb der Grenzen dieser Zeitschrift liegen. Es liesse sich auch gegen manchen der übrigen Schlüsse, wenn ihre Resultate mit denen der Beobachtungen verglichen werden, allerlei einwenden, so z. B. ist bei dem Schutzverhältnisse der Atome nicht wohl einzusehen, wie andere Körper als kugelförmige entstehen können; doch ist nicht zu vergessen, dass der Verfasser seine Schrift von Haus aus als Versuch dargestellt hat.

Im Ganzen muss zugegeben werden, dass der Verfasser aus dem geringen Material, das er zu Hilfe nahm (materiell sich anziehende und bewegte Kugeln von verschiedener Grösse), gemacht hat, was sich machen liess.

Regensburg, den 9. Januar 1871. Dr. W. C. Wittwer.

Die Grundzüge des graphischen Rechnens und der graphischen Statik. Von Carl v. Ott, Professor an der k. k. deutschen Landesrealschule und h. Docent für Baumechanik am k. deutschen Landespolytechnikum in Prag. Mit 2 Figurentafeln. Prag 1871.

Der neue, von Professor Culmann in Zürich zuerst begründete Wissenszweig der graphischen Statik wird jetzt auf den meisten polytechnischen Schulen gelehrt und von einem grossen Theile der jüngeren praktischen Techniker mit Vortheil benutzt. Einen méthodischen Cursus, in welchem erst Geometrie der Lage als Vorbereitung zur graphischen Statik und dann diese selbst vorgetragen wird, sind jedoch viele der Fachgenossen nicht in der Lage, durchzumachen, und es bleibt das classische Werk von Professor Culmann für letztere ein versenkter Nibelungenschatz, da ihnen die zu seiner Hebung nöthigen Vorkenntnisse mangeln. Schon Prof. Reuleaux (siehe Literaturzeitung Bd. XIV, S. 31) hat daher in der neuesten Auflage seines „Constructeur“ ein besonderes Capitel der Graphostatik gewidmet. Abgesehen davon jedoch, dass der Besitz jenes Capitels auch den des ganzen Buches voraussetzt, hat Prof. Reuleaux hauptsächlich ein maschinentechnisches Publikum vor Augen gehabt und daher manches, speciell den Bauingenieur Interessirende, z. B. die Untersuchung über die ungünstigste Stellung der Eisenbahnzüge auf Brücken, nicht berücksichtigt.

In dem zuerst genannten, 49 Seiten starken Heftchen giebt Professor v. Ott in gedrängter Kürze und in klarer, populärer Fassung zunächst die Operationen des graphischen Rechnens vom Addiren an bis zum Logarithmiren hinauf, worauf dann die graphischen Flächenbestimmungen besprochen werden. In den hiernach folgenden Elementen der graphischen Statik werden, von dem Kräfteparallelogramm ausgehend, die bekannten Eigenschaften des Seilpolygons entwickelt und dann deren Anwendungen auf die Untersuchung der Inanspruchnahme eines geraden Balkens bei Belastung mit stetigen oder isolirten Gewichten gezeigt. Ohne gerade wesentlich Neues zu bieten, wird das Werkchen für das Publikum der Mittelschulen, welches der Verfasser speciell ins Auge fasst, besonders anregend sein, da es dasselbe schon bei Zeiten an den später in den praktischen Fächern oft vorkommenden Ersatz der Rechnung durch Construction gewöhnt. Aber auch allen Ingenieuren, welche sich mit geringer Mühe für das weitere Studium des Culmann'schen Werkes vorbereiten wollen, können wir dasselbe bestens empfehlen.

Dresden. Prof. Dr. W. Fränkel.

Theorie der Bewegung und der Kräfte. Ein Lehrbuch der theoretischen Mechanik, mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse technischer Hochschulen bearbeitet von Dr. WILHELM SCHELL, Professor am Polytechnikum zu Karlsruhe. Leipzig, B. G. Teubner.

Das vorliegende Werk, welches schon durch den respectabeln Umfang von circa 1000 Seiten in gross Octav imponirt, unterscheidet sich nach verschiedenen Richtungen sehr wesentlich von den besseren vorhandenen Werken über Mechanik. Eigenthümlich ist zunächst die Eintheilung in vier Hauptabschnitte, nämlich 1. reine Bewegungslehre (Phoronomie oder Kinematik), 2. die Lehre von der Geschwindigkeit, 3. die Lehre von der Beschleunigung, 4. die Theorie der Kräfte. Dass hier zuerst die Bewegung ohne Rücksicht auf die Zeit betrachtet wird, dass nachher die aus der Rücksicht auf die Zeit entspringenden Begriffe der Geschwindigkeit und Beschleunigung untersucht werden und dass schliesslich die etwaigen Ursachen der Bewegung zur Discussion gelangen, ist ohne Zweifel ein streng logischer Gedankengang; ob er dagegen so überwiegende pädagogische Vortheile bietet, wie der Verfasser in der Vorrede meint, möchte doch fraglich sein. Denn es ist pädagogisch immer ein Nachtheil, die schwereren Probleme der Dynamik früher zu behandeln, als die, wegen des Nichtvorkommens der Zeit, einfacheren Aufgaben der Statik, und so dürfte es sich für Vorträge besser empfehlen, die ältere Eintheilung in Statik und Dynamik beizubehalten und nur zwischen beide die Kinematik einzuschieben. Als eine fernere Eigenthümlichkeit des Werkes ist hervorzuheben, dass es soviel als möglich umfassende Gesichtspunkte giebt und dass es infolge hiervon weit mehr allgemeine Theorien enthält, als irgend ein anderes ähnliches Lehrbuch; jedoch ist hierbei das Detail keineswegs vernachlässigt, vielmehr sind die Anwendungen jener Theorien an zahlreichen Beispielen erläutert. Endlich verdient die ausserordentliche Reichhaltigkeit des Werkes noch ganz besondere Anerkennung; der Verfasser entschuldigt sich zwar gewissermassen, dass er die feineren Untersuchungen der Potentialtheorie, die ausführliche Untersuchung elastischer Systeme, die Störungstheorie, eine vollständige Theorie des Jacobi'schen letzten Multiplicators, der Hamilton'schen Quaternions etc. etc. weggelassen habe, aber diese Entschuldigung war um so weniger nöthig, als der Verfasser gerade von mehreren dieser Theorien Abrisse gegeben hat, die schon das Hauptsächlichste enthalten und jedenfalls hinreichen, um den Leser mit dem Kern der Sache bekannt zu machen. Ueberhaupt möchte es schwerlich irgend eine halbwegs bedeutsame mechanische Untersuchung oder irgend eine rein mathematische, für die Mechanik aber brauchbare Theorie geben, welche der Verfasser unbeachtet gelassen hätte. Ebenso ist die Literatur mit äusserster Genauigkeit angeführt. Rechnet man hierzu die sehr klare, von guten Figuren unterstützte Darstellung, so darf man

wohl sagen, dass der Verfasser eine Arbeit geliefert hat, welche allen in den letzten Decennien erschienenen Lehrbüchern der Mechanik weit überlegen ist.

Die typographische Ausstattung des Werkes entspricht der Gediegenheit seines Inhalts. SCHLÖMILCH.

Die Determinanten, elementar behandelt von Dr. OTTO HESSE, Professor am Polytechnikum zu München. Leipzig, B. G. Teubner.

Die vorliegende kleine Schrift verdankt ihre Entstehung dem Umstande, dass den sechs königl. bayerischen Realgymnasien durch Ministerialverfügung vom 5. October 1870 vorgeschrieben wurde, die Determinantentheorie in den Kreis ihrer Unterrichtsgegenstände aufzunehmen; hieraus erklärt sich hinreichend die Beschränkung auf den elementaren Theil jener Theorie. Das Schriftchen zerfällt in drei Theile; der erste giebt einige vorbereitende Untersuchungen über lineare Gleichungen; der zweite bespricht die alternirenden Functionen; im dritten Theile werden hieraus die Determinanten durch Verwandlung der Exponenten in obere Indices hergeleitet, daran die Fundamentaleigenschaften der Determinanten geknüpft und zuletzt das Eliminationsproblem, sowie die Multiplication der Determinanten erörtert. Dass die Darstellung eine meisterhafte ist, braucht wohl kaum gesagt zu werden; namentlich solche Schriftsteller, die sich durch möglichst lakonische Redensarten das Relief genialer Tiefe zu geben suchen, können auch formell sehr viel von Altmeister Hesse lernen. SCHLÖMILCH.

Bibliographie

vom 1. Januar bis 15. Februar 1871.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der königl. bayerischen Akademie der Wissenschaften. 1870, II, 3. Heft. München, Franz. 16 Ngr.

Journal für reine und angewandte Mathematik, begr. von CRELLE, fortges. von C. BORCHARDT. 73. Bd. 1. Heft. Berlin, Reimer. pro compl. 4 Thlr.

Wochenschrift für Astronomie, Meteorologie und Geographie. Redig. v. HEIS. Neue Folge. 14. Jahrg. 1871. Nr. 1. Halle, Schmidt. pro compl. 3 Thlr.

Astronomisches Jahrbuch für 1873, mit Ephemeriden der Planeten (1) bis (112) für 1871. Herausgegeben von W. FÖRSTER unter Mitwirkung von POWALKY. Berlin, Dümmler. 3 Thlr.

Annuario marittimo per l'anno 1871. 21. *Annata.* Triest, literarisch-artistische Anstalt. 1⅙ Thlr.

Angewandte Mathematik.

Taschenbuch des Ingenieurs, herausgegeben v. d. Verein „Hütte". 9. Aufl. 1. Lief. Berlin, Ernst & Korn. pro compl. 1⅔ Thlr.

LITTROW, K. v., Physische Zusammenkünfte der Planeten (1) bis (82) während der nächsten Jahre. (Akad.) Wien, Gerold. 3 Ngr.

OPPOLZER, TH. v., Ueber den Winnecke'schen Kometen. 1. Abhandlg. (Akad.) Wien, Gerold. 3 Ngr.

Physik.

WRETSCHKO, A., Experimentaluntersuchungen über die Diffusion von Gasgemengen. (Akad.) Wien, Gerold. 3 Ngr.

BENIGAR, J., Experimentaluntersuchungen über die Diffusion von Gasgemengen. (Akad.) Wien, Gerold. 2 Ngr.

Kremers, P., Physikalisch-chemische Untersuchungen. 2. Heft. Wiesbaden, Limbarth. 12 Ngr.

Waltenhofen, A. v., Ueber die Anziehung, welche eine Magnetisirungsspirale auf einen beweglichen Eisenkern ausübt. (Akad.) Wien, Gerold. 6 Ngr.

Schellen, H., Die Spectralanalyse in ihrer Anwendung auf die Stoffe der Erde und die Natur der Himmelskörper. 2. Aufl. 2. Abth. Braunschweig, Vieweg. pro 2. u. 3. Abth. 3 Thlr.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Elemente der Physik zum Gebrauche für die oberen Classen höherer Schulen. Von Dr. AUGUST HUGO EMSMANN, Professor und Oberlehrer an der Realschule zu Stettin. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 161 in den Text eingedruckten Figuren, 3 Isothermen- und 1 Sturmkarte. Leipzig, Verlag von Otto Wigand. 1871.

Lehrbuch der Physik. Von PETER MÜNCH, Director der Real- und Gewerbeschule zu Münster. Mit 286 in den Text gedruckten Abbildungen. Freiburg i. Br., Herder'sche Verlagshandlung. 1871.

Wenn Kant in seinen metaphysischen Anfangsgründen der Naturwissenschaften sagt, es gebe in der Physik nur soviel eigentliche Wissenschaft, als sie Mathematik enthält, so bezeichnet er mit diesen wenigen Worten nicht nur das Ziel aller physikalischen Forschung, sondern er giebt damit auch einen bedeutungsvollen Wink für die physikalische Lehrmethode. In der That, soll der physikalische Unterricht nicht zu einer zwecklosen Gedächtnissübung oder gar, wie es an Gymnasien nicht selten der Fall ist, zum leeren Amusement der Schüler herabsinken, so muss der physikalische Lehrstoff, gewissermassen von Mathematik durchdrungen, den Schülern geboten werden. Nur auf solche Weise kann der Unterricht in der Physik zu einem der wichtigsten Erziehungsmittel des Geistes werden!

In diesem Sinne nun sind die beiden genannten Lehrbücher der Physik abgefasst, und indem wir noch besonders die klare, übersichtliche Behandlung des Stoffes und den feinen pädagogischen Takt, der, durch langjährige praktische Erfahrung erworben, überall das richtige Mass zu finden weiss, als rühmenswerthe Eigenschaften derselben hervorheben, empfehlen wir sie auf's Wärmste allen Lehrern der Physik.

Sechszehn mathematisch-physikalische Probleme. Nebst einem Anhang, enthaltend 102 Aufgaben und deren Resultate. Von Dr. Gustav Emsmann, Oberlehrer an der Realschule zu Frankfurt a. O. Mit einer Figurentafel. Leipzig, Verlag von Quandt & Händel. 1869.

Die vorliegende Schrift ist sowohl Lehrern, als auch namentlich Schülern sehr zu empfehlen. Für's Erste enthält sie, und zwar in vorzüglicher, ausführlicher Behandlung hauptsächlich diejenigen mathematisch-physikalischen Probleme, welche in den Lehrbüchern der Physik meist nur dürftig angedeutet sind. Es sind nämlich darin behandelt: 1. Thermometercorrection; 2. specifische Wärme; 3. latente Wärme; 4. Declination der Magnetnadel; 5. das Ohm'sche Gesetz und die Constanten galvanischer Rheomotoren; 6. die Minimalablenkung des Lichtes beim Durchgange durch ein Prisma; 7. der Brechungsexponent; 8. Discussion der Formel $\frac{1}{a}+\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{f}$; 9. Newton'sche Ringe; 10. die Dämmerung; 11. das Kräfteparallelepiped; 12. das physische Pendel; 13. die Verminderung der Schwere durch die Rotation der Erde; 14. die archimedische Aufgabe; 15. das barometrische Höhenmessen; 16. die Grösse der Verdünnung durch die Luftpumpe.

Von besonderem Werthe ist aber ferner auch die beigefügte Sammlung meist neuer und guter Aufgaben, an denen unsere Literatur durchaus keinen Ueberfluss aufzuweisen hat. Betreffs der Resultate bemerken wir, dass zwei derselben falsch sind. Seite 128, Aufg. 69, Antw. 1 muss es heissen: 134,78 Sec. = 2 Min. 14,78 Sec., und Seite 133, Aufg. 87 sind für die angegebenen Werthe der Gleichung dritten Grades folgende zu setzen: $h_1 = 37{,}957^{dm}$, $h_2 = 9{,}799^{dm}$ und $h_3 = -7{,}79^{dm}$, wovon der Aufgabe gemäss nur $h_2 = 9{,}799^{dm}$ zulässig ist.

Mathematische Geographie. Ein Leitfaden zunächst für die oberen Classen höherer Lehranstalten, bearbeitet von Dr. A. Hoffmann, Oberlehrer an der Realschule zu Münster. Mit 50 in den Text gedruckten Figuren und einer Sternkarte. Paderborn, Verlag von Ferd. Schöningh. 1870.

Seit die mathematische Geographie namentlich durch A. v. Humboldt ein allgemeines Interesse gewann, hat man wiederholt von verschiedenen Seiten gefordert, dieselbe in den Lehrplan höherer Schulen aufzunehmen, und gewiss mit Recht. Trotzdem liefern jedoch die meisten Schulprogramme den bedauerlichen Beweis, wie wenig man jener Forderung nachkommt, und um so mehr ist es mit Dank anzuerkennen, wenn Schulmänner es unternehmen, die Resultate der mathematisch-geographischen Forschung, so weit sie in den Kreis der Schule gehören, methodisch zu behandeln.

Vorliegendes Werkchen nun zeichnet sich, von den wenigen, bereits vorhandenen Schulbüchern gleichen Inhalts sehr vortheilhaft aus. Nicht nur ist

die Ausstattung eine ganz vortreffliche, man findet auch die neuesten Forschungen berücksichtigt, so z. B. betreffs des Wesens der Sonne, der Kometen und Meteoriten. Dass Einiges aus der Astronomie mit aufgenommen worden ist, wird man nur gutheissen können, zumal von dieser Wissenschaft in den Schulen meist gar nichts gelehrt wird. Endlich wird der Werth des Buches noch erhöht durch biographische Notizen über die älteren Astronomen und durch am Schlusse angehängte Aufgaben.

Grundriss der Physik und Mechanik für gewerbliche Fortbildungsschulen. Von Dr. LUDWIG BLUM, Professor an der königl. Realanstalt in Stuttgart. 3. Aufl. Leipzig und Heidelberg, C. F. Winter. 1869.

Dieses zunächst für die Schüler der gewerblichen Fortbildungsschulen im Königreich Württemberg bestimmte Buch können wir nach genauer Prüfung allen ähnlichen Anstalten zur Einführung empfehlen. Es enthält in populärer Form alles Das, was in näherer Beziehung zu Gewerbe und Industrie steht, und die Eintheilung des Stoffes ist so getroffen, dass der bezügliche Unterricht bei zwei wöchentlichen Lectionen in einem Semester absolvirt werden kann.

Dresden, den 10. März 1871. Dr. G. HOFFMANN, Oberlehrer.

Vorschule und Anfangsgründe der descriptiven Geometrie. Ein Cursus für die Secunda einer Realschule erster Ordnung. Bearbeitet von CHR. SCHERLING, Professor am Cathrineum in Lübeck. Mit 155 Holzschnitten. Hannover, Hahn'sche Hofbuchhandlung. 1870.

Da die neuere Geometrie die descriptive Geometrie vereinfacht und zu einer höheren Entwickelung befähigt, so wird es allseitig gebilligt werden, dass die Grundzüge der neueren Geometrie der descriptiven Geometrie vorangeschickt werden. Und da überhaupt die neuere Geometrie auch für eine höhere technische Ausbildung unentbehrlich ist, so werden auch in nicht ferner Zeit die wichtigsten Grundzüge der neueren Geometrie als Lehrgegenstand in die Realschulen erster Ordnung eintreten. Der Verfasser des genannten Buches hat die Wichtigkeit der Grundzüge der neueren Geometrie erkannt und dieselben als Vorschule der descriptiven Geometrie genommen. Um dem an planimetrische Betrachtungen gewöhnten Anfänger diese Vorschule leicht zu machen, geht der Verfasser von dem Projiciren in der Ebene aus; er entwickelt aus dem centralen Projiciren einer ebenen Figur auf eine in ihrer Ebene liegende Gerade vermittelst des Verhältnisses zweier Punktwerthe die Grundgesetze der centralen Collineation in der Ebene. Seltsamerweise nennt der Verfasser alle Punkte, welche auf einer projicirenden Geraden liegen, „verwandte Punkte“. Referent kann

diese höchst unbestimmte Definition nicht billigen und hält dieselbe nicht nur für überflüssig, sondern auch für das Verständniss hinderlich. Sie hätte füglich ganz vermieden werden können und der Verfasser hätte sich dann die Bezeichnung „verwandt im engern Sinne“ für die centralcollineare Verwandtschaft gespart. Eine klare, bestimmte Definition dieser Verwandtschaft folgt aber bald auf S. 5. Aus dieser werden in leicht verständlicher Weise die besonderen Fälle, die perspectivische Congruenz, Aehnlichkeit, Affinität und die involutorischen collinearen Systeme abgeleitet.

Vermittelst des Verhältnisses zweier Punktwerthe werden die Beziehungen der projectivisch verwandten Punktreihen und Strahlenbüschel, sowie die harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierseits entwickelt, und von diesem Vierseit wird man zu der involutorischen Punktreihe geführt.

Nachdem die harmonischen Eigenschaften des Kreises und die wichtigsten Beziehungen von Pol und Polare abgeleitet sind, wird die perspectivische Aehnlichkeit der Kreise, die perspectivische Affinität der Curven und die perspectivische Collineation des Kreises behandelt. Aus der letzteren ergeben sich die Kegelschnitte als centralcollineare Figur des Kreises und bilden den Schluss der Vorschule.

Der Verfasser hat sich vorzugsweise der Rechnung und weniger der geometrischen Anschauung bedient. Ob hierin ein Gewinn für den Schüler liegt, der Zeichnen lernen will und dazu sehr der geometrischen Anschauung bedarf, kann wohl erst die Erfahrung massgebend entscheiden. Referent ist jedoch der Meinung, dass eine Einführung in die neuere und in die darstellende Geometrie, wie sie von Dr. A. Flohr*, der von der Projection im Raume ausgeht, schon gegeben wurde, mit gewiss ebenso gutem Erfolge zum Ziele führt; denn einmal, früher oder später, muss der Anfänger doch an die Betrachtungen im Raume gewöhnt werden.

In dem zweiten Theile werden die Anfangsgründe der orthogonalen und centralen Projection dargelegt. Hier hat der Verfasser die Schwierigkeit zu bewältigen, die Anschauung des Schülers von der Ebene in den Raum zu lenken und durch stereometrische Betrachtungen nachzuweisen, dass die Construction der Perspective einer ebenen Figur mit der Construction der entsprechenden centralcollinearen Figur übereinstimmt.

Das Buch ist im Ganzen leicht verständlich und der fleissige Anfänger kann sich durch dasselbe ohne Anstrengung die Kenntniss der wichtigsten Grundzüge der neueren Geometrie erwerben, welche ihm bei der descriptiven Geometrie grosse Vortheile bieten und auch bei weiterem Studium der neueren Geometrie sehr nützlich sind.

Dresden, im April 1871. Dr. L. Burmester.

---

* „Der mathematische Unterricht in der beschreibenden Geometrie auf Realschulen, zugleich als Einführung in die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften.“ Vom Oberlehrer Dr. A. Flohr. Berlin, Bahlke & Hindersin. 1869.

Bemerkung zu S. 1—8

bezüglich des Inquisitionsprocesses des Galilei.

Das Urtheil des Herrn Cantor über die Schrift des Herrn E. Wohlwill weicht vollständig von dem ab, welches ich in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, herausgegeben von J. C. V. Hoffmann, 1. Jahrg. 4. Heft S. 333 flgg. veröffentlicht habe, und gern würde ich meine Ansicht zurücknehmen, wenn ich in der Darlegung des Herrn Cantor Unhaltbarkeit der Gründe gefunden hätte, auf die ich mich stützte. Ich suchte nämlich nachzuweisen, dass jenes in Galilei's Process so oft genannte Protokoll kein Protokoll ist, und weiter, dass die in Frage kommenden Documente unter Berücksichtigung der jedesmaligen Umstände der Entstehung eines jeden keine unerklärlichen Widersprüche enthalten. Auf diese Darlegungen erlaube ich mir hier hinzuweisen, nicht als ob ich damit alle Zweifel für gehoben ansähe, sondern nur um zu verhüten, dass als ausgemacht bereits angesehen werde, was noch in vielen Punkten fraglich ist.

Hof. FRIEDLEIN.

Bibliographie

vom 16. Februar bis 15. April 1871.

Periodische Schriften.

Monatsbericht der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften. Jahrg. 1871, 1. Heft. Berlin, Dümmler. pro compl. 4 Thlr.

Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. 9. Bd. Leipzig, Hirzel. 9 Thlr.

Sitzungsberichte der königl. bayerischen Akademie der Wissenschaften. II, 4. Heft. München, Franz. 16 Ngr.

Mathematische Annalen, herausgegeben von A. Clebsch und C. Neumann. III. Bd. 1. Heft. Leipzig, Teubner. pro compl. 5⅓ Thlr.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, herausgegeben von V. Hoffmann. 2. Jahrg. 1. Heft. Leipzig, Teubner. pro compl. 3 Thlr.

Jahrbuch über die gesammten Fortschritte der Mathematik, herausgegeben von C. Ohrtmann und J. Müller. 1. Bd. 1. Heft. Berlin, G. Reimer. ⅔ Thlr.

Repertorium der technischen, mathematischen und naturwissenschaftlichen Journalliteratur, herausgegeben von F. Schotte. 3. Jahrg. 1871. 1. Heft. Leipzig, Quandt & Händel. pro compl. 4 Thlr.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft, herausgegeben von A. Auwers und A. Winnecke. 5. Jahrg. 4. Heft. Leipzig, Engelmann. ½ Thlr.

Nautisches Jahrbuch oder vollständige Ephemeriden und Tafeln für das Jahr 1873, herausgegeben von C. Bremiker. Berlin, G. Reimer. ½ Thlr.

Annalen der Sternwarte in Leyden, herausgegeben von F. Kaiser. 2. Bd. Haag, Nijhoff. 6⅔ Thlr.

Reine Mathematik.

Dronke, A., Einleitung in die höhere Algebra. 1. Theil. Halle, Nebert. ¾ Thlr.

Worpitzky, Beiträge zur Functionentheorie. Berlin, Calvary & Comp. 12 Ngr.

Seidel, L., Ueber die Grenzwerthe eines unendlichen Potenzausdruckes. (Akad.) München, Franz. 4 Ngr.

Hirsch, M., Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra. 14. Aufl. von H. Bertram. Berlin, C. Duncker. 1 Thlr.

Paugger, F., Systematisches Lehrgebäude der mathematischen Synthesis oder Elementararithmetik. 1. Lief. Triest, Münster. ⅛ Thlr.

Battig, G., Elementargeometrie. 2. Aufl. Halle, Anton. ⅙ Thlr.

Temme, J., System der Geometrie. 1. Theil: Planimetrie. 2. Aufl. Paderborn, Schöningh. ⅓ Thlr.

Weyr, E., Ueber Evoluten räumlicher Curven. (Akad.) Wien, Gerold. 2 Ngr.

Montag, C., Ueber ein durch die Sätze von Brianchon und Pascal vermitteltes geometrisches Beziehungssystem. Breslau, Maruschke & Berendt. ⅓ Thlr.

Wenzel, G., Ueber die einfachste allgemeine Beziehung zwischen räumlichen Gebilden. Breslau, Maruschke & Berendt. ⅓ Thlr.

Hessel, Uebersicht der gleicheckigen Polyeder. Marburg, Ehrhardt. ⅙ Thlr.

Brümmer, F., Hilfsmittel für den Unterricht in der Geometrie. 2. Aufl. Wittenberg, Herrosé. ⅓ Thlr.

Schubert, F., Mathematisches Vademecum. 2. Aufl. Berlin, Wiegandt & Hempel. ⅚ Thlr.

Angewandte Mathematik.

Delabar, G., Anleitung zum Linearzeichnen. 2. Th. 3. Abth.: Die Polar- und Parallelperspective. Freiburg i. Br., Herder. 1⅓ Thlr.

Rudel, K., Die ersten Elemente der darstellenden Geometrie. Erlangen, Deichert. ⅙ Thlr.

Hecht, H., Curventafeln zum Traciren von Eisenbahnen etc. Braunschweig, Vieweg. 12 Ngr.

Mauritius, Transporteur und Massstab. Zum Gebrauche beim Unterricht. Coburg, Riemann. ⅕ Thlr.

Wand, Th., Die Principien der mathematischen Physik und die Potentialtheorie. Leipzig, Teubner. 1 Thlr.

Bertram, H., Probleme der Mechanik mit Bezug auf die Variation der Schwere und die Rotation der Erde. Berlin, Calvary & Comp. ⅓ Thlr.

Kutter, R., Die neuen Formeln für die Bewegung des Wassers in Kanälen und regelmässigen Flussstrecken. Wien, v. Waldheim. 2⅓ Thlr.

Reimann, E., Die Höhenbestimmung der Sternschnuppen. Breslau, Maruschke & Berendt. ⅓ Thlr.

Hassenstein, Bestimmung der Entfernung von Schiffen auf See. Kiel, Universitätsbuchhandlung. ½ Thlr.

Weyer, D., Vorlesungen über nautische Astronomie. Kiel, Schwers. 1 Thlr.

Zirndorfer, H., Die wichtigsten Lehren der mathematischen Geographie. Frankfurt a.M., Bechhold. ⅓ Thlr.

Brünnow, F., Lehrbuch der sphärischen Astronomie. 3. Ausg. Berlin, Dümmler. 4 Thlr.

Bruhns, C., Bestimmung der Längendifferenz zwischen Berlin und Wien. Leipzig, Engelmann. 1 Thlr.

Becker, E., Tafeln der Amphitrite, mit Berücksichtigung der Störungen durch Jupiter, Saturn und Mars. Leipzig, Engelmann. 2⅔ Thlr.

Physik.

Grove, R., Die Verwandtschaft der Naturkräfte. Deutsch von F. v. Schaper. Braunschweig, Vieweg. 1½ Thlr.

Münch, P., Lehrbuch der Physik. Freiburg i. Br., Herder. 1⅙ Thlr.

Krist, J., Anfangsgründe der Naturlehre. 4. Aufl. Wien, Braumüller. 24 Ngr.

Scherling, C., Grundriss der Experimentalphysik für höhere Unterrichtsanstalten. 2. Aufl. Leipzig, Hässel. 1⅕ Thlr.

Vierordt, K., Die Anwendung des Spectralapparates zur Messung und Vergleichung der Stärke des farbigen Lichtes. Tübingen, Laupp. ⅚ Thlr.

Czermak, J., Der elektrische Doppelhebel. Leipzig, Engelmann. ⅙ Thlr.

Peterin, J., Ueber die Bildung elektrischer Ringfiguren durch den Strom der Influenzmaschine. (Akad.) Wien, Gerold. 4 Ngr.

Schellen, H., Der elektromagnetische Telegraph. 5. Aufl. 2. Abth. (4. Lief.) Braunschweig, Vieweg. 1⅔ Thlr.

Literaturzeitung.

Recension.

Die Spectralanalyse in ihrer Anwendung auf die Stoffe der Erde und die Natur der Himmelskörper. Gemeinfasslich dargestellt von Dr. H. Schellen. Zweite, durchaus umgearbeitete und sehr vermehrte Auflage. 619 Quartseiten, mit 223 Figuren in Holzschnitt, 2 farbigen Spectraltafeln, 2 farbigen Protuberanzentafeln, 4 Tafeln des Sonnenspectrums und der Sonnenfinsternisse und 5 Portraits. Braunschweig, George Westermann, 1871. Preis 5⅓ Thlr.

Der gute Ruf, den sich Schellen durch sein Werk: „Der elektromagnetische Telegraph" erworben hat, war an sich schon eine Empfehlung seines neuen Werkes. Noch viel mehr aber muss es als ein Zeichen der Brauchbarkeit eines solchen Buches angesehen werden, wenn sich in so kurzer Zeit eine zweite Auflage nöthig macht. In der That hat sich Schellen durch diese neue Leistung abermals ein Verdienst erworben.

In erstaunlich kurzer Zeit hat die Spectralanalyse einen hohen Grad von Vollkommenheit erreicht, ihre Ergebnisse sind von höchster Bedeutung für Wissenschaft und Praxis und überall, selbst im alltäglichen Leben, treffen wir auf ihre Errungenschaften. Auch in weiteren Kreisen ist infolge dessen ein lebhaftes Interesse für diesen Zweig der exacten Naturwissenschaft rege geworden. Ganz besonders seitdem mit Hilfe des Spectroskops unsere Kenntnisse über die physische Beschaffenheit der Himmelskörper so ausserordentliche und überraschende Erweiterungen erfahren haben, war das Bedürfniss nach einem Werke sehr fühlbar geworden, welches, Allen zugänglich, möglichst vollständige Kunde von den neuen Errungenschaften geben könne.

Viele kleinere Schriften, Vorträge etc. versuchten, diesem Bedürfnisse Rechnung zu tragen; aber immer wurde dasselbe nur einseitig oder ungenü-

gend erfüllt. Es blieben entweder noch zu viele Punkte unklar oder zu viele Fragen noch unbeantwortet.

Der Versuch, alle einzelnen Theile und Abzweigungen der Spectralanalyse in ein Ganzes zu vereinigen und die Thatsachen durch möglichstes Verständniss zu verbinden, war jedenfalls ein äusserst schwieriger; er musste aber auch höchst dankenswerth erscheinen, wenn er gelang. Die eigenthümliche Schwierigkeit eines solchen literarischen Unternehmens liegt besonders darin, dass es selbst dem grössten Theile des Publikums, welches sich für die Resultate exact naturwissenschaftlicher Forschungen lebhaft interessirt, an den einfachsten Vorkenntnissen in diesen Wissenschaften fehlt, auf Grund deren eine Auseinandersetzung möglich ist.

Es ist daher nothwendig, wenn man Verständniss herbeiführen will, bis auf die Grundlage zurückzugreifen. Niemand ist aber empfindlicher und widerwilliger, Bekanntes noch einmal zu hören oder zu lesen, als gerade der Laie, der mit Begier auf Neues wartet und nur unmuthig die langen Gänge der Vorhallen der wissenschaftlichen Erkenntniss durchwandert.

Die wichtige Grenze zu finden zwischen dem Nothwendigen und dem, was als „Bekanntes" vorausgesetzt werden kann, ist sehr schwierig; nur Wenige besitzen Erfahrung und Takt genug dazu. Fehlt man nach der einen Seite, so wird das Buch für den Laien schwer verständlich, und Schwierigkeiten, die etwa gar angestrengtes Nachdenken erfordern, sind ihm verhasst; wird andererseits zu viel Bekanntes oder dieses zu gründlich behandelt, so heisst die Schrift langweilig und wird von Laien und Fachleuten gleichmässig nicht gelesen. Zwischen dieser Scylla und Charybdis ist Schellen mit viel Glück hindurchgesegelt. Es haben ihm sichtlich die musterhaften Werke Tyndall's dabei als Vorbilder vorgeschwebt. Man wird ihm aber zugestehen müssen, dass er dabei in nicht minder tüchtiger Weise seine Aufgabe gelöst hat.

Die Spectralanalyse stützt sich auf Lichtbrechung und Dispersion; beides sind aber Capitel, in denen selbst für den Fachmann noch viele dunkle Flecken zu finden sind. In diesem Gebiete dem Laien Einsicht zu schaffen, ist recht schwer. Gerade dies ist aber dem Verfasser in den einleitenden Capiteln der IV. Abtheilung: 12. Das Licht; 13. Analogie zwischen Schall und Licht; 14. Analogie zwischen Ton und Farbe; 15. Brechung des Lichtes etc., recht gut gelungen. Eine gewisse Breite liess sich da allerdings nicht ganz vermeiden.

Eine andere Schwierigkeit, an der leicht ein solches Unternehmen bedenklichen Anstoss nehmen kann, ist die Beschreibung vieler Vorrichtungen und Apparate. Gerade die Spectralanalyse macht darin ausserordentliche Ansprüche.

Selbst mit Hilfe der besten Zeichnungen ist es für Denjenigen, der nie ähnliche Apparate gesehen hat, ausserordentlich schwer, sich eine klare Vorstellung von einem Instrument zu machen und das Wichtige von den weniger wichtigen Theilen zu trennen.

Vielleicht ist in dieser Hinsicht auch in dem Schellen'schen Werke dem Leser etwas zu viel zugemuthet. Ich habe selbst Solche, welche sich recht aufmerksam und mit Liebe mit dem Buche beschäftigten und die nicht unvorbereitet zu demselben kamen, bei den vielen Abbildungen und Beschreibungen von Apparaten seufzen hören.

Es ist gefährlich, in einem für ein gewisses Publikum bestimmten Buche gleichzeitig die Hilfsapparate, Abänderungen und Details der Construction der Apparate mit einflechten zu wollen, die besonders nur für den Fachmann und Mechaniker interessant sind, und dadurch das Verständniss zu erschweren und die Entwickelung des Stoffes aufzuhalten. Für nicht unbedingt nöthig neben den anderen Abbildungen würde ich z. B. im II. Abschnitte die Figuren 45, 49, 51, 54, 63, 64 etc. halten.

Fast alle die Schwierigkeiten, die sich in so grosser Zahl darbieten, hat der Verfasser mit grossem Geschick überwunden, zum Theil durch eine glückliche Anordnung und Auswahl des Materials, zum Theil durch klare und einfache Darstellung.

Die I. Abtheilung des Buches, S. 1—52, handelt ganz sachgemäss von den Hilfsmitteln zur Erzeugung hoher Wärme- und Lichtgrade; es wird also von den Flammen im Allgemeinen und der Gasflamme, Magnesiumflamme, Knallgasflamme und dem elektrischen Funken und Flammenbogen im Besondern gesprochen. Die Magnesiumlampe hätte hier ohne Schaden wegbleiben können. Dies dürfte wohl noch ein Ueberrest der ursprünglichen Form des Buches sein; dasselbe ist aus mündlichen Vorträgen entstanden. Im öffentlichen Vortrag entbehrt man ungern die glänzenden Versuche mit Magnesiumlicht.

Die II. Abtheilung, S. 55—203, beginnt mit einer Einführung in die Natur des Lichtes, Brechung desselben, Dispersion etc., wie wir dies schon oben erwähnt haben. Dann werden die Arten der Spectren, continuirliches und Linienspectrum besprochen und die wichtigsten Spectralapparate erklärt.

Da alle Einflüsse besprochen werden, durch welche die Spectralerscheinungen und die auf diese gestützten Schlüsse modificirt werden, so hätten auch die Mitscherlich'schen Versuche nicht unerwähnt bleiben sollen. Bei der Umkehrung der Gasspectra ist der einfache subjective Versuch weggelassen, die dunkle Linie im Spectrum dadurch zu erzeugen, dass man durch eine absorbirende Flamme das Spectrum betrachtet.

Die III. Abtheilung, S. 225—601, behandelt die Spectralanalyse in ihrer Anwendung auf die Himmelskörper und umfasst zwei Drittheile des ganzen Werkes.

Zuerst wird die Sonne besprochen, die Frauenhofer'schen Linien und ihre Bedeutung; erwähnt werden die hauptsächlichsten Ansichten über die physische Beschaffenheit der Sonne. Die Absorptionslinien unserer Atmosphäre sind gründlich erörtert. Die Ergebnisse der beiden letzten totalen Sonnenfinsternisse: am 18. August 1868 und 9. April 1869, sind mit grosser Vollständigkeit erörtert und mit einem fast übergrossen Reichthum von Figuren erläutert.

Die Gedanken und Methoden, welche den Beobachtungen der Protuberanzen der Sonne bei Sonnenschein zu Grunde liegen, sind ausserordentlich deutlich und anschaulich gemacht.

Selbst die schwierigen Capitel: „50. Die Messung der Richtung und Geschwindigkeit der Gasströme auf der Sonne" und „66. Einfluss der Bewegung der Sterne im Weltraum auf ihre Spectra", gestalten sich unter der Hand des Verfassers recht klar und durchsichtig. Die Spectra der Planeten und Fixsterne und die Schlüsse, die uns dieselben gestatten, sind ausführlich auseinandergesetzt. Auch die Hypothesen über veränderliche Sterne, neue Sterne, sind ganz passend eingefügt.

Die Untersuchungen über die Spectra der Nebelflecken, der Kometen und der Meteoriten sind mit grosser Sorgfalt, Vollständigkeit und mit besonderer Gewissenhaftigkeit dargestellt. Ueberall ist Thatsache und Hypothese sorgfältig getrennt. Als Anhang sind auch die Spectra des Blitzes und des Nordlichtes besprochen.

In all diesen Capiteln ist das Material bis in die letzte Hälfte des Jahres 1870 fortgeführt; bei dem Nordlicht sind die Spectraluntersuchungen Zöllner's vom 24. und 28. October 1870, welche die Angaben Winlock's sehr modificiren, berücksichtigt.

Schon diese oberflächliche Anführung des Inhalts lässt die Reichhaltigkeit des mitgetheilten Materials erkennen. Zumal die III. Abtheilung, die sich mit den Spectren der Sterne und kosmischen Lichterscheinungen beschäftigt, ist ungemein vollständig.

Jeder Fachmann wird dieselbe mit grosser Befriedigung lesen. Die Fülle des darin Gebotenen giebt ein vollkommenes Bild der bewundernswürdigen Höhe, welche dieser jüngste Theil der Astronomie schon erlangt hat.

Besondere Anerkennung aber muss man dem gewissenhaften Streben des Verfassers zollen, in allen Theilen des Werkes wissenschaftlich wahr und streng zu bleiben. Nirgends lässt er sich zu hypothetischen Schlussfolgerungen verführen, die den Leser irre leiten könnten; überall scheidet er sorglich die Thatsache von dem Versuche ihrer Erklärung und den ver-

schiedenen Möglichkeiten ihrer Auffassung. In diesen Unterscheidungen zeigt Schellen ein feines Gefühl, welches tüchtige eigene Studien des behandelten Stoffes und die volle Beherrschung desselben verräth.

In der zweiten Abtheilung hätten wir eine eingehendere Besprechung des chemischen Theiles, zumal auch der Art und Weise gewünscht, wie man Körper spectralanalytisch auf ihre Bestandtheile untersucht. Auch hätte es dem Verfasser wohl bekannt sein können, dass man von den Mitscherlich'schen Platindochten zur Herstellung andauernder Spectren in den physikalischen Laboratorien verhältnissmässig wenig Gebrauch macht und diese besser mit dünnen Stäbchen von Gasgraphit vertauscht werden, die durch Auskochen in Säuren gehörig gereinigt worden sind.

Auch die Beschreibung des einfachsten aller Spectralapparate, der nur aus einer Röhre mit Spalt und einem einfachen Prisma besteht, hätte eine Stelle bei Besprechung der Spectralapparate finden können. Dieses Instrument kann, wenn ein einfaches Hohlprisma, mit Schwefelkohlenstoff gefüllt, angewendet wird, für kaum einen Thaler hergestellt werden und thut in den Händen von Schülern, Studirenden und Solchen, die sich für Spectralanalyse interessiren, sehr gute Dienste. Es genügt ein so einfacher Apparat, um die Frauenhofer'schen Linien, die Spectrallinien und die Umkehrung der Natriumlinie sehen zu können, und die eigene Anschauung hat doch immer den höchsten Werth.

Das Verzeichniss der Literatur der Spectralanalyse am Schlusse des Werkes ist sehr vollständig und ist eine willkommene Beigabe für Jeden, der sich gründlichere Auskunft in den Quellen suchen will.

Auch die Aeusserlichkeiten des Werkes entsprechen seinem Inhalt. Die Schreibweise ist einfach und klar; zahlreiche Citate aus vorzüglichen Arbeiten sind mit Geschick eingeflochten.

Einige Ausdrücke sind bisher nicht sonderlich gebräuchlich gewesen; dahin gehört: „secundlich", welches analog den Worten: „täglich, stündlich" gebildet ist. Der Ausdruck: „rund laufen" für die stetige Drehung eines Körpers um eine Axe, den der Verfasser auch in seinem „Elektromagnetischen Telegraph" mit Vorliebe gebraucht, ist wohl nur ein Provinzialismus, der in der Schriftsprache kaum zulässig sein dürfte. Nicht zu billigen ist auch der Ausdruck: „prismatisch geformte Gläser, Flüssigkeitstropfen oder Dunstbläschen", S. 89, Z. 17 v. o.

Die äussere Ausstattung des Werkes, der correcte Druck sowohl, als die Ausstattung mit einer so grossen Zahl meist vorzüglicher Abbildungen gereicht der Verlagshandlung zur grössten Ehre. Es ist eine wahre Freude, zu verfolgen, wie die grösseren deutschen Verlagshandlungen jetzt in möglichst ausgezeichneter Ausstattung werthvoller Bücher wetteifern und wie dadurch schon jetzt der Vorzug zum grössten Theil ausgeglichen ist, den früher zumal englische Werke vor den unseren hatten.

So können wir denn zum Schlusse das vorliegende Werk mit gutem Gewissen warm empfehlen; der Fachmann wird zumal im dritten Theil eine höchst anziehende und vollständige Uebersicht des derzeitigen Standes des auf Spectralanalyse beruhenden Theiles der Astrophysik erhalten; der Laie wird im Stande sein, an der Hand des Buches höchst schätzenswerthe und gediegene Kenntnisse in einem der schönsten Theile der exacten Naturwissenschaften zu erwerben.

Chemnitz, 1. Mai 1871. Dr. Richard Rühlmann.

Bibliographie

vom 16. April bis 30. Juni 1871.

Periodische Schriften.

Verzeichniss der Abhandlungen der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1700—1870 in alphabetischer Reihenfolge der Verfasser. Berlin, Dümmler. 1⅓ Thlr.

Abhandlungen der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 15. Bd. v. J. 1870. Göttingen, Dieterich. 8 Thlr.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der königl. bayerischen Akademie der Wissenschaften. 1871, Heft 1 und 2. München, Franz. à 12 Ngr.

Sitzungsberichte der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physikalische Classe. 1870, Heft 3 und 4; 1871, Heft 1. Leipzig, Hirzel. à ⅓ Thlr.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft, herausgegeben von A. Auwers und A. Winnecke. 6. Jahrg. 1. Heft. Leipzig, Engelmann. ½ Thlr.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgegeben von C. Ohrtmann und F. Müller. 1. Bd. Jahrg. 1868, 2. Heft. Berlin, G. Reimer. ⅔ Thlr.

Repertorium für Experimentalphysik, physikalische Technik, mathematische und astronomische Instrumentenkunde, herausgegeben von Ph. Carl. 7. Bd. 1. Heft. München, Oldenburg. pro compl. $6^2/_5$ Thlr.

Annalen der Physik und Chemie, herausgegeben von J. C. Poggendorff. Ergänzung. 5. Bd. 3. Stück. Leipzig, Barth. 1 Thlr. 2 Ngr.

Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica, ed. H. Guthe. 20. Jahrg. 2. Heft, Juli-December 1870. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 9 Ngr.

Acta nova regiae societatis scientiarum Upsalensis. Ser. III, Vol. VII, fasc. 2. 1870. Upsala, Akademische Buchhandlung. 3½ Thlr.

Bulletin de l'académie impériale des sciences de St. Petersbourg. Tome XVI, No. 1. Leipzig, Voss. pro compl. 3 Thlr.

Mémoires de l'académie impériale des sciences de St. Petersbourg. VII. Série, Tome XVI, No. 8 et 9. Ebendas. 1 Thlr. 17 Ngr.

Reine Mathematik.

JACOBI, C. G. J., Mathematische Werke. 3. Bd. Berlin, G. Reimer. 4 Thlr.

CLEBSCH, A., Ueber die partiellen Differentialgleichungen, welchen die absoluten Invarianten binärer Formen bei höheren Transformationen genügen. (Akad.) Göttingen, Dieterich. 16 Ngr.

HESSE, O., Die Determinanten. Leipzig, Teubner. ⅓ Thlr.

SPITZ, C., Erster Cursus der Differential- und Integralrechnung. 2. Lief. Leipzig, Winter. 2 Thlr.

Vega's logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. 54. Aufl. 15. Abdr. Bearbeitet v. BREMIKER. Berlin, C. Weidmann. 1¼ Thlr.

BRANDI, H., Mathematisches Uebungsbuch. II. Arithmetik und Algebra. Münster, Russell. 12 Ngr.

LIEBSEMANN, K. H., Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. Leipzig, Teubner. 12 Ngr.

MEYER, G. J., Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale zwischen reellen Grenzen. Leipzig, Teubner. 4 Thlr.

OHLERT, B., Lehrbuch der Mathematik. 1. Abth. 2. Thl. Elbing, Neumann-Hartmann. 1 Thlr.

HOCHHEIM, A., Leitfaden zum Unterricht in der Arithmetik und Algebra. 1. Heft. Berlin, Mittler & Sohn. ½ Thlr.

KRETSCHMER, E., Beiträge zur Theorie der Flächen mit ebenen Krümmungslinien, welche gegebenen Bedingungen genügen. Frankfurt a. O., Harnecker & Comp. ⅓ Thlr.

EXNER, K., Ueber die Maxima und Minima der Winkel, unter welchen krumme Flächen von Radien vectoren durchschnitten werden. (Akad.) Wien, Gerold. 4 Ngr.

ALBRICH, C., Sammlung geometrischer Aufgaben. Hermannstadt, Michaelis. 6 Ngr.

WELLER, F., Methodisches Lehrbuch der Geometrie. Aarau, Sauerländer. 18 Ngr.

WÖCKEL's Geometrie der Alten in einer Sammlung von Aufgaben. 9. Aufl. Nürnberg, Bauer & Raspe. 18 Ngr.

REUTER, F., Lehrbuch der Geometrie. 1 Thl. Planimetrie. 2. Aufl. Lübeck, Grautoff. ½ Thlr.

Sonnenburg, A., Lehrbuch der gesammten Elementargeometrie. 2. u. 3. Thl. 2. Aufl. Bremen, Gesenius. 1 Thlr. 7 Ngr.

Spieker, Th., Lehrbuch der ebenen Geometrie. 5. Aufl. Potsdam, Stein's Verlagshandlung. ⅚ Thlr.

Steinhauser, A., Die Netze der Poinsot'schen Körper zur Darstellung ihrer Modelle. Graz, Leykam-Josephsthal. 16 Ngr.

Schlotke, J., Die Hauptaufgaben der descriptiven Geometrie in stereoskopischer Darstellung. Hamburg, Friedrichsen & Comp. 1 Thlr. 12 Ngr.

Gherardi, S., Materialien zur Geschichte der mathematischen Facultät der Universität Bologna. Uebersetzt von Curtze. 2. Aufl. Berlin, Calvary & Comp. 1 Thlr.

Angewandte Mathematik.

Generalbericht über die europäische Gradmessung. Für das Jahr 1870. Berlin, G. Reimer. 1⅙ Thlr.

Kröhncke, H., Handbuch zum Abstecken von Curven auf Eisenbahnen etc. 7. Aufl. Leipzig, Teubner. 18 Ngr.

Clouth, F. M., Tafeln zur Berechnung goniometrischer Coordinaten. Halle, Nebert. 1⅔ Thlr.

Berger, G., Lehre der Perspective. 2. Aufl. Leipzig, Scholtze. ¾ Thlr.

Weisbach, J., Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik. 5. Aufl. 1. Thl. 3. u. 4. Lief. Braunschweig, Vieweg. 1 Thlr.

Walberer, J., Anfangsgründe der Mechanik fester Körper. München, Ackermann. 19 Ngr.

Wernicke, A., Lehrbuch der Mechanik. 1. Thl. 2. Aufl. Braunschweig, Vieweg. 2 Thlr.

Autenheimer, F., Aufgaben über die mechanische Arbeit. Stuttgart, Cotta. 12 Ngr.

Rebhann, G., Theorie des Erddrucks und der Futtermauern. Heft 5 u. 6 (Schluss). Wien, Gerold. à 27 Ngr.

Hagen, G., Ueber den Seitendruck der Erde. (Akad.) Berlin, Dümmler. ⅙ Thlr.

Stefan, J., Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung, insbesondere die Diffusion von Gasgemengen. (Akad.) Wien, Gerold. 8 Ngr.

Stürmer, C. M., Argumententafeln zu den von P. A. Hansen construirten ekliptischen Tafeln. Landshut, Krüll'sche Universitätsbuchhandlung. ⅙ Thlr.

Littrow, C. v., Physische Zusammenkünfte der Planeten (1) bis (82) während der nächsten Jahre. (Akad.) Wien, Gerold. 16 Ngr.

Garbich, N., Analytische Methode zur Berechnung der Sonnenfinsternisse und aller anderen Occultationen. Triest, Schimpff. 1 Thlr.

Seydler, A., Elemente des Kometen II, 1869. (Akad.) Wien, Gerold. 1½ Ngr.

Weiss, E., Discussion der während der totalen Sonnenfinsterniss am 16. August 1868 angestellten Beobachtungen und der daraus folgenden Ergebnisse. (Akad.) Wien, Gerold. 1 Thlr.

Briot, Ch., Lehrbuch der mechanischen Wärmetheorie. Deutsch, herausgegeben von H. Weber. Leipzig, Voss. 2 Thlr. 4 Ngr.

Pfaundler, L., Elementare Ableitung der Grundgleichung der dynamischen Gastheorie. (Akad.) Wien, Gerold. 2 Ngr.

Mann, F., Einzelnes aus der Undulationstheorie der Wärme. Frauenfeld, Huber. ⅓ Thlr.

Wassmuth, A., Ueber die Arbeit, welche beim Magnetisiren eines Eisenstabes durch den elektrischen Strom geleistet wird. (Akad.) Wien, Gerold. 2 Ngr.

Winkler, F., Leitfaden zur mathematischen und physikalischen Geographie. Dresden, Wolf. ⅔ Thlr.

Physik.

Wittwer, W. C., Die Moleculargesetze. Leipzig, Teubner. 1 Thlr.

Stefan, J., Ueber den Einfluss der Wärme auf die Brechung des Lichtes in festen Körpern. (Akad.) Wien, Gerold. ⅙ Thlr.

Weber, W., Electrodynamische Massbestimmungen insbesondere über das Princip der Erhaltung der Energie. (Akad.) Leipzig, Hirzel. 16 Ngr.

Wüllerstorf-Urbair, B. v., Zur wissenschaftlichen Verwerthung des Aneroides. (Akad.) Wien, Gerold. 6 Ngr.

Buff, H., Lehrbuch der physikalischen Mechanik. 1. Theil. Braunschweig, Vieweg. 2⅙ Thlr.

Dorner, H., Grundzüge der Physik. Hamburg, Meissner. 24 Ngr.

Wüllner, A., Lehrbuch der Experimentalphysik. 2. Bd. 2. Aufl. Leipzig, Teubner. 3 Thlr.

Heussi, Lehrbuch der Physik. 4. Aufl. Leipzig, Frohberg. 1⅖ Thlr.

Frick, J., Anfangsgründe der Naturlehre. 7. Aufl. Freiburg, Wagner'sche Buchhandlung. 27 Ngr.

Boymann, J. R., Lehrbuch der Physik. 2. Aufl. Cöln und Neuss, Schwann'sche Verlagshandlung. 1⅙ Thlr.

Trappe, A., Schulphysik. 5. Aufl. Breslau, Hirt. 27½ Ngr.

Crüger, J., Grundzüge der Physik. 14. Auflage. Erfurt, Körner. 18 Ngr.

Oettingen, A. v., Meteorologische Beobachtungen, angestellt in Dorpat im Jahre 1870. Dorpat, Gläser. 18 Ngr.

Astrand, J., Bericht über Bergens Observatorium in den Jahren 186 und 1870. Hamburg, Niemeyer. ½ Thlr.

Colnet d'Huart, *Mémoire sur la théorie de la chaleur et de la lumière.* Luxemburg, Brück. 18 Ngr.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1870.

Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.

A.

Analytische Geometrie der Ebene.

1. Die Grundformeln der analytischen Geometrie der Ebene in homogenen Coordinaten. Heger. Zeitschr. Math. Phys. XV, 389.
2. *On some equivalent equations. Taylor. Quart. Journ. mathem. X*, 93.
3. *On the mechanical description of curves. Russell. Phil. Mag. XXXIX*, 304.
4. Ein Dreieck mittels einer durch einen gegebenen Punkt gezogenen Geraden zu halbiren. Lindman. Grun. Archiv LI, 247.
5. *On the envelope of the pedal line of a triangle. Besant. Quart. Journ. mathem. X*, 110.
6. Einige Sätze über die Epicycloide und Hypocycloide. Eckardt. Zeitschr. Math. Phys. XV, 129.
7. Zur Geometrie der Curven dritter Ordnung. Weyr. Zeitschr. Math. Phys. XV, 383.

   Vergl. Ellipse. Geschichte der Mathematik 74. Kegelschnitte. Kreis. Krümmung. Optik 138. Parabel. Rectification.

Analytische Geometrie des Raumes.

8. *Théorie des coordonnées curvilignes quelconques. Aoust. Annali mat. Ser. 2, III*, 55. [Vergl. Bd. XV, Nr. 212.]
9. Neue homogene Plancoordinaten. Heger. Zeitschr. Math. Phys. XV, 117.
10. *Axial coordinates. Esson. Quart. Journ. mathem. X*, 113.
11. Geometrische Bestimmung der Ordnung der zu einer Fläche beliebiger Ordnung gehörigen Hesse'schen Kernfläche. Schubert. Zeitschr. Math. Phys. XV, 126.
12. *On conicoids referred to quadriplanar coordinates. Jeffery. Quart. Journ mathem. X*, 1.
13. *On conicoids referred to four-point tangential coordinates. Jeffery. Quart. Journ. mathem. X*, 97.
14. *On the nodal cones of quadrinodal cubics and the zomal conics of tetrazomal quartics. Townsend. Quart. Journ. mathem. X*, 264.
15. *On the geometrical interpretation of the covariants of a binary cubic. Cayley. Quart. Journ. mathem X*, 148.
16. Bemerkenswerthe Eigenschaft der Schraubenlinie. Reye. Zeitschr. Math. Phys. XV, 64.

   Vergl. Ellipsoid. Geschichte der Mathematik 74. Krümmung. Loxodrome. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung. Singularitäten.

Astronomie.

17. Ueber die Reduction der Monddistanzen mit Anwendung vierstelliger Logarithmen ohne Benutzung von Hilfstafeln. Ligowski. Grun. Archiv LI, 374.

18. *On a mathematical theory of tides.* Challis. *Phil. Mag. XXXIX*, 18, 260, 435.
19. *On some propositions in the theory of the tides.* Abbott. *Phil. Mag. XXXIX*, 49.
20. *Popular difficulties in tide theory.* Lacy Garbett. *Phil. Mag. XXXIX*, 174.
21. Zu der Bestimmung der Abplattungsgrenzen für das Erdsphäroid ($\frac{1}{307}$ und $\frac{1}{573}$) aus der Nutation. Heger. Zeitschr. Math. Phys. XV, 293.

Attraction.

22. Ueber die Anziehung eines Ellipsoides auf einen äusseren Punkt. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XV, 216. 388.

B.

Bessel'sche Function.

23. Ueber die Anwendung der Bessel'schen Functionen in der Theorie der Beugung. Lommel. Zeitschr. Math. Phys. XV, 141.

Bestimmte Integrale.

24. Ueber die mehrfache Differentiation unter dem Integralzeichen. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XV, 207.
25. Ueber ein Randintegral. Prym. Crelle LXXI, 305.
26. Ueber zwei bestimmte Integrale. Grube. Zeitschr. Math. Phys. XV, 464.
27. *On a theorem in definite integration.* Glaisher. *Quart. Journ. mathém. X*, 347.
28. *Sur l'intégrale* $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}$. Hermite. *Annali mat. Ser.* 2, *III*, 83.
29. *Sur le transcendante* E_n. Hermite. *Annali mat. Ser.* 2, *III*, 83.
30. *Sur une intégrale double définie.* W. Roberts. *Annali mat. Ser.* 2, *III*, 327.
31. Reduction eines vielfachen Integrales. Enneper. Zeitschr. Math. Phys. XV, 121.

C.

Chronologie.

32. Die Berechnung des christlichen Osterfestes. Kinkelin. Zeitschr. Math. Phys. XV, 217.

Combinatorik.

33. Vier combinatorische Probleme. Schröder. Zeitschr. Math. Phys. XV, 361.
34. *A demonstration of the expression for the number of homogeneous products of* n *things of* r *dimensions.* Walton. *Quart. Journ. mathém. X*, 219.
35. *On magic squares.* W. H. Thompson. *Quart. Journ. mathém. X*, 186.

Conforme Abbildung.

36. *Sulla rappresentazione conforme di un' area ellittica sopra un' area circolare.* A. Schwarz. *Annali mat. Ser.* 2, *III*, 166.

D.

Determinanten in geometrischer Anwendung.

37. *Applications nouvelles des déterminants à la géométrie.* Versluys. Grun. Archiv LI, 49.
38. *On cusps and points of inflexion, on cuspidal points and lines of inflexion.* Jeffery. *Quart. Journ mathém. X*, 232.
    Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 12.

Differentialgleichungen.

39. Zu Riemann's Beweis des Dirichlet'schen Princips. H. Weber. Crelle LXXI, 29.
40. *Applications of a change of the dependent and independent variables.* Niven. *Quart. Journ. mathém. X*, 312.
41. Ueber eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Enneper. Zeitschr. Math. Phys. XV, 56.

42. Ueber die lineare Differentialgleichung m^{ter} Ordnung:

$$\sum_{r=0}^{r=m} (a_r + b_r x^\varrho)\, x^{m-r}\, y^{(m-r)} = \sum_{r=0}^{r=p} c_r\, x^{r\varrho}.$$

Most. Zeitschr. Math. Phys. XV, 427.

43. Integration der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{d^m z}{dx^m} = x^m \frac{d^{m+n} z}{dy^{m+n}} + F_1(y) + x\,.\,F_2(y) + \ldots + x_{m-1}\, F_m(y),$$

in welcher m und n ganze positive Zahlen bezeichnen. Spitzer. Grun. Archiv LI, 499.

44. *On an equation of mixed differences.* *Walton.* *Quart. Journ. mathem.* X, 248.
Vergl. Operationscalcul.

Discriminanten.

45. Von der Zerlegung der Discriminante der cubischen Gleichung, welche die Hauptaxen einer Fläche zweiter Ordnung bestimmt, in eine Summe von Quadraten. Bauer. Crelle LXXI, 40.

46. Von den Kreisschnitten der Flächen zweiter Ordnung. Bauer. Crelle LXXI, 46.

47. *On the degree of the discriminant with respect to a parameter in certain cases.* *S. Roberts.* *Quart. Journ. math* X, 204.

48. *On the discriminant of a binary quantic.* *Cayley.* *Quart. Journ. math.* X, 23.

E.

Elektricität.

49. Ueber die elektrodynamische Wechselwirkung der Theile eines elektrischen Stromes von veränderlicher Gestalt. Boltzmann. Zeitschr. Math. Phys. XV, 16.

50. Zur Theorie der Bewegung der Elektricität in nicht linearen Leitern. Lorberg. Crelle LXXI, 53.

51. Ueber die Anwendung der Jacobi-Hamilton'schen Methode auf den Fall der Anziehung nach dem elektrodynamischen Gesetze von Weber. Holzmüller. Zeitschr. Math. Phys. XV, 69.

52. *Della distribuzione elettrica sui conduttori isolati.* *Volpicelli.* *Annali mat. Ser.* 2, *III*, 249.

Ellipse.

53. *On geometrical conics.* *Day.* *Quart. Journ. math.* X, 125.

54. *Généralisation d'un théorème d'Euler sur le cercle et son extension à l'ellipse.* *Dostor.* Grun. Archiv LI, 106.

55. *Relation entre les deux angles que font les deux rayons vecteurs d'un point de l'ellipse ou de l'hyperbole avec l'axe focal.* *Dostor.* Grun. Archiv LI, 99.
Vergl. Conforme Abbildungen. Maxima und Minima 118.

Ellipsoid.

56. *Sur les lignes de courbure d'un ellipsoide.* *Roberts.* *Annali mat. Ser.* 2, *III*, 294.
Vergl. Attraction. Maxima und Minima 118.

Elliptische Transcendenten.

57. *Sullo sviluppo del periodo imaginario pel caso che il modulo delle funzioni ellittiche sia abbastanza piccolo.* *Schlaefli.* *Annali mat Ser.* 2, *III*, 243.

58. *Sur l'expression du module des transcendantes elliptiques en fonction du quotient des deux périodes.* *Hermite.* *Annali mat. Ser.* 2, *III*, 81.
Vergl. Differentialgleichungen 41.

F.

Function.

59. Beweis zweier Sätze der Functionentheorie. Prym. Crelle LXXI, 223.

60. Beweis des Satzes, dass eine einwerthige, mehr als $2n$ fach periodische Function von n Veränderlichen unmöglich ist. Riemann. Crelle LXXI, 197.

61. Ueber hypergeometrische Functionen. Pochhammer. Crelle LXXI, 316.
Vergl. Bessel'sche Functionen. Discriminanten. Elliptische Transcendenten. Homogene Functionen. Invarianten. Thetafunctionen. Ultraelliptische Functionen.

G.

Geodäsie.

62. Die geodätischen Correctionen der auf dem Sphäroid beobachteten Horizontalwinkel. Sonderhof. Grun. Archiv LI, 20.
63. *On the course of geodesic lines on the earth's surface.* Clarke. *Phil. Mag.* XXXIX, 352.
Vergl. Astronomie 21.

Geometrie (höhere).

64. *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie.* Riemann. *Annali mat. Ser.* 2, *III*, 309.
65. Zur Theorie der Erzeugung geometrischer Curven. Ollivier. Crelle LXXI, 1.
66. Zur Theorie der Charakteristiken. Schubert. Crelle LXXI, 366.
67. Ueber die Methode, die Ordnungszahl einer Curve zu finden, welche durch zwei projectivische Curvenbüschel erzeugt wird. Ollivier. Crelle LXXI, 195.
68. Ueber die 27 Punkte einer Curve dritter Ordnung, in deren jedem sie von einem Kegelschnitte sechspunktig berührt werden kann. Weyr. Crelle LXX, 16.
69. Ueber Punktsysteme auf Curven dritter Ordnung. Weyr. Zeitschr. Math. Phys. XV, 344.
70. Ueber einige Sätze von Steiner, welche sich auf Curven dritter Ordnung beziehen, und ihren Zusammenhang mit der zwei und zweigliedrigen Verwandtschaft der Grundgebilde ersten Grades. Weyr. Crelle LXXI, 18. [Vergl. Bd. IX, Nr. 262.]
71. *Combien y a-t-il de sécantes communes à deux cubiques gauches?* Sturm. *Annali mat. Ser.* 2, *III*, 28.
Vergl. Kegelschnitte 105.

Geschichte der Mathematik.

72. Ueber das Zurückbleiben der Alten in den Naturwissenschaften. Littrow. Grun. Archiv LI, 112.
73. Die Regel vom falschen Satze bei den Indern und Arabern des Mittelalters und eine bemerkenswerthe Anwendung desselben zur directen Auflösung der quadratischen und cubischen litteralen Gleichungen. Matthiessen. Zeitschr. Math. Phys. XV, 41.
74. Die Theorie der caustischen Linien und Flächen in ihrer geschichtlichen Entwickelung. Bösser. Zeitschr. Math. Phys. XV, 170.
75. Zur Geschichte der Telegraphie und des Elektromagnetismus. Zetzsche. Zeitschr. Math. Phys. XV, 66, 136.

Gleichungen.

76. Bemerkungen über die algebraische Lösbarkeit der Gleichungen. Krey. Zeitschr. Math. Phys. XV, 381.
77. *On criticoids.* Cockle. *Phil. Mag.* XXXIX, 201.
78. *On coresolvents.* Cockle. *Quart. Journ. math.* X, 35. [Vergl. Bd. X, Nr. 101.]
79. Elementare Auflösung der allgemeinen Gleichung vierten Grades. Grassmann. Grun. Archiv LI, 93.
80. *La risolvente dell' equazione di quinto grado sotto la forma di un determinante simmetrico a quattro linee.* Schlaefli. *Annali mat. Ser.* 2, *III*, 171.
81. *On the anharmonic-ratio sextic.* Walker. *Quart. Journ. math.* X, 53. — Cayley *ibid.* 56.
82. Ueber die Auflösung eines Systemes von unendlich vielen linearen Gleichungen. Kötteritzsch. Zeitschr. Math. Phys. XV, 1, 229.
Vergl. Geschichte der Mathematik 73. Homogene Functionen.

H.

Homogene Functionen.

83. Ueber die Darstellung der einförmigen symmetrischen Functionen der Simultanwurzeln zweier algebraischer Gleichungen. Hess. Zeitschr. Math. Phys. XV, 325.

Vergl. Combinatorik 34.

Hydrodynamik.

84. *On the motion of fluids.* Cockle. *Quart. Journ. math.* X, 150, 289.
85. *De aequilibrii figuris et revolutione homogeneorum annulorum sidereorum sine corpore centrali atque de mutatione earum per expansionem aut condensationem.* Matthiessen. *Annali mat. Ser.* 2, *III*, 84.
86. *On a fundamental theorem in hydrodynamics.* Warren. *Quart. Journ. math.* X, 127.
87. Die Helmholtz'sche Theorie der Flüssigkeitswirbel. Veltmann. Zeitschr. Math. Phys. XV, 451.
88. *On a theorem of the resistance of fluids.* Walton. *Quart. Journ. math.* X, 122.

Hyperbel.

Vergl. Ellipse 55.

I.

Imaginäres.

89. *On* $\sqrt{-1}$. Guthrie. *Phil. Mag.* XXXIX, 282.
90. Allgemeine analytische Theorie der Function $\Pi(x)$ und über eingebildete Dreiecke und Vierecke. Grunert. Grun. Archiv LI, 423.

Vergl. Elliptische Transcendenten 57.

Invarianten.

91. Ueber die Invarianten binärer Formen bei höheren Transformationen. Gordan. Crelle LXXI, 164.
92. *On the invariants and covariants of a system of three conics.* Snow Burnside. *Quart. Journ. math.* X, 239.
93. *Les invariants et les covariants en qualité de critères pour les racines d'une équation.* Schramm. *Annali mat. Ser.* 2, *III*, 41. [Vergl. Bd. XIII, Nr. 295.]
94. *On the invariants and covariants* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ *of a binary quartic considered geometrically as a system of a ternary quadrics.* Snow Burnside. *Quart. Journ. math.* X, 211.

K.

Kegelschnitte.

95. Allgemeine Discussion der Gleichung der Linien des zweiten Grades. Grunert. Grun. Archiv LI, 276.
96. Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte, insbesondere auch die allgemeine Gleichung des Kreises in Dreiliniencoordinaten oder in sogenannten trimetrischen Coordinaten. Grunert. Grun. Archiv LI, 257.
97. Allgemeine Discussion der Gleichung des zweiten Grades
$$Ap_0^2 + Bp_1^2 + Cp_2^2 + Dp_0p_1 + Ep_1p_2 + Fp_2p_0 = 0$$
zwischen trimetrischen Coordinaten. Grunert. Grun Archiv LI, 326.
98. *Relations nouvelles entre les tangentes, normales, soustangentes et sousnormales des courbes en général avec application aux lignes du second degré.* Dostor. Grun. Archiv LI, 129.
99. *On certain properties of confocal conics and theorems derived therefrom.* Wolstenholme. *Quart. Journ. mathém.* X, 285.
100. *On the anharmonic-ratio sextic of a pair of conics.* Walker. *Quart. Journ. math.* X, 162.
101. *Anharmonic properties of conics inscribed in a quadrilateral.* Walker. *Quart. Journ. math.* X, 317.

102. Tangentialcurven der Kegelschnitte. Hochheim. Zeitschr. Math. Phys. XV, 377.
103. Ueber geometrische Oerter der merkwürdigen Punkte des Dreiecks. Hochheim. Zeitschr. Math. Phys. XV, 33.
104. *On conics inscribed in and circumscribed to triangles.* *Taylor.* *Quart. Journ. math.* *X*, 129. [Vergl. Bd. XIII, Nr. 113.]
105. *Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques.* *Smith.* *Annali mat. Ser* 2, *III*, 112, 218.
Vergl. Ellipse. Geometrie (höhere) 68. Invarianten 92. Kreis. Parabel.

Kreis.

106. Ueber den Feuerbach'schen Satz für das ebene Dreieck. Lappe. Crelle LXXI, 387.
107. Ein merkwürdiger Kreis um den Schwerpunkt des Perimeters des geradlinigen Dreiecks als Analogon des Kreises der neun Punkte. Spieker. Grun. Archiv LI, 10.
108. *On a property of the eight circles which can be drawn through the six points of intersection of three given circles.* *Griffiths.* *Quart. Journ. math.* *X*, 230.
109. *Note on finding the degree of a certain locus connected with a triangle inscribed in a circle.* *Griffiths.* *Quart. Journ. math.* *X*, 229.
110. Ueber einander berührende Kreise. Nippert. Grun. Archiv LI, 371.
111. *Calcul des rayons des deux cercles qui touchent trois cercles tangents deux à deux.* *Dostor.* Grun. Archiv LI, 191.
Vergl. Ellipse 54.

Krümmung.

112. Ueber den Ausdruck des Krümmungsradius in Polarcoordinaten und über diejenigen Curven, deren Gleichung $r^k = a^k \sin k\theta$. Unferdinger. Grun. Archiv LI, 72.
113. *On the direction of lines of curvature in the neighbourhood of an umbilicus.* *Frost.* *Quart. Journ. math.* *X*, 78. — *Cayley ibid.* 111.
114. *On dual curvature and the duals of evolutes and involutes.* *Jeffery.* *Quart. Journ. math.* *X*, 321.
115. Krümmungsverhältnisse eines Curvenbüschels in einem Scheitel. Weyr. Zeitschr. Math. Phys. XV, 486.
Vergl. Ellipsoid.

L.

Loxodromen.

116. Ueber die Loxodromen der Kegelflächen. Enneper. Zeitschr. Math. Phys. XV, 466.
Vergl. Geodäsie 63.

M.

Maxima und Minima.

117. *On a theorem in maxima and minima.* *Walton.* *Quart. Journ. math.* *X*, 253. — *Cayley ibid.* 262.
118. Ueber das grösste in eine Ellipse zu beschreibende Dreieck und das grösste in ein dreiaxiges Ellipsoid zu beschreibende Tetraeder. Unferdinger. Grun. Archiv LI, 127.

Mechanik.

119. Das Parallelogramm der Bewegungen in der Wellenlehre. Krumme. Zeitschr. Math. Phys. XV, 289.
120. *To determine the small oscillations of a particle on any surface acted upon by any forces.* *Stawell Ball.* *Quart. Journ. math.* *X*, 220.
121. *An interpretation and proof of Lagrange's equations of motion referred to generalized coordinates.* *Hayward.* *Quart. Journ. math.* *X*, 369.
122. *Sul problema della rotazione dei corpi.* *Brill.* *Annali mat. Ser.* 2, *III*, 33.

123. Ueber die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit. Kirchhoff. Crelle LXXI, 237.
124. Ueber die Kräfte, welche zwei unendlich dünne, starre Ringe in einer Flüssigkeit scheinbar auf einander ausüben können. Kirchhoff. Crelle LXXI, 263.
125. *On the solid of least resistance.* *Walton.* *Quart. Journ. math.* X, 344.
126. *If a membrane, extensible or inextensible, be in equilibrium under the influence of forces at every point normal to the surface, then the normal pressure at any point is equal to the tension of the surface at that point multiplied into the sum of the reciprocals of the principal radii of curvature.* *Stawell Ball.* *Phil. Mag.* XXXIX, 107.
Vergl. Attraction. Elektricität. Hydrodynamik. Molecularphysik. Optik. Pendel. Schwerpunkt. Trägheitsmoment. Wärmelehre.

Mittelwerthe.

127. Ueber die Berechnung der mittleren Tagestemperatur aus der höchsten und tiefsten Temperatur. Stahlberger. Zeitschr. Math. Phys. XV, 475.

Molecularphysik.

128. Beiträge zur Molecularphysik. Wittwer. Zeitschr. Math. Phys. XV, 92. [Vergl. Bd. XIV, Nr. 88.]

O.

Oberflächen.

129. Ueber die Gestalt kleiner Flächenstücke. Exner. Grun. Archiv LI, 7.
130. Ueber die developpable Fläche, welche einer gegebenen Fläche umschrieben ist. Enneper. Zeitschr. Math. Phys. XV, 283. [Vergl. Bd XIV, Nr. 166.]
131. *On centres of curves or surfaces and their polar and pole curves or surfaces.* *Jeffery.* *Quart. Journ. math.* X, 171.
132. *Sopra un problema che si presenta nella teoria generale delle rappresentazioni geografiche di una superficie su di un'altra.* *Dini.* *Annali mat. Ser.* 2, III, 269.
133. *On the double-sixers of a cubic surface.* *Cayley.* *Quart. Journ. math.* X, 58.
134. *On the quartic surfaces* $(*)(U, V, W)^2 = 0$. *Cayley.* *Quart. Journ. math.* X, 24.
Vergl. Maxima und Minima 117. Singularitäten.

Oberflächen zweiter Ordnung.

135. *On a property of surfaces of the second degree.* *Walton.* *Quart. Journ. math.* X, 167.
136. *Properties of quadrics having common intersection and of quadrics inscribed in the same developable (being an extension of chapter XVI of Chasles' conics).* *Gardiner.* *Quart. Journ. math.* X, 132.
Vergl. Discriminanten. Ellipsoid. Sphärik.

Operationscalcul.

137. Die Integration der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen durch die Methode der Trennung der operativen Symbole. Grelle. Zeitschr. Math. Phys. XV, 297.

Optik.

138. Ueber eine Brechungscurve. Hochheim. Grun. Archiv LI, 253. [Vergl. Bd. XV, Nr. 327.]
139. Berechnung der hyperbolischen dunkeln Büschel in zweiaxigen Krystallen. Kurz. Zeitschr. Math. Phys. XV, 209.
140. Ueber Linsen, welche von einem homogenes Licht ausstrahlenden Punkte ein mathematisch genaues Bild geben. Graffweg. Zeitschr. Math. Phys. XV, 311.
Vergl. Bessel'sche Function. Geschichte der Mathematik 74.

P.

Parabel.

141. *Inclinaison du rayon vecteur sur l'axe de la parabole.* *Dostor.* Grun. Archiv LI, 102.

Pendel.

142. Elementare Ableitung der Formel für die Schwingungsdauer eines einfachen Pendels. Gretschel. Grun. Archiv LI, 1.

Planimetrie.

143. Beweis eines Satzes vom gleichseitigen Dreiecke. Lindman. Grun. Archiv LI, 194.
144. *Propriétés du triangle rectangle.* *Dostor.* Grun. Archiv LI, 103.
145. Ein Satz über Transversalen eines Dreiecks. Nippert. Grun. Archiv LI, 368.
146. Die rationalen Dreiecke. Simerka. Grun. Archiv LI, 196.
    Vergl. Imaginäres 90.

Q.

Quadratische Formen.

147. Zur Transformation der ternären quadratischen Formen. Bachmann. Crelle LXXI, 296.
148. Entwickelung einiger Eigenschaften der quadratischen Formen von n Differentialen. Lipschitz. Crelle LXXI, 274, 288.

Quadratur.

149. Theorie des Polarplanimeters in strenger elementarmathematischer Entwickelung. Grunert. Grun. Archiv LI, 385.

R.

Rectification.

150. Notiz über die Rectification von Curven. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XV, 215.
151. Ueber rectificable Curven. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys XV, 124.

Reihen.

152. Ueber das Dirichlet'sche Paradoxon bei unendlichen Reihen. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XV, 134.
153. Ueber trigonometrische Reihen. Heine. Crelle LXXI, 353.
154. *On the expression of a certain function in the form of a series.* *Walton.* *Quart. Journ. math.* X, 87.
155. Relationen zwischen einigen unendlichen Reihen. Enneper. Zeitschr. Math. Phys. XV, 47.

S.

Schwerpunkt.

156. Ueber den Schwerpunkt der Umgrenzung bei den einfachsten Figuren und Körpern. Most. Grun. Archiv LI, 15.
157. Die Coordinaten des Schwerpunkts eines beliebigen Vierecks und sich aus denselben ergebende Constructionen dieses Punktes im Vergleich mit dem Schwerpunkte des Trapezes. Emsmann. Grun. Archiv LI, 241.
    Vergl. Kreis 107.

Singularitäten.

158. *Sur les singularités ordinaires d'une courbe gauche et d'une surface développable.* *Zeuthen.* *Annali mat. Ser.* 2, *III*, 175.

REESE LIBRARY OF THE UNIVERSITY

Sphärik.

159. *Propriétés du triangle sphérique rectangle.* *Dostor.* Grun. Archiv LI, 109.

Stereometrie.

160. Theorie des Tetraeders aus den sechs Kanten. Unferdinger. Grun. Archiv LI, 353.

T.

Thetafunctionen.

161. Zur Bestimmung von $\vartheta(0, 0 \ldots 0)$ durch die Classenmoduln algebraischer Functionen. Thomae. Crelle LXXI, 201.

Trägheitsmoment.

162. *On the moment of inertia of a ring with respect to its axis of revolution.* *Townsend.* *Quart. Journ. math.* X, 203.

Trigonometrie.

163. *On a certain system of trigonometrical equations with applications to the porisms of two coaxial conics.* *Wolstenholme.* *Quart Journ. mat.* X, 356.
164. *Les angles que les côtés du triangle forment avec leur lignes de gravité respectives.* *Fasbender.* Grun. Archiv LI, 46. — *Bermann ibid.* 506. [Vergl. Bd. XV, Nr. 186.]
165. *Propriété de la bissectrice d'un angle dans le triangle.* *Dostor.* Grun. Archiv LI, 97.

U.

Ultraelliptische Functionen.

166. Die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale als Functionen eines Parameters aufgefasst. Fuchs. Crelle LXXI, 91.
167. *Le relazioni fondamentali tra i moduli di periodicità degli integrali Abeliani di prima specie.* *Casorati.* *Annali mat. Ser.* 2, *III*, 1.
168. *Sur les fonctions Abeliennes.* *Roberts.* *Annali mat. Ser.* 2, *III*, 70.

V.

Variationsrechnung.

169. *On a problem in the calculus of variations.* *Walton.* *Quart. Journ. math.* X, 72.

W.

Wärmelehre.

170. *On the termodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbance.* *Rankine.* *Phil. Mag.* XXXIX, 306.
171. *Avogrado's law deduced from the fundamental conception of the mechanical theory of gases.* *Naumann.* *Phil. Mag.* XXXIX, 317.
172. *On the theory of variation of the temperature in gases in consequence of chances in their density and presaure.* *Heath.* *Phil. Mag.* XXXIX, 347.
173. *On thermodynamics.* *Heath.* *Phil. Mag.* XXIX, 421.
    Vergl. Mittelwerthe.

Z.

Zahlentheorie.

174. Ueber quadratische, trigonale und bitrigonale Reste. Stern. Crelle LXXI, 137.
175. *Sopra alcuni teoremi aritmetici.* *Tardy.* *Annali mat. Ser.* 2, *III*, 331.
    Vergl. Combinatorik 35. Planimetrie 146. Quadratische Formen 147.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Lehrbuch der neueren Geometrie für höhere Unterrichtsanstalten und zum Selbststudium. Von Dr. RUDOLF STAUDIGL. Mit 82 Holzschnitten. Wien, L. W. Seidel & Sohn. 1871.

Der Verfasser dieses Buches sagt in dem Vorworte: „Die vortrefflichen Werke von Chasles, Paulus, Reye und Gretschel, welchen das Verdienst gebührt, die neuere Geometrie weiteren Kreisen zugänglich gemacht zu haben, sind allerdings für den ersten Unterricht berechnet. Dennoch schien mir ein leichtfasslich geschriebenes Buch wünschenswerth, in welchem nicht blos die ebenen, sondern auch die räumlichen Gebilde behandelt werden, und welches sich nicht blos auf die Untersuchung allgemeiner Lagenverhältnisse allein beschränkt, sondern auch metrische Beziehungen erörtert."

Diese Forderungen werden durch jene Werke erfüllt; aber es ist auch Jeder, der wissenschaftliche Befähigung und pädagogische Erfahrung besitzt, berechtigt, ein Lehrbuch zu schreiben, welches seinem Wunsche entspricht. Der Verfasser hat den in jenen Werken enthaltenen Stoff in geordneter Weise sorgfältig masshaltend bearbeitet. Man findet daher auch keine neuen Resultate; nur die Anordnung wird dadurch modificirt, dass der Verfasser von der folgenden, nicht präcis gegebenen Definition ausgeht: „Projicirt man eine Punktreihe durch einen beliebigen Strahlenbüschel auf irgend eine Gerade, projicirt ferner die erhaltene Projection durch einen zweiten Büschel, dessen Ebene von jener des ersten verschieden sein kann, abermals, und setzt man dieses Verfahren beliebig oft fort, so sind alle dadurch sich ergebenden Punktreihen mit einander projectivisch verwandt oder, wie man auch kürzer sagt, projectivisch." Präciser sollte diese Definition so lauten: Projicirt man eine Punktreihe von einem beliebig angenommenen Punkte durch ein Strahlen-

büschel auf irgend eine Gerade in der Ebene dieses Büschels etc. Denn eine bestimmte Punktreihe kann nicht durch einen beliebigen Strahlenbüschel und auch nicht auf irgend eine Gerade ohne bestimmte Bedingungen projicirt werden. Durch diese Definition und mittels des Doppelverhältnisses gelangt der Verfasser zu den mannigfaltigen Sätzen, den wichtigsten Lagenverhältnissen und metrischen Beziehungen der Gebilde in der Ebene. In diesem Theile nähert sich das Buch der Form und dem Inhalte nach der „Organischen Geometrie" von Gretschel; aber es ist reichhaltiger als diese, weil die Collineation im Raume eine weitergehende Betrachtung findet. Der Verfasser hat sich stets bemüht, für den Anfänger leicht verständlich zu schreiben; aber leider wird dem Anfänger das Verständniss einzelner Sätze durch manche Druck-, resp. Schreibfehler erschwert. Zur Bestätigung dieses betrachte man z. B. den kleinen, vier Fehler enthaltenden Satz auf S. 22:

„Daher sind S und S_1 Scheine derselben Punktreihe R und liegen perspectivisch."

Corrigirt lautet dieser Satz:

Daher sind R und R_1 Schnitte desselben Strahlenbüschels und liegen perspectivisch.

Manche Beweisführung ist sehr wortreich; aber dieser Wortreichthum ist entschuldbar, weil das Buch für Anfänger bestimmt ist.

Im Texte findet man zuweilen Eigenthümlichkeiten der Sprache, welche dem norddeutschen Leser sehr seltsam scheinen müssen. So wird z. B. das Wort „nachdem" in unrichtiger Weise meist für die Wörter „da" und „weil" gebraucht. Die Holzschnitte sind, abgesehen von einigen unbedeutenden Fehlern in der Bezeichnung, gut ausgeführt und stehen stets in grösster Nähe des sich auf sie beziehenden Textes. Dies ist ein beachtenswerther Vorzug, der dem lernenden Leser das störende Umwenden des Blattes so viel als möglich erspart. Ungeachtet der erwähnten Mängel hat Referent das Buch mit Interesse gelesen.

Dresden, Juli 1871. Dr. L. Burmester.

Die Hauptaufgaben der descriptiven Geometrie. In stereoskopischen Figuren dargestellt und herausgegeben von Julius Schlotke. Hamburg, L. Friederichsen & Comp. 1871.

Der Herausgeber hat die wichtigsten Aufgaben der descriptiven Geometrie mit ihrer Lösung auf 30 kleinen Tafeln für die stereoskopische Betrachtung mit grosser Sorgfalt gezeichnet, und auch von dem Lithographen sind die Figuren, sowie die bezeichnenden Buchstaben gut ausgeführt. Zwar bemerkt man in den Figuren einzelne wenig störende Unrichtigkeiten, z. B. die Gerade Cc (Taf. 10), die von a auf die Projectionsaxe gezogene Senkrechte (Taf. 15) erscheinen im Stereoskop doppelt, und der Punkt E

(Taf. 18) erscheint nicht genau auf der Geraden ab_1 liegend. Diese kleinen, gewiss von dem Lithographen verursachten Fehler sind aber so unbedeutend, dass sie nicht ins Gewicht fallen. Referent hätte gewünscht, dass bei dem Kegelschnitt nicht nur die Construction desselben, sondern der Wichtigkeit wegen auch der Kegelschnitt selbst dargestellt worden wäre.

In überraschender Deutlichkeit erblickt man die Aufgaben mit ihrer Lösung, und der Lernende erhält mit einem Blicke die richtige Vorstellung von der Lösung und den Lagen der Linien im Raume. Jeder Lehrer, der keine Modelle besitzt, wird dieses Unterrichtshilfsmittel bei Schülern, denen die räumliche Anschauung Schwierigkeiten bereitet, mit dem besten Erfolge anwenden; und jedem Anfänger, der sich den Unterricht in der descriptiven Geometrie erleichtern will, kann man diese Tafeln sehr empfehlen.

Dresden, Juli 1871. Dr. L. Burmester.

Die Sterblichkeit in Sachsen. Nach amtlichen Quellen dargestellt von G. F. Knapp. Leipzig, 1869. Verlag von Duncker & Humblot. 8. 7½ Bogen Text und 5½ Bogen Tabellen.

Der Verfasser der uns vorliegenden Schrift ist vor einigen Jahren mit einer in mehr mathematische Form gekleideten Arbeit: „Ueber die Ermittelung der Sterblichkeit aus den Aufzeichnungen der Bevölkerungsstatistik" vor das Publikum getreten. Genannte Arbeit ist nun dem Referenten nur durch die eingehende Besprechung bekannt geworden, welcher sie Herr Hattendorff in den Götting. gel. Anzeigen vom 13. Mai 1868 unterworfen hat; aber auch aus dieser Besprechung schon liess sich entnehmen, worin Herr Knapp seine mathematisch zu lösende Hauptaufgabe findet, nämlich in der Angabe einestheils derjenigen „Gesammtheiten", welche als statistisches Material erwünscht erscheinen, anderntheils der Methoden, nach welchen aus diesem Material, dem Rohstoffe der Untersuchung, welches empirisch gegeben sein muss, die weiteren Folgerungen gezogen werden. Heute hat der Verfasser das damals theoretisch Entwickelte praktisch verwerthet und in der That aus schon vorhandenen Beobachtungen, welche im Königreich Sachsen gesammelt worden waren, eine Anzahl von gefolgerten Listen und Tabellen hergestellt, deren Erläuterung und Uebersetzung in die Sprache des bürgerlichen Lebens den zweiten und dritten Hapttheil des Textes (S. 37—112) bildet. Als Einleitung sind in drei Capiteln (1. Gesammtheit von Lebenden und von Verstorbenen; 2. über die Messung der Sterblichkeit; 3. von den Störungen) die Hauptzüge jener früheren theoretischen Entwickelung mitgetheilt, wobei mathematische Formeln streng vermieden wurden. Ob der Verfasser dadurch dem Statistiker vom Fache viel verständlicher geworden ist, darüber gestatten wir uns kein Urtheil. Der mathematische Leser jedoch wird gut daran thun, die vorkommenden De-

finitionen und Schlüsse in mathematische Functionalitäten und Gleichungen umzusetzen, wenn er den Nachweis des Haupttheoremes sich zu eigen machen will: dass nämlich *a)* die Gesammtheit Derjenigen, die aus einer gegebenen Strecke der Geburtszeit stammen, zwischen gegebenen Altersgrenzen sterben; *b)* die Gesammtheit der gleichfalls aus gegebener Strecke der Geburtszeit Stammenden, welche zwischen zwei gegebenen Zeitpunkten verstorben sind; *c)* die Gesammtheit der in einer gegebenen Zeitstrecke zwischen zwei gegebenen Altersgrenzen Verstorbenen sämmtlich zurückführbar sind auf Gesammtheiten von Lebenden, und zwar von gleichaltrigen Lebenden und von gleichzeitig Lebenden. In Bezug auf die aus den ursprünglichen Grundlagen abgeleiteten Tabellen dürfte vielleicht besonders hervorzuheben sein, dass der Verfasser alle Zahlen von Verstorbenen auf die Einheit der Geborenen zurückführt, also in Decimalbrüchen angiebt. Der grosse Vortheil, der daraus erwächst, besteht darin, dass man den Ergebnissen ohne Weiteres aus der Anzahl der Decimalstellen ansieht, aus welcher ursprünglichen Menge (100, 1000 oder 10000) sie abgeleitet sind, und dass entsprechend der Wahrheit, dass nur bei grossen Zahlen wirkliche Durchschnittsrechnungen genauer durchzuführen gestattet sein darf, die Brüche aus verschiedenen Listen nur mit ihren der Anzahl nach übereinstimmenden Anfangsstellen in Vergleich und gegenseitige Beziehung treten dürfen. Endlich aus den Folgerungen für das Königreich Sachsen heben wir die nachstehenden hervor:

1. die Sterblichkeit im ersten Lebensjahre ist bei Knaben um 0,04 grösser als bei Mädchen;
2. in demselben Alter ist die Sterblichkeit in der Stadt um 0,02 bis 0,03 grösser als auf dem Lande;
3. wieder in dem ersten Lebensjahre ist die Sterblichkeit der unehelich Geborenen um 0,07 grösser als die der ehelich Geborenen;
4. dagegen überwiegt die Sterblichkeit der Ehelichen gegenüber der der Unehelichen in der Altersclasse 1 bis 6 Jahre um 0,04.

Aus den beiden letzten Thatsachen folgert Herr Knapp, dass bei den unehelich Geborenen sehr bald alle wegsterben bis auf die, welche dann auch in späteren Lebensjahren einen grösseren Widerstand leisten; bei den ehelich Geborenen scheint dagegen durch sorgfältigere Behandlung die Auswahl der Kräftigeren verzögert, nicht aber ganz verhütet zu werden, und zwar in der Art, dass von den Ehelichen ein Theil derer, die im ersten Lebensjahre geschont sind, desto sicherer in der nächsthöheren noch jugendlichen Altersclasse nachgeholt werden.

Heidelberg. CANTOR.

Ueber ein einfaches Coordinatensystem der Geraden. Beilage zum Osterprogramm des Wiesbadener Realgymnasiums. Von W. Unverzagt. 1871.

Wir sind dem Verfasser schon früher im IX. Bande dieser Zeitschrift, Literaturzeitung S. 110, als einem gedankenreichen, begabten Geometer begegnet, und auch die uns heute vorliegende Programmschrift hat uns die gleiche Anerkennung abgedrungen. Wie damals, erachten wir es als Schuldigkeit, das grössere mathematische Publikum auf eine Abhandlung aufmerksam zu machen, deren weiterer Verbreitung wohl nur die Form des Erscheinens als Programmbeilage im Wege steht. Die diesjährige Abhandlung ist 28 Quartseiten stark. Sie besteht eigentlich aus mehreren gesonderten Untersuchungen, von denen wir wenn auch nicht ausführliche Rechenschaft, doch einige kurze Andeutungen zu geben wünschen. Zuerst berichten wir demgemäss über die von dem Verfasser sogenannten longimetrischen Functionen. Denken wir uns ein bei C rechtwinkliges Dreieck ABC, so ist $\frac{AC}{AB} = \sin ABC$, oder mit anderen Worten: Sinus eines Winkels ist der Quotient, welcher entsteht, wenn man mit dem einen Schenkel in die Länge einer Transversalen dividirt, die mit dem andern Schenkel den Winkel 90° bildet. Aus diesem Wortlaute geht hervor, was gewiss schon manchem Mathematiker einleuchtete, was auch Referent in Vorträgen über Trigonometrie schon selbst ausgesprochen hat, was aber wohl noch nie im Drucke veröffentlicht worden war, dass der Winkel von 90°, welchen die Transversale mit dem einen Winkelschenkel bildet, etwas ganz Zufälliges ist, etwa so, wie die Grundzahl 10 des briggischen Logarithmensystems. Welchen Winkel γ jene AC auch mit dem Schenkel BC bildet, immer könnte man $\frac{AC}{BC}$ einen Sinus nennen; nur müsste man dann freilich den rechtwinkligen Sinus von dem allgemeinen γwinkligen Sinus zu unterscheiden wissen, ebenso, wie man Logarithmen des vulgären Systems von denen mit einer andern Basis nach Benennung und Bezeichnung zu sondern weiss. Analog dem $\overset{b}{\log} a =$ Logarithme von a für die Basis b schlagen wir nun vor, $\overset{\gamma}{\sin} ABC =$ Sinus von ABC für die Neigung γ zu schreiben und auszusprechen, wobei die Einsetzung des einfachen Buchstaben β statt ABC noch die Abkürzung $\overset{\gamma}{\sin}\beta$ gestattet. Wir bemerken, dass der Sinus in diesem allgemeineren Sinne, der Logarithme und der Divisionsquotient Unterarten einer und derselben Function von zwei Veränderlichen sind, welchen die Functionalgleichung genügt:

$$f(x_1, x_3) = f(x_1, x_2) + f(x_2, x_3).$$

Denn ebenso, wie

$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3},$$

ist auch

$$\overset{x_1}{\log} x_3 = \overset{x_1}{\log} x_2 + \overset{x_2}{\log} x_3 \quad \text{und auch} \quad \overset{x_1}{\sin} x_3 = \overset{x_1}{\sin} x_2 + \overset{x_2}{\sin} x_3.$$

Hierdurch dürfte vielleicht eine eigene Untersuchung dieser höheren Functionalität f den Lesern empfohlen sein. Herr *Unverzagt* ist auf diese Ausbildung des von ihm S. 3 ausgesprochenen Gedankens des verallgemeinerten Sinus nicht verfallen; dagegen hat er den sinnreichen Einfall gehabt, den Neigungswinkel γ der Transversalen AC zu dem Winkelschenkel BC zu 0 oder 180° werden zu lassen, während der Winkel ABC selbst zu 0 wird. Mit anderen Worten: die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ (welche er unter dieser Voraussetzung durch kleine deutsche Buchstaben bezeichnet) werden zu Punkten auf einer geraden Linie und $\mathfrak{c}$ theilt die Strecke $\mathfrak{ab}$ innerlich oder äusserlich. Der Quotient $\frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{ab}}$ hört deshalb nicht auf, zu bestehen, und bis zu einem gewissen Grade ist er auch noch ein Sinus zu nennen. Herr *Unverzagt* nennt ihn nun einen *longimetrischen Sinus* und bildet in Analogie zu demselben und zu den goniometrischen Functionen auch die anderweitigen Quotienten $\frac{\mathfrak{cb}}{\mathfrak{ab}}$ = *longimetrischer Cosinus*, $\frac{\mathfrak{ac}}{\mathfrak{cb}}$ = *longimetrische Tangente* u. s. w., kurzum die longimetrischen Functionen der geradlinigen Punktverbindung $\mathfrak{acb}$ oder kürzer von $\mathfrak{c}$, wenn die ursprüngliche Strecke $\mathfrak{ab}$ als bekannt vorausgesetzt ist. Die Aufeinanderfolge der Buchstaben bedingt wie gewöhnlich die Richtung, in welcher die einzelnen Strecken gemessen werden, also ihr positives oder negatives Vorzeichen, und so werden die Gleichungen abgeleitet

$$\begin{aligned} \sin\mathfrak{c} + \cos\mathfrak{c} &= 1, \\ 1 + tg\,\mathfrak{c} &= \sec\mathfrak{c}, \\ \sin(\mathfrak{c} - \mathfrak{b}) &= \sin\mathfrak{c} \,.\, \cos\mathfrak{b} - \cos\mathfrak{c} \,.\, \sin\mathfrak{b} \end{aligned}$$

u. s. w., bei welchen wir nur die Bezeichnung etwas geändert wünschen, damit auch dem Leser ins Auge falle, dass er mit longimetrischen und nicht mit goniometrischen Functionen zu thun hat; vielleicht genügt die Anhängung des Buchstaben l, etwa in der Form $sin\,l$, $cos\,l$, $tg\,l$, $cotg\,l$ u. s. w. Wir können nun nicht näher auf die mit diesen Functionen vorgenommenen Rechnungen eingehen, bemerken vielmehr nur, dass eine Uebereinstimmung mit goniometrischen Functionen in der Art nachgewiesen wird, dass zu jedem Winkel γ eine Punktfolge $\mathfrak{acb}$ in der Weise gehört, dass

$$(\sin\gamma)^2 = \sin l\,\mathfrak{c}.$$

Sämmtliche Sätze, welche für goniometrische Sinus gelten, lassen daher auch eine Ausdrucksweise mittels der Wurzeln aus longimetrischen Sinus statt (S. 6). Demnächst wenden wir uns mit dem Verfasser zu der *Bestimmung der Lage einer Geraden mit Hilfe paralleler Axen.* Denkt man sich nämlich eine Grund- oder Mittellinie mit festbestimmten Endpunkten $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{y}_0$, deren Entfernung von einander e sein soll, und durch

diese beiden Punkte einander parallele Axen gezogen, so schneidet irgend eine Gerade diese Axen in den Punkten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$. Offenbar bestimmen alsdann die Coordinaten $\mathfrak{x}_0\mathfrak{x} = x$ und $\mathfrak{y}_0\mathfrak{y} = y$ jene Gerade mit Ausnahme des Falles $x = y = \infty$, also des Parallelismus der Geraden mit den Axen, worauf die Angabe des Schnittpunktes $\mathfrak{m}$ der Geraden mit der Mittellinie zur Bestimmung genügt, während andererseits die Festlegung von $\mathfrak{m}$ mit Hilfe von x und y keine Schwierigkeit hat und den Zusammenhang

$$tgl\,\mathfrak{m} = -\frac{x}{y}$$

ergiebt (S. 11). Hier zeigt sich also bereits eine Anwendbarkeit der longimetrischen Functionen bei Darstellung der Formeln, welche auf das neue Coordinatensystem Bezug haben, und diese Anwendbarkeit erweist sich in den folgenden Paragraphen als eine immer höhere. Während z. B. die Normalgleichung der Geraden im geradlinigen rechtwinkligen Coordinatensystem

$$x \,.\, cos\,\alpha + y \,.\, sin\,\alpha = p$$

heisst, wobei p die Senkrechte vom Coordinatenanfangspunkte auf die Gerade, α den Winkel bedeutet, welchen diese Senkrechte mit der Abscissenaxe bildet, ist hier

$$x \,.\, cosl\,\mathfrak{m} + y \,.\, sinl\,\mathfrak{m} = p$$

die Normalgleichung eines Punktes, dessen den Axen parallele Projicirende bis zur Mittellinie die Länge p besitzt und in $\mathfrak{m}$ eintrifft. Herr Unverzagt hat aus dieser Normalgleichung des Punktes im weitern Verlaufe seiner Monographie die Folgerungen gezogen, welche in Form und Inhalt jene soeben angedeutete Analogie zur Normalgleichung der Geraden fortsetzen. Er ist in einem Paragraphen (S. 23—24) auch auf die Curven zweiter Classe eingegangen, welche als von gewissen Geraden umhüllt auftreten. Endlich ist es ihm gelungen, auch in seinem Systeme trimetrische Coordinaten der Geraden nachzuweisen, mittels deren die Gleichungen homogen gemacht werden können.

Heidelberg. CANTOR.

Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale zwischen reellen Grenzen. Mit vorzüglicher Berücksichtigung der von Lejeune-Dirichlet gehaltenen Vorträge herausgegeben von Dr. G. F. MEYER. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner.

Das vorliegende, ungefähr 40 Druckbogen zählende Werk ist zwar in der Hauptsache auf Lejeune-Dirichlet's classische Arbeiten begründet, enthält aber ausserdem so viele Untersuchungen anderer Analytiker, dass es als ein ziemlich vollständiges Handbuch der Theorie bestimmter, zwischen reellen Grenzen genommener Integrale gelten kann. Der Inhalt

ist folgender: §§ 1—25: Begriffsbestimmung und Entwickelung der Fundamentaleigenschaften bestimmter Integrale; §§ 26—29: Integration rationaler Brüche zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$; §§ 30—80: Die Euler'schen Integrale und deren Gebrauch in der Theorie bestimmter Integrale; §§ 81—97: Die Fourier'schen Reihen und Integrale; §§ 98—113: Integralbestimmungen nach verschiedenen Methoden; §§ 114—122: Anwendungen bestimmter Integrale in der Reihenlehre; §§ 123—133: Entwickelung einer willkürlichen Function nach Kugelfunctionen; §§ 134—158: Die Doppelintegrale und deren Anwendungen auf Cubaturen und Complanationen; §§ 159—168: Die vielfachen Integrale im Allgemeinen und die Attraction der Ellipsoide insbesondere; §§ 169—186: Reduction vielfacher Integrale nach verschiedenen Methoden.

Die Darstellung des Verfassers ist eine sehr ausführliche und klare; besondere Anerkennung verdient die Sorgfalt, womit solche Fälle (z. B. die Discontinuität) behandelt sind, die in der That mit einer gewissen Aufmerksamkeit betrachtet sein wollen. Nur bei der Differentiation unter dem Integralzeichen vermisst Referent diese Sorgfalt. Aus

$$u = \int_a^b f(x, r)\, dx$$

folgt nämlich allerdings

$$\frac{\Delta u}{\Delta r} = \int_a^b \frac{f(x, r + \Delta r) - f(x, r)}{\Delta r}\, dx$$

oder, wenn σ den Unterschied zwischen dem Differenzenquotienten und dem Differentialquotienten von $f(x, r)$, beide genommen nach r, bezeichnet,

$$\frac{\Delta u}{\Delta r} = \int_a^b \frac{\partial f(x, r)}{\partial r}\, dx + \int_a^b \sigma\, dx;$$

bei unendlich abnehmenden Δr convergirt nun zwar σ gegen die Null, aber daraus kann nicht unmittelbar geschlossen werden, dass

$$\int_a^b \sigma\, dx$$

die Null zur Grenze habe. Daher ist auch die Differentiation unter dem Integralzeichen nicht jederzeit erlaubt, z. B. nicht bei den bekannten Integralen

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin(r \tan x) \, . \tan x\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-r},$$

$$\int_0^1 \frac{\cos\left[r\,(l\,x)^2\right]}{x}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\,r}}.$$

Im Uebrigen sei das reichhaltige, auch typographisch gut ausgestattete Werk den Jüngern der Wissenschaft bestens empfohlen.

SCHLÖMILCH.

Bibliographie

vom 1. Juli bis 31. August 1871.

Periodische Schriften.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgegeben von C. OHRTMANN und F. MÜLLER. 1. Bd., Jahr 1868, 3. Heft. Berlin, G. Reimer. ⅔ Thlr.

Journal des Collegiums für Lebensversicherungswissenschaft. 2. Bd. 4. Heft. Berlin, W. Weber Berl. Cto. ½ Thlr.

Annalen der königl. Sternwarte bei München, herausgegeben von J. LAMONT. 18. Bd. München, Franz. 1⅔ Thlr.

Annalen der Physik und Chemie, herausgegeben von J. C. POGGENDORFF. 5. Ergänzungsband. 4. Stück. Leipzig, Barth. 1 Thlr. 2 Ngr.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. Jahrg. 1871. I. Abth. 1. und 2. Heft, II. Abth. 1. Heft. Wien, Gerold. pro 1. bis 10. Heft 16 Thlr.

Repertorium für Meteorologie, herausgegeben von der kaiserl. russischen Akademie der Wissenschaften, redigirt von H. WILD. 2. Band 1. Heft. Leipzig, Voss. 2 Thlr. 2 Ngr.

Reine Mathematik.

ZORER, Integration der Differentialgleichungen ersten Grades mit constanten Coefficienten. Tübingen, Fues'sche Sort.-Buchh. ⅕ Thlr.

UNFERDINGER, F., Zur Theorie der simultanen Substitutionen in zwei- und dreifachen Integralen. (Akad.) Wien, Gerold. ⅕ Thlr.

SCHULENBURG, A. v., Die Gleichungen der drei ersten Grade. Altona, Verlagsbureau. 1 Thlr.

SCHRADER, W., Theorie der endlichen summirbaren Reihen. Halle, Buchhdlg. d. Waisenh. Verl.-Conto. $\frac{2}{3}$ Thlr.

DURÈGE, H., Die ebenen Curven dritter Ordnung. Leipzig, Teubner. $2\frac{2}{5}$ Thlr.

WEYR, E., Ueber rationale Raumcurven vierter Ordnung. (Akad.) Wien, Gerold. 3 Ngr.

PIPER, C., Gestalten der Curven vierten Grades, deren Gleichungen nur gerade Potenzen der Coordinaten enthalten. Rostock, Stiller. $\frac{1}{3}$ Thlr.

JOACHIMSTHAL, F., Elemente der analytischen Geometrie der Ebene. 2. Aufl. Berlin, G. Reimer. $1\frac{1}{5}$ Thlr.

SCHUMANN, H., Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene. Berlin, Weidmann'sche Buchhdlg. $\frac{1}{6}$ Thlr.

NIEMTSCHIK, R., Allgemeine Methoden zur Darstellung der Durchschnitte von Ebenen mit Cylinder- oder Kegelflächen, von Geraden und Kegelschnitten und von confocalen Kegelschnitten unter sich. (Akad.) Wien, Gerold. 12 Ngr.

KOUTNY, E., Beschreibung der Parabel aus gegebenen Punkten und Tangenten. (Akad.) Wien, Gerold. $\frac{1}{5}$ Thlr.

BENTER, E., Untersuchungen über Tangentialkegel und Curven zweiten Grades. Leipzig, Teubner. $\frac{2}{3}$ Thlr.

FIEDLER, W., Die darstellende Geometrie. Leipzig, Teubner. $4\frac{5}{6}$ Thlr.

STAUDIGL, R., Lehrbuch der neueren Geometrie. Wien, Seidel & Sohn. $2\frac{2}{3}$ Thlr.

RECKNAGEL, G., Ebene Geometrie für Schulen. München, Ackermann. 16 Ngr.

MEHLER, F. G., Hauptsätze der Elementarmathematik. 5. Aufl. Berlin, G. Reimer. $\frac{1}{2}$ Thlr.

LOTTNER, E., Sammlung der nothwendigsten Formeln der Algebra, Planimetrie etc. 3. Aufl. Lippstadt, Staats. $\frac{1}{5}$ Thlr.

BROCKMANN, F., Lehrbuch der elementaren Geometrie. 1. Thl. Planimetrie. Leipzig, Teubner. $\frac{2}{3}$ Thlr.

ZERLANG, K., Die Hauptsätze der ebenen Trigonometrie. Witten, Krüger. $\frac{1}{5}$ Thlr.

ZENGERLE, Die Behandlung der Raumformenlehre und des Zeichnens. Strassburg, Schauenburg. $\frac{1}{4}$ Thlr.

Angewandte Mathematik.

MAYER, E., Tiefenmessungen; ein Beitrag zur Geodäsie. Wien, Gerold. $^2/_5$ Thlr.

BAUSCHINGER, J., Elemente der graphischen Statik. München, Oldenbourg. $3^1/_2$ Thlr.

HOLZHEY, E., Beiträge zur Theorie des Erddrucks und graphische Bestimmung der Stärke von Futtermauern. Wien, Gerold. 8 Ngr.

RITTER, W., Die elastische Linie und ihre Anwendung auf den continuirlichen Balken. Zürich, Meyer & Zeller. 8 Ngr.

FUHRMANN, A., Aufgaben aus der analytischen Mechanik. 2. Thl. Aufgaben aus der Dynamik fester Körper. Leipzig, Teubner. $1^1/_5$ Thlr.

FRISCHAUF, J., Grundriss der theoretischen Astronomie. Graz, Leuschner & Lubensky. $1^1/_6$ Thlr.

GYLDÉN, H., Studien aus dem Gebiete der Störungstheorie. I. Entwickelung einiger Verbindungen elliptischer Functionen. (Akad.) Petersburg. Leipzig, Voss. $1^1/_6$ Thlr.

ENGELMANN, R., Ueber die Helligkeitsverhältnisse der Jupiterstrabanten. Leipzig, Engelmann. $1^1/_3$ Thlr.

SCHULHOF, L., Bahnbestimmung des Planeten Hecuba (108). (Akad.) Wien, Gerold. 4 Ngr.

OPPOLZER, TH. v., Ueber die Bahn des Planeten Erato (62). (Akad.) Wien, Gerold. $^1/_5$ Thlr.

SCHIAPARELLI, J. V., Entwurf einer astronomischen Theorie der Sternschnuppen. Uebersetzt von G. v. BOGUSLAWSKI. Stettin, v. d. Nahmer. $2^1/_3$ Thlr.

RÖNTGEN, R., Die Grundlehren der mechanischen Wärmetheorie. 1. Thl. Jena, Costenoble. $2^2/_5$ Thlr.

LANG, V. v., Versuche über die Einströmung von Gasen. (Akad.) Wien, Gerold. 3 Ngr.

SAINT-ROBERT, P. de, *Principes de Thermodynamique.* 2. *edit.* Turin, Löscher. $2^1/_3$ Thlr.

Physik.

BOLTZMANN, L., Einige allgemeine Sätze über das Wärmegleichgewicht. (Akad.) Wien, Gerold. $^1/_5$ Thlr.

BOLTZMANN, L., Ueber das Wärmegleichgewicht zwischen mehratomigen Gasmoleculen. (Akad.) Wien, Gerold. 4 Ngr.

TYNDALL, J., Die Wärme als eine Art der Bewegung betrachtet. 2. Aufl. 2. Abth. Braunschweig, Vieweg. $1^2/_3$ Thlr.

LANG, V. v., Ueber die anormale Dispersion spitzer Prismen. (Akad.) Wien, Gerold. $1^1/_2$ Ngr.

DITSCHEINER, L., Zur Bestimmung der Wellenlänge der Fraunhofer'schen Linien. (Akad.) Wien, Gerold. 2 Ngr.

DITSCHEINER, L., Ueber einige neue Talbot'sche Interferenzerscheinungen. (Akad.) Wien, Gerold. 8 Ngr.

DITSCHEINER, L., Ueber eine einfache Vorrichtung zur Herstellung complementärer Farbenpaare mittels Brücke's Schistoskop. (Akad.) Wien, Gerold. 3 Ngr.

SCHRÖTTER, A. v., Ueber eine merkwürdige Veränderung der Oberfläche einer Glasplatte durch eine plötzliche und heftige Erschütterung. (Akad.) Wien, Gerold. 2 Ngr.

STERN, Beiträge zur Theorie der Resonanz fester Körper mit Rücksicht auf das Mitschwingen der Luft. (Akad.) Wien, Gerold. 3 Ngr.

MEISSNER, G., Untersuchungen über die elektrische Ozonerzeugung und über die Influenzelektricität auf Nichtleitern. Göttingen, Dieterich. 1½ Thlr.

SCHELLEN, H., Der elektromagnetische Telegraph. 5. Auflage. 2. Abth. 4. Lief. Braunschweig, Vieweg. 1⅔ Thlr.

JELINEK, C., Psychrometertafeln für das hunderttheilige Thermometer. Leipzig, Engelmann. 1 Thlr. 16 Ngr.

MEYER, H., Untersuchungen über die physikalischen Verhältnisse des westlichen Theiles der Ostsee. Kiel, Schwers'sche Buchhandlung. 8 Thlr.

SUBIC, S., Lehrbuch der Physik für Unterrealschulen. Pest, Heckenast. 1 Thlr.

DORNER, H., Grundzüge der Physik. Hamburg, O. Meissner. 24 Ngr.

Literaturzeitung.

Recension.

Die Geometrie und die Geometer vor Euklides. Ein historischer Versuch von C. A. Bretschneider. Leipzig, B. G. Teubner, 1870. 8°. 184 S. 1 lithogr. Tafel.

Der Verfasser dieser ausgezeichneten kleinen Schrift hat in einem von uns seiner Zeit angezeigten Osterprogramm 1869 auf das Erscheinen seiner Untersuchungen über griechische Geometrie im Voraus hingewiesen, und das damals Versprochene liegt dem gegenwärtigen Referate zu Grunde. Herr Bretschneider nennt das von ihm Veröffentlichte einen historischen Versuch. Diese Benennung dürfte der wesentlichste Fehler sein, welcher ihm entschlüpft ist, und wenn wir auch die Bescheidenheit, welche ihn verschuldete, schätzen und achten, so darf doch eine gewissenhafte Kritik nicht dulden, dass Versuch genannt werde, was den Stempel der Meisterschaft in so unverkennbaren Zügen trägt.

Referent glaubt berechtigt zu sein, über die Schwierigkeit der Aufgabe, welche der Verfasser sich gestellt hatte, ebensowohl ein Wort mitzureden, als über die Art der Lösung derselben; er glaubt daher, man werde auch in weiteren Kreisen sein Urtheil als ein unbefangenes anerkennen, selbst wenn es Ausdrücke des Lobes verschwenderischer spendet, als es sonst wohl zu geschehen pflegt. Herr Bretschneider hat in ein Gebiet, welches, in Dunkel und Verworrenheit versunken, nur ganz vereinzelte lichte Stellen zeigte, plötzliche Klarheit gebracht. Er hat in der voreuklidischen Geometrie Perioden der Entwickelung nachzuweisen verstanden, die von nun an der Geschichte der Mathematik in doppelter Beziehung angehören werden sowohl nach chronologischer Bestimmung, als auch nach wesentlichem Inhalte. Wir wollen in dieser Beziehung nicht weiter gehen, als der Verfasser selbst. Wir sind auch der Meinung (S. 174), „der Zusammenhang der Sache könne mitunter auch wohl ein anderer sein", wir weichen selbst

in Einzelheiten von ihm ab; aber im Grossen und Ganzen halten wir die abgesteckten Grenzen, die eingezeichneten Einzelheiten für endgiltig, durch keine neue Karte der griechischen Mathematik mehr umstossbar. Zur Abfassung einer solchen Monographie bedurfte es freilich eines ebenso gewiegten Hellenisten als Mathematikers, und wenn Herr Bretschneider sich des letzteren Rufes schon lange erfreute, so scheint uns auch der erstere ihm gegenwärtig gesichert.

Sollen wir näher auf die uns vorliegende Schrift eingehen, so heben wir als erstes Verdienst hervor die Quellenkenntniss des Verfassers, welche, reichhaltiger als die irgend eines Vorgängers, es auch den Nachfolgern leicht gemacht hat, in seine Spuren zu treten oder (was übrigens nach unserer Ueberzeugung nicht zu befürchten steht) mit Benutzung seines Materials andere Vermuthungen zu begründen. Herr Bretschneider hat sich nicht damit begnügt, die Stellen alter Autoren nach Buch und Capitel zu citiren, er hat alle einzelnen Stellen, und darunter sehr wichtige, den mathematischen Kreisen durch ihn zuerst bekannt gewordene, wörtlich im Urtexte und, soweit es sich um Griechen handelte, mit vollständiger deutscher Uebersetzung abgedruckt, sowie auch überall erklärende Anmerkungen beigefügt, durch welche er etwaige Textesänderungen anzeigt und begründet. Neben diesen Vorzügen wollen wir es nicht zu ernstlich rügen, wenn Herr Bretschneider den Zeitgenossen gegenüber die Citate etwas zurückhielt, und nur wo er deren Ansichten bekämpft, nicht aber wo er sich ihnen anschliesst, die Namen dieser seiner unmittelbaren Vorgänger zu nennen pflegt.

Die Abschnitte, in welche unser Autor die voreuklidische Zeit sehr sachgemäss zerlegt, sind für Griechenland vier an der Zahl. Thales und die Geometer der Jonischen Schule (S. 35—67), Pythagoras und seine unmittelbaren Schüler (S. 67—92), die Geometer von Pythagoras bis auf Platon (S. 92—136), die Geometer von Platon bis auf Euklides (S. 137—174) bilden die Ueberschriften von ebensovielen interessanten und lehrreichen Capiteln. Als Einleitung und als Nachschrift dienen Untersuchungen einestheils über die Geometrie der Aegypter und deren Uebergang an die Griechen, anderntheils über das Zeitalter und die Leistungen einiger Geometer der Alexandrinischen Schule.

Die populäre Geometrie der Aegypter schildert der Verfasser als eine Art von Reisskunst, als eine Zusammenstellung von Regeln zur Ausführung praktisch wichtiger Aufgaben, wobei die Richtigkeit der Lösung zwar den Schluss erzwingt, dass die Erfinder auch die theoretischen Wahrheiten kennen mussten, auf welchen jene Constructionen beruhen, wobei aber jene Wahrheiten selbst nicht immer besonders bewiesen oder aus dem Gewande der Aufgabe herausgeschält und für sich gesammelt der grossen Masse überliefert wurden. Der Rhind'sche Papyrus giebt die Beweisstellen zu dieser

Auffassung auch heute schon, bevor er noch vollständig abgedruckt oder gar übersetzt ist. In ihm werden wir seiner Zeit einen Leitfaden der exoterischen Geometrie der Aegypter besitzen, wenn wir so sagen dürfen, während die esoterische, in den Priestercollegien heimlich sich fortpflanzende und entwickelnde theoretische Geometrie uns aus directen Quellen noch unbekannt ist.

Dieser Gegensatz, so tief begründet in dem ganzen Wesen ägyptischer Cultur als wurzelnd in Kastenabsonderung und hierarchischer Absperrung, liefert nun auch die Möglichkeit eines so bedeutsamen Unterschiedes in den Kenntnissen eines Thales und eines Pythagoras. Bei verhältnissmässig kurzem Aufenthalte in Aegypten lernte der Vater der Jonischen Schule fast nur die handwerksmässigen Kunstgriffe kennen und seine Nachfolger erhoben sich kaum über diesen Standpunkt, mochten sie aus der ägyptischen Quelle einen flüchtigen Trunk schlürfen oder das von Thales Ueberbrachte in unmittelbarer Lehre sich aneignen. Pythagoras dagegen, so glaubt und behauptet Herr Bretschneider mit Röth und mit uns, war lange Zeit in Aegypten, er fand Aufnahme in die eigentlichen Priesterschulen, er lernte dort die Wissenschaft der Geometrie kennen, und wenn sein reicher Geist das Empfangene auch weiter verarbeitete und zur Reife brachte, so ist es doch immerhin ägyptische Theorie, welche den Samen legte zu den Früchten der italischen Schule. Die edelste dieser Früchte wird freilich Pythagoras selbst nie abgesprochen werden können; es ist der nach ihm benannte Lehrsatz und die Entdeckung der Irrationalgrössen. Herr Bretschneider hat (S. 82) den Versuch gewagt, zu zeigen, wie etwa Pythagoras seinen Lehrsatz bewiesen haben könne, da der euklidische Beweis jedenfalls erst von diesem letzteren Mathematiker selbst herrührt. Ueber diesen Versuch ist nicht zu rechten. Er ist sicherlich ein neuer Beweis für den Scharfsinn seines Erfinders, er verwerthet auch nur Kenntnisse, welche wir Pythagoras schon zutrauen dürfen, aber wer mag mit Sicherheit sagen, so und nicht anders sei es gewesen?

Verwahrung möchten wir nur gegen eine Schlussfolgerung einlegen, welche Herr Bretschneider hier benutzt und welche gegen unsere Ansicht von den euklidischen Elementen in einigem Widerspruche steht. Herr Bretschneider verlangt nämlich (S. 81), man müsse bei Aufsuchung des ursprünglichen Beweises des Pythagoras wohl die Stellung berücksichtigen, welche sein Satz innerhalb der Elemente einnehme. Pythagoras habe seinen im ersten Buche der euklidischen Elemente enthaltenen Satz nicht mit Hilfe der Proportionslehre und der Aehnlichkeit der Dreiecke beweisen können, weil diese Lehren von Euklid erst in einem viel späteren Buche seiner Elemente abgehandelt werden. Dieser Behauptung dürfte eine zu weit getriebene Ausdehnung der an einer andern Stelle (S. 169) dargelegten Ansicht sein, wo er sagt, man erkenne, „wie irrig die bis auf den heutigen Tag von so vielen Geometern gehegte Ansicht ist, nach welcher Euklides'

Elemente ein Werk aus einem Gusse, ja zum grösseren Theile sogar eine Zusammenstellung seiner eigenen Entdeckungen sein sollen. Eine sorgfältige Prüfung des Inhalts dieses Lehrbuches lässt an gar manchen Stellen den allmäligen Gang der Entdeckungen erkennen, durch welche die Wissenschaft vorgeschritten ist, und liefert uns dadurch für die historische Entwickelung derselben Anhaltspunkte, welche auf anderen Wegen gar nicht mehr zu erlangen sind". Wir können diesen Satz vollständig unterschreiben, denn wir sind mit Herrn Bretschneider darüber einig, dass Euklid nicht nur Eigenes in seinen Elementen niedergelegt hat; haben wir doch diese Ansicht deutlich genug in unseren Untersuchungen über Euklid ausgesprochen. Aber Herr Bretschneider wird auch sicherlich darin mit uns einig sein, dass Euklid fremden Stoff verarbeitet und nicht blos gedankenlos abgeschrieben hat. Daraus folgt, dass er auch die Reihenfolge der Sätze wesentlich nach einem eigenen Plane neu geordnet haben wird, wenn er von dem historisch hergebrachten Beweise abzuweichen für gut fand, da diese Reihenfolge gerade dadurch bedingt wird, dass alles zu einem späteren Beweise Erforderliche vorhergegangen sein muss. Einem neuen, eleganteren Beweise zu Liebe kann also ein Satz viel weiter nach hinten rücken, als seine ursprüngliche Stellung war, und umgekehrt kann man ihn früher beweisen, als er nach historischem Rechte verlangen darf, um ihn selbst zu möglich vielen anderen Beweisen mitbenutzen zu können. Gerade das letztere Verhältniss ist aber bei keinem andern Satze wahrscheinlicher, als bei dem *magister matheseos*, den Euklid nach den Worten des Proklos: δ'αποδειξέως ἐναργεστάτης, d. h. durch den allerklarsten Beweis festgestellt hat, und die Klarheit steigt wohl im Allgemeinen mit der Geringfügigkeit der angewandten Beweismittel, so dass man geneigt ist, aus diesem Wortlaute eher darauf zu schliessen, der pythagoräische Gedankengang sei nicht so elementar gewesen, wie der euklidische, als dass man die entgegengesetzte Hypothese damit unterstützen möchte. Ein anderer Punkt, in welchem Herr Bretschneider unsere Ueberzeugung nicht ganz zu theilen scheint, ist das historische Verhältniss zwischen der geometrischen und der arithmologischen Form des pythagoräischen Lehrsatzes. Wenn wir die Worte (S. 82): „Zunächst aus seinem Lehrsatze leitete Pythagoras wohl das Gesetz ab, nach welchem rechtwinklige Dreiecke gebildet werden können, deren Seiten rationale Verhältnisse besitzen", richtig verstehen, so glaubt Herr Bretschneider an die geometrische Entdeckung, welcher eine Zahlenregel erst nachfolgte. Wir dagegen können uns unserer eigenen Vermuthung nicht entfremden, die Entdeckung des Satzes sei an und durch Zahlenverbindungen gemacht worden, die Beweisführung sei alsdann geometrisch versucht worden und habe nun wieder rückwärts zu der arithmetisch so wichtigen Irrationalgrösse geführt.

Aus der Zeit zwischen Pythagoras und Platon ragt als bedeutendster Mathematiker Hippokrates von Chios hervor, der erste Verfasser von Ele-

menten, der Zurückführer der stereometrischen Aufgabe von der Würfelverdoppelung auf die planimetrische Aufgabe von der Auffindung zweier mittlerer Proportionalen, der Pfadfinder auf dem Gebiete der Quadratur krummlinig begrenzter Räume, wenn es ihm auch nicht gelang, den Flächeninhalt des Kreises auszumitteln, worauf sein eigentliches Bestreben gerichtet war. In der Behandlung dieses Schriftstellers hat Herr Bretschneider sich den ganz besondern Dank der Mathematiker verdient, indem er sie auf S. 100–121 mit einem, wie man aus dieser Angabe entnehmen kann, sehr umfangreichen Bruchstücke altgriechischer Literatur bekannt macht, welches vorher niemals in mathematischen Schriften und in deutscher Uebersetzung überhaupt niemals abgedruckt war. Der Text stammt aus dem Commentar des Simplicius zur aristotelischen Physik, ist aber offenbar ursprünglich dem Eudemus entnommen, und bei diesem nahezu wörtlichen Auszuge aus der verloren gegangenen Schrift des Hippokrates selbst. Wir lernen dadurch die ganze Bedeutsamkeit dieses Geometers kennen und zugleich, was sicherlich historisch nicht minder wichtig ist, den breiten, kein Detail der Construction verschweigenden Styl der Mathematiker des V. Jahrhunderts.

Wir kommen in unserer Besprechung zu der letzten Periode, zur Zeit von Platon bis auf Euklides. Auch hier hat Herr Bretschneider die Quellen in ausgiebigster Weise zu benutzen verstanden, so dass es ihm gelang, Archytas, Menaichmos, Eudoxos aus ihrer früher nebelhaften Verschwommenheit zu mathematischen Personen umzuschaffen, deren Thätigkeit man kennen und bewundern lernt. Wir freuen uns, dass die Ansichten des Verfassers bezüglich der Priorität der Entdeckung der Kegelschnitte vor dem ersten Auftauchen des Begriffes des geometrischen Ortes (S. 170) so gänzlich mit der von uns früher ausgesprochenen Ueberzeugung übereinstimmen.

Endlich wollen wir dem Anhange des uns vorliegenden Werkes einige Worte widmen. Wir müssen denselben dringend der Aufmerksamkeit der Leser empfehlen, welche sich dadurch vielleicht zu Versuchen aufgemuntert fühlen werden, selbst den Spiren des Perseus nachzuforschen, jenen geheimnissvollen Curven, deren Entstehung nicht mit ihrer Beschreibung in Uebereinstimmung zu bringen ist.

Und somit haben wir das Ende der Bemerkungen erreicht, welche wir als Referat zu veröffentlichen beabsichtigen. Sie liessen sich leichtlich um Beträchtliches vermehren, aber dann müssten wir auf Einzelheiten eingehen, welche, nur bei genauer Zuratheziehung des ganzen Werkes verständlich, leicht den Eindruck nörgelnder Kritik machen könnten, welche wir durchaus vermeiden möchten. Liegt uns doch Nichts ferner, als durch die Detailbemerkungen den Eindruck wieder verwischen zu wollen, welchen unser erster Ausspruch über das Bretschneider'sche Werk hervor-

zurufen geeignet war und welchen wir nur auffrischen wollen, indem wir der ausgezeichneten kleinen Schrift recht viele Leser wünschen.

Heidelberg. CANTOR.

Druckfehleranzeige.

S. 57 der Literaturzeitung, Z. 1 und 3 von unten und S. 58, Z. 2, ist überall (im Ganzen viermal) statt des Pluszeichens das Multiplicationszeichen zu setzen.

Bibliographie

vom 1. September bis 30. November 1871.

Periodische Schriften.

Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Physikalische Abhandlungen aus dem Jahre 1870. Berlin, Dümmler. 3½ Thlr.

Sitzungsberichte der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physikalische Classe. 1871, II und III. Leipzig, Hirzel. ⅔ Thlr.

Sitzungsberichte der königl. bayrischen Akademie der Wissenschaften. 1871, II. München, Franz. 12 Ngr.

Journal für reine und angewandte Mathematik; begründet von CRELLE, fortgesetzt von C. W. BORCHARDT. 74. Bd. 1. Heft. Berlin, G. Reimer. pro compl. 4 Thlr.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft, herausgegeben von A. AUWERS und A. WINNECKE. Jahrg. VI, 2. u. 3. Heft. Leipzig, Engelmann. à ½ Thlr.

Reine Mathematik.

KOSSAK, E., Das Additionstheorem der ultraelliptischen Functionen erster Ordnung. Berlin, Nicolai. ½ Thlr.

RAABE, A., Lösung algebraischer Gleichungen von beliebig hohem Grade, auch mit complexen Coefficienten, mittels des Gauss'schen Schemas für complexe Grössen. (Akad.) Wien, Gerold. ⅙ Thlr.

NERLING, W., Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra. 3 Auflage. Dorpat, Gläser. 18 Ngr.

Bremiker, C., Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit sechs Decimalen. 2. Aufl. 1. Lief. Berlin, Nicolai. 12½ Ngr.

Schwarz, H. A., Bestimmung einer speciellen Minimumfläche. (Akad.) Berlin, Dümmler. 2½ Thlr.

Mink, W., Lehrbuch der Geometrie. 4. Aufl. Elberfeld, Friedrichs. 1 Thlr.

Wiegand, A., Zweiter Cursus der Planimetrie. 8. Aufl. Halle, Schmidt. ⅓ Thlr.

Lange, Th., Aufgaben aus der Elementargeometrie, nach Hauptsätzen geordnet. 1. Heft. 2. Aufl. Berlin, Bornträger. ⅓ Thlr.

Bluemel, E., Aufgaben und Lehrsätze aus der ebenen Trigonometrie. Königsberg, Hübner & Matz. 4 Ngr.

Wittstein, A., Geschichte des Malfatti'schen Problemes. Inaug.-Dissert. München, Palm. ⅔ Thlr.

Riess, C., Grundzüge der darstellenden Geometrie. Stuttgart, Metzler. 24 Ngr.

Wiegand, A., Analytische Geometrie. 3. Aufl. Halle, Schmidt. 12½ Ngr.

Brennecke, W., Einführung in das Studium der analytischen Geometrie. 1. Thl. Berlin, Enslin. ⅚ Thlr.

Angewandte Mathematik.

Kanner, M., Analytische Theorie der Ausgleichung von Sterblichkeitstafeln. Berlin, Cohn. ⅙ Thlr.

Franke, J. H., Die Dreiecksnetze vierter Ordnung als Grundlagen geodätischer Detailaufnahmen. München, Grubert. 1⅓ Thlr.

Bauernfeind, M., Ein Apparat zur mechanischen Lösung der geodätischen Aufgaben von Pothenot, Hansen etc. München, Franz. ⅓ Thlr.

Lang, V. v., Zur Dioptrik eines Systems centrirter Kugelflächen. (Akad.) Wien, Gerold. 3 Ngr.

Kayser, E., Refractionstafeln für Kreis-, Faden- und Positionsmikrometer, anwendbar bei Polhöhen von 32° bis 90°. Danzig, Anhuth. 16 Ngr.

Lippich, F., Theorie des continuirlichen Trägers constanten Querschnitts. Wien, Waldheim. 1 Thlr.

Hesse, O., Ueber das Problem der drei Körper. München, Franz. ⅓ Thlr.

Garthe, Die Absidenscheibe. Leipzig, E. H. Mayer. 8 Ngr.

Mittlere Oerter für 1871 von 539 Sternen und scheinbare Oerter von 529 Sternen des Verzeichnisses I und II u. s. w. Berlin, Dümmler. ⅓ Thlr.

VIEHOFF, H., Die astronomische und physische Geographie. 4. Aufl. Berlin, Lüderitz. 9 Ngr.

BOLTZMANN, L., Analytischer Beweis des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie aus den Sätzen über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft. (Akad.) Wien, Gerold. 4 Ngr.

Physik.

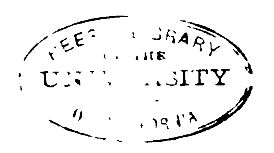
THOMSON, W., und G. TAIT, Handbuch der theoretischen Physik. Autorisirte deutsche Uebersetzung von H. HELMHOLTZ und G. WERTHEIM. 1. Bd. 1. Thl. Braunschweig, Vieweg. 2⅔ Thlr.

KOPPE, K., Anfangsgründe der Physik. 11. Aufl. Essen, Bädeker. 1 Thlr. 8 Ngr.

Zusammenstellung der von F. Strehlke in Danzig angestellten meteorologischen Beobachtungen. Danzig, Anhuth. ⅚ Thlr.

OETTINGEN, A. v., Meteorologische Beobachtungen, angestellt zu Dorpat im Jahre 1869. Dorpat, Gläser. 18 Ngr.

HELMHOLTZ, H., Rede zum Gedächtniss von Gust. Magnus. (Akad.) Berlin, Dümmler. ⅓ Thlr.



Mathematischer Abhandlungsregister.

1870.

Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.

A.

Analytische Geometrie der Ebene.

Vergl. Elliptische Transcendenten 215. Hypocycloide. Kegelschnitte. Kreis. Spirale. Trisection des Winkels.

Analytische Geometrie des Raumes.

176. *Sur une certaine famille de courbes et de surfaces.* Klein et Lie. Compt. rend. LXX, 1222, 1275.
177. *Sur la construction graphique de la courbe d'ombre ou de pénombre pendant la durée d'une éclipse de soleil.* Cayley. N. ann. math. XXIX, 289. — Laguerre ibid. 291.
178. *Sur les roulettes en général.* Aoust. Compt. rend. LXX, 978.
179. *Enveloppe du plan de deux droites perpendiculaires l'une à l'autre et assujetties à rester chacune sur un plan donné.* Brocard. N. ann. math. XXIX, 281.
180. *Distance d'une courbe à sa sphère osculatrice.* Buchonnet. N. ann. math. XXIX, 457.

Vergl. Conforme Abbildung. Geodätische Linie. Kegelschnitte 268, 269. Maxima und Minima 285. Normalen 303, 304, 305. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung. Singularitäten. Sphärik.

Astronomie.

181. *Loi du mouvement de rotation des planètes.* Flammarion. Compt. rend. LXX, 804, 922. — Quesneville ibid. 845.
182. *Méthode directe et facile pour effectuer le développement de la fonction perturbatrice et de ses coefficients différentiels.* Newcomb. Compt. rend. LXX, 385.
183. *Sur le développement algébrique de la fonction perturbatrice.* Bourget. Compt. rend. LXX, 507.
184. *Sur la théorie des marées.* Roumiantzoff. Compt. rend. LXX, 1087.
185. *Reply to Mr. Delaunay's objection to the late Mr. Hopkins's method of determining the thickness of the earth's crust by the precession and nutation of the earth's axis.* Pratt. Phil. Mag. XL, 10.
186. *Sur l'existence d'une loi de répartition analogue à la loi de Bode pour chacun des systèmes de satellites de Jupiter, de Saturne et d'Uranus.* Oltramare. Compt. rend. LXX, 739.

Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 177. Wahrscheinlichkeitsrechnung.

B.

Bestimmte Integrale.

187. *Corollaire à un théorème relatif à la valeur d'une intégrale double.* R. Hoppe. Compt. rend. LXX, 1394.

Binomialcoefficienten.

188. *Sur les coéfficients du binome de Newton.* Lucas. N. ann. math. XXIX, 308.
189. *Problèmes ayant rapport aux coefficients du développement d'un binome.* Hermann. N. ann. math. XXIX, 216.
190. *Sur une somme algébrique de produits de coefficients binomiaux.* Desiré André. N. ann. math. XXIX, 86.

C.

Combinatorik.

191. *Sur les combinaisons complètes.* Saint-Germain. *N. ann. math. XXIX,* 84.

Conforme Abbildungen.

192. Ueber Flächenabbildung. Eisenlohr. Crelle LXXII, 143.
193. *Sur les points fondamentaux de deux surfaces dont les points se correspondent un à un.* Zeuthen. *Compt. rend. LXX,* 742.
194. *Sur deux surfaces du second ordre qui se correspondent point par point d'une certaine manière.* Laguerre. *N. ann. math. XXIX,* 46.

Convergenz der Reihen.

195. *Démonstration du critérium de Gauss.* Brisse. *N. ann. math XXIX,* 36.
196. *Sur un caractère de convergence de séries.* Catalan. *N. ann. math. XXIX,* 90. [Vergl. Bd. XV, Nr. 168.]
197. *Note relative à quelques cas de convergence ou de divergence des séries. N. ann. math. XXIX,* 107.

D.

Determinanten.

198. Bemerkungen zur Determinantentheorie. Kronecker. Crelle LXXII, 152.
199. *Sur une application de la théorie des déterminants.* Gérono. *N. ann. math. XXIX,* 392.
200. *Valeur d'un certain déterminant.* Bignon. *N. ann. math. XXIX,* 561.
201. *Valeur d'un certain déterminant.* Lucas. *Compt. rend. LXX,* 1167.

Determinanten in geometrischer Anwendung.

202. *Équation de Hesse pour la détermination des points d'inflexion.* Lemonnier. *N. ann math. XXIX,* 531.
203. *Triangles et coniques combinés.* Neuberg. *N. ann. math. XXIX,* 53, 333. — Faure *ibid.* 237.
204. *Théorie des indices des points, des droites et des plans par rapport à une surface du second ordre.* Neuberg. *N. ann math. XXIX,* 317, 360, 399, 433.

Vergl. Hypocycloide.

Differentialgleichungen.

205. *Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre.* Darboux. *Compt. rend. LXX,* 675.
206. *Recherches sur les équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes.* Moutard. *Compt. rend. LXX,* 834.
207. *Rapport sur un mémoire de Mr. Moutard relatif à la théorie des équations différentielles partielles du second ordre.* Bertrand. *Compt. rend. LXX,* 1068.
208. *On the solution of linear partial differential equations of the second order involving two independent variables.* Moon. *Phil. Mag. XL,* 35, 149.
209. *Sur la théorie des équations aux dérivées partielles.* Darboux. *Compt. rend. LXX,* 746.
210. Ueber die partielle Differentialgleichung $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$. Schlaefli. Crelle LXXII, 263.

Differenzenrechnung.

211. *Sur un point du calcul des différences.* Tisserand. *Compt. rend. LXX,* 678.

Doppeltangenten.

Vergl. Geometrie (höhere) 230.

E.

Elektrodynamik.

212. Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper. Helmholtz. Crelle LXXII, 57.

Elliptische Transcendenten.

213. Beweis der Hermite'schen Verwandlungstafeln für die elliptischen Modularfunctionen. Schlaefli. Crelle LXXII, 360.
214. Algebraische Untersuchungen aus der Theorie der elliptischen Functionen. Königsberger. Crelle LXXII, 176.
215. *Sur l'existence de nouvelles classes renfermant chacune un nombre illimité de courbes algébriques planes dont les arcs offrent une représentation exacte de la fonction elliptique de première espèce.* *Allegret.* *Compt. rend. LXX,* 1032.

F.

Functionen.

216. *Identités arithmétiques* *Réalis.* *N. ann. math. XXIX,* 546.
217. *Sur quelques formes différentielles.* *Combescure.* *Compt. rend. LXX,* 1164.
218. Ueber hypergeometrische Functionen. Fuchs. Crelle LXXII, 255. [Vgl. Nr. 61.]
219. *Sur les fonctions irréductibles suivant un module premier et une fonction modulaire.* *Pellet* *Compt. rend. LXX.* 328.
220. *Sur les fonctions doublement périodiques.* *C. Jordan.* *Compt. rend. LXX,* 1128.
Vergl Bestimmte Integrale. Binomialcoefficienten. Determinanten. Elliptische Transcendenten. Invarianten. Laplace'sche Coefficienten. Productenfolge. Quadratwurzel. Ultraelliptische Functionen. Wurzelausziehung.

G.

Geodäsie.

221. *Détermination expérimentale de la forme de la terre.* *Lambert.* *Compt. rend. LXX,* 439.
222. Bemerkung zu der zweiten Gauss'schen Auflösung der Hauptaufgabe der höheren Geodäsie. Jordan Astr. Nachr. LXXVI, 305.

Geodätische Linien.

223. *On the geodesic lines on an oblate spheroid.* *Cayley.* *Phil. Mag. XL,* 329.

Geometrie (höhere).

224. *Sur la règle des signes en géométrie* *Laguerre* *N. ann. math XXIX,* 175.
225. Einige allgemeine Sätze über ebene Curven und über Flächen mit Anwendungen auf Curven und Flächen zweiter und dritter Ordnung. Joerres. Crelle LXXII, 327.
226. *Quelques résultats obtenus par la considération du déplacement infiniment petit d'une surface algébrique.* *Mannheim.* *Compt rend. LXX,* 1025.
227. *Sur les courbes gauches algébriques.* *Halphen.* *Compt. rend. LXX.* 380.
228. *Sur cinq droites situées dans le même plan.* *Weyr.* *N. ann. math. XXIX,* 324.
229. *Sur cinq droites concourant au même point.* *Weyr* *N. ann. math. XXIX,* 325.
230. Ueber die Steiner'schen Sätze von den Doppeltangenten der Curven vierten Grades. Geiser. Crelle LXXII, 370.
Vergl. Homographie. Imaginäres. Involution. Krümmung.

Geschichte der Mathematik.

231. *Sur Platon de Tivoli traducteur du XIIe siècle.* *Béziat.* *N. ann. math. XXIX,* 145. — *Boncompagni ibid.* 286.
232. *Le maitre de Descartes.* *Jouglet.* *Compt. rend. LXX,* 728.
233. *Le géomètre Charles et l'aéronaute du même nom.* *Dupuis.* *Compt. rend. LXX,* 503.
234. Nekrolog von Dr. Friedrich Tischler, † 30. September 1870. Luther. Astr. Nachr. LXXVI, 321.

Gleichungen.

235. *Méthode de l'élimination des intervalles pour servir à la résolution des équations algébriques et transcendantes.* *Hermann.* *N. ann. math. XXIX,* 180.
236. *Sur la méthode de Gauss pour l'abaissement des équations trinômes.* *Montucci.* *Compt. rend. LXX,* 445.
237. X_n *étant le polynome de Legendre l'équation* $n(n+1)X^2_n-(1-x^2)X'^2_n=0$ *a toutes ses racines réelles inégales et comprises entre* -1 *et* $+1$. *Pellet.* *N. ann. math. XXIX.* 329.
238. *Sur quelques équations ayant toutes leurs racines réelles et inégales.* *Pellet.* *N. ann. math. XXIX,* 420.

239. *Méthode et formule pour la résolution des équations du troisième dégré.* Alexandre. *N. ann. math.* XXIX, 293. — Catalan *ibid.* 379. [Vergl. Bd. XII, Nr. 271.]
240. *Sur l'équation du troisième degré.* La Besgue. *N. ann. math.* XXIX, 529.
241. *Sur l'équation du troisième degré.* Laguerre. *N. ann. math.* XXIX, 342.
Vergl. Elliptische Transcendenten 214.

H.

Homogene Differentialausdrücke.

242. Fortgesetzte Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen. Lipschitz. Crelle LXXII, 1. [Vergl. Bd. XV, Nr. 286.]

Homographie.

243. *Sur la transformation homographique.* Painvin. *N. ann math.* XXIX, 97.
244. *Sur la transformation homographique.* Faure. *N. ann. math.* XXIX, 239.
245. *Sur les divisions homographiques d'une droite.* Clavenad. *N. ann. math.* XXIX, 424.

Hydrodynamik.

246. *Sur la théorie de l'écoulement d'un liquide par un orifice en mince paroi.* Boussinesq. *Compt. rend.* LXX, 33, 177, 1279.
247. *Sur l'angle de raccordement d'un liquide avec un paroi solide.* Moutier. *Compt. rend* LXX, 612.
248. *Rapport sur la théorie des ondes liquides périodiques de Mr. Boussinesq.* De Saint-Venant. *Compt. rend.* LXX, 360.
Vergl. Wärmelehre 348.

Hypocycloide.

249. *L'Hypocycloide comme enveloppe d'une droite.* P. Serret. *N. ann. math.* XXIX, 73.
250. *Sur l'hypocycloide à trois rebroussements.* Painvin. *N. ann. math.* XXIX, 202, 256.
251. *Propositions nouvelles sur l'hypocycloide.* Laguerre. *N. ann. math.* XXIX, 254.

I.

Imaginäres.

252. *Réponse aux observations critiques de M Catalan insérées dans le numéro d'Octobre* 1869 *des Nouvelles Annales de Mathématiques.* Vallès. *N. ann. math.* XXIX, 20. [Vergl. Bd. XV, Nr. 98.]
253. *Sur l'emploi des imaginaires en géométrie.* Laguerre. *N. ann. math* XXIX, 163.
254. *Sur l'emploi des imaginaires en géométrie.* Laguerre. *N. ann. math.* XXIX, 241.
255. *Application du calcul des équipollences.* Bellavitis. *N. ann. math.* XXIX, 34.
256. *Application de la méthode des équipollences à quelques théorèmes géométriques.* Béziat. *N. ann. math.* XXIX, 124.
257. *Application du calcul des équipollences à la résolution d'un problème de géométrie élémentaire.* Françoise. *N. ann. math.* XXIX, 66.

Invarianten.

258. *Des invariants au point de vue des mathématiques spéciales.* De Campoux. *N. ann math.* XXIX, 113. [Vergl. Bd. XV, Nr. 100.]

Involution.

259. Ueber Involutionen höherer Grade. Weyr. Crelle LXXII, 285.

K.

Kegelschnitte.

260. *Propriété des bissectrices d'un angle de triangle.* Dostor. *N. ann. math.* XXIX, 547.
261. *Un cône du second degré étant donné par son sommet et une section plane, en construire les axes au moyen de coniques.* Lemonnier. *N. ann. math.* XXIX, 532.
262. *Théorème sur une conique inscrite à un triangle.* Köhler. *N. ann. math.* XXIX, 376.
263. *Relation ayant lieu par une conique inscrite dans un triangle.* Neuberg. *N. ann math.* XXIX, 136.
264. *Sur le triangle circonscrit à une conique.* Carnoy. *N. ann. math.* XXIX, 339.

265. *Si par un point* 0 *on mène trois lignes respectivement parallèles aux côtés d'un triangle donné, les six points de rencontre de ces lignes avec les côtés sont sur une conique.* *Endrès.* *N. ann. math.* *XXIX*, 559.

266. *Propriété des perpendiculaires sur les milieux des cordes* MA *et* MB *d'une conique,* A *et* B *étant deux points fixes*, M *un point variable.* *Chadu.* *N. ann. math.* *XXIX*, 142.

267. *Un cercle variable assujetti à passer par un point fixe* P *coupe une conique aux points* A, A', A'', A'''. *Démontrer que la quantité* $\frac{PA.PA'.PA''.PA'''}{R^2}$ *est constante,* R *étant le rayon du cercle.* *Grant.* *N. ann. math.* *XXIX*, 188.

268. *Loi des coniques surosculatrices dans les surfaces.* *Abel Transon.* *N. ann. math.* *XXIX*, 193.

269. *Théorème concernant les coniques ayant un contact de cinquième ordre avec une surface.* *Spottiswoode.* *Compt. rend.* *LXX*, 651, 955.

Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung 203. Normalen 302. Parabel.

Kreis.

270. *Démonstration d'un théorème de Fermat.* *Bottiglia et Isaia.* *N. ann. math.* *XXIX*, 41. — *Gerono ibid.* 43. — *Lionnet ibid.* 189.

271. *Inscrire dans un cercle un triangle isoscèle dont les deux côtés égaux passent par deux points donnés.* *Pourcheiroux.* *N. ann. math.* *XXIX*, 423.

272. *Étant donnés deux cercles, si l'on prend les polaires de ces cercles par rapport à un cercle quelconque on obtient deux coniques; les cercles qui ont pour diamètre les axes focaux de ces coniques se coupent sous le même angle que les cercles donnés.* *Endrès.* *N. ann. math.* *XXIX*, 236.

273. *Sur deux cercles qui se coupent orthogonalement.* *Aubanel.* *N. ann. math.* *XXIX*, 326.

274. *Mener à deux cercles donnés deux tangentes qui fassent un angle donné et de façon que la ligne qui joint les points de contact passe par un point donné.* *Kaher-Bey.* *N. ann. math.* *XXIX*, 283.

275. *Construction d'un cercle qui coupe sous des angles donnés trois autres cercles donnés dans un même plan.* *N. ann. math.* *XXIX*, 371.

276. *Placer sur trois circonférences données un triangle donné semblable à celui qu'on obtient en joignant deux à deux les trois centres.* *Fretz.* *N. ann. math.* *XXIX*, 285.

Krümmung.

277. *Courbure en un point multiple d'une surface.* *Painvin.* Crelle LXXII, 340.

278. *Recherches sur les pinceaux de droites et les normalies contenant une nouvelle exposition de la théorie de la courbure des surfaces.* *Mannheim.* *Compt. rend.* *LXX*, 1074.

279. *Construction de l'axe de courbure de la surface développable enveloppe d'un plan dont le déplacement est assujetti à certaines conditions.* *Mannheim.* *Compt rend.* *LXX*, 1259.

280. *Détermination du plan osculateur et du rayon de courbure de la trajectoire d'un point quelconque d'une droite que l'on déplace en l'assujettissant à certaines conditions.* *Mannheim.* *Compt. rend.* *LXX*, 1215.

281. *Sur la surface des centres de courbure d'une surface algébrique.* *Darboux.* *Compt. rend.* *LXX*, 1328.

282. *Sur la propriété dont jouit le cercle osculateur en un point quelconque d'une certaine famille de courbes.* *Allégret.* *N. ann. math.* *XXIX*, 30.

Vergl. Sphärik 338.

L.

Laplace'sche Coefficienten.

283. *On the equation of Laplace's coefficients.* *Moon.* *Phil. Mag.* *XL*, 434.

M.

Maxima und Minima.

284. *Sur un mode d'approximation des fonctions de plusieures variables.* *Didon.* *Compt. rend.* *LXX*, 749.

285. *Sur les lignes de plus grande pente à déclivité minimum ou maximum.* *Breton (de Champ).* *Compt. rend.* *LXX*, 982.

286. *Dans un triangle plan ou sphérique donné construire un triangle de même nature de périmètre minimum.* Lindeloef. *N. ann. math.* XXIX, 212.

Mechanik.

287. *Nouvelle méthode pour la solution des problèmes de la mécanique.* Piarron de Mondesir. *Compt. rend.* LXX, 92, 150, 246. [Vergl. Bd. XV, Nr. 308.]
288. *Forme d'équilibre d'un fil pesant dont la densité varie en raison inverse du carré de la longueur.* Brocard. *N. ann. math.* XXIX, 554.
289. *Sur la position d'équilibre d'un corps surnageant.* Pellet. *N. ann. math.* XXIX, 229.
290. *Sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état.* Maurice Levy. *Compt. rend.* LXX, 1323.
291. *Sur l'établissement des équations des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état.* De Saint-Venant. *Compt. rend.* LXX, 473.
292. *Sur la détermination du travail latent dans les systèmes à mouvements uniformes ou uniformément périodiques.* Boileau. *Compt. rend.* LXX, 838.
293. *On the theory of continuous beams.* Heuppel. *Phil. Mag.* XL, 446. — Rankine ibid. 457.
294. *Rapport sur la théorie de Mr. Maurice Levy de l'equilibre des terres fraichement remuées.* De Saint-Venant. *Compt. rend.* LXX, 217.
295. *Sur une détermination rationnelle par approximation de la poussée qu'exercent des terres dépourvues de cohésion contre un mur ayant une inclinaison quelconque.* De Saint-Venant. *Compt. rend.* LXX, 229, 281.
296. *Recherche d'une deuxième approximation dans le calcul rationnel de la poussée exercée contre un mur dont la face postérieure a une inclinaison quelconque par des terres non cohérentes dont la surface supérieure s'élève en un talus plan quelconque à partir du haut de cette face du mur.* De Saint-Venant. *Compt. rend.* LXX, 717.
297. *Intégration de l'équation différentielle qui peut donner une deuxième approximation dans le calcul rationnel de la poussée exercée contre un mur par des terres dépourvues de cohésion.* Boussinesq. *Compt. rend.* LXX, 751.
298. *Poussée des terres. Comparaison de ses évaluations au moyen de la considération rationnelle de l'équilibre-lemite et au moyen de l'emploi du principe dit de moindre résistance.* De Saint-Venant. *Compt. rend.* LXX, 894.

Vergl. Elektrodynamik. Hydrodynamik. Optik. Potential. Trägheitsmoment. Wärmelehre.

Molecularphysik.

299. *Note relative à l'état physique des corps.* Lucas. *Compt. rend.* LXX, 443.
300. *Calcul des paramètres physiques et des axes principaux en un point quelconque d'un système atomique.* Lucas. *Compt. rend* LXX, 509.
301. *Rapport sur la mécanique des atomes de Mr. Felix Lucas.* De Saint-Venant. *Compt. rend.* LXX, 311.

N.

Normale.

302. *Construction géométrique des normales à une conique.* Painvin. *N. ann. math.* XXIX, 348.
303. *Sur la normale en un point M d'un hyperboloide.* Laurent. *N. ann. math.* XXIX, 425.
304. *Sur le nombre des normales réelles que l'on peut mener d'un point donné à un ellipsoide.* Joachimsthal. *N. ann. math.* XXIX, 481.
305. *Normales des surfaces décrites par les points d'une droite, dont trois points décrivent chacun une surface déterminée.* Fouret. *N. ann. math.* XXIX, 330.

O.

Oberflächen.

306. *Étude analytique sur la cyclide.* Lemonnier. *N. ann. math.* XXIX, 514.
307. *Intersection d'un cylindre avec un certain paraboloïde.* Terrats. *N. ann. math.* XXIX, 44.
308. *Sur la déformation des surfaces.* Ribaucour. *Compt. rend.* LXX. 330,
309. *Sur une nouvelle combinaison des 27 droites d'une surface du troisième ordre.* C. Jordan. *Compt. rend.* LXX, 326.

310. *Sur les surfaces du quatrième ordre.* *Durrande.* *N. ann. math. XXIX*, 410, 440. — *Compt. rend. LXX*, 920.
Vergl. Conforme Abbildung 192, 193. Geometrie (höhere) 225, 226. Kegelschnitte 268, 269. Krümmung 277, 278, 279, 281. Singularitäten.

Oberflächen zweiter Ordnung.

311. *Sur une formule relative aux courbes tracées sur les surfaces du second ordre.* *Laguerre.* *N. ann. math. XXIX*, 5.
312. *Détermination des foyers d'une section plane dans une surface du second ordre.* *Sultel.* *N. ann. math. XXIX*, 463.
313. *Propriétés de la surface du second ordre.* *Lemonnier.* *N. ann. math. XXIX*, 550.
Vergl. Conforme Abbildung 194. Determinanten in geometrischer Anwendung 204. Normale 303, 304.

Optik.

314. Ueber die Fortpflanzung des Lichtes in bewegten Medien. Veltmann. Astr. Nachr. LXXVI, 129.
315. *On the refractive indices and the dispersion of opaque bodies.* *Wernicke.* *Phil. Mag. XL*, 105.
Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 177.

P.

Parabel.

316. *Propriété de la parabole.* *Leclert.* *N. ann. math. XXIX*, 337.
317. *Sur deux lieux géométriques.* *Cretin.* *N. ann. math. XXIX*, 32. [Vergl. Bd. XV, Nr. 148.]

Planimetrie.

318. *Sur la démonstration relative à la somme des angles d'un triangle.* *Bertrand.* *Compt. rend. LXX*, 17.
319. *Sur la postulatum d'Euclide.* *Lionnet.* *Compt. rend. LXX*, 31.
320. *Sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe des parallèles.* *Hoüel.* *N. ann. math. XXIX*, 93.
321. *Sur l'expression de la distance entre quelques points remarquables d'un triangle.* *Lemoine.* *N. ann. math. XXIX*, 311.
322. *Sur les perpendiculaires abaissés d'un point d'un cercle sur les côtés d'un polygone inscrit.* *Moret-Blanc.* *N. ann. math. XXIX*, 332.

Potential.

323. *Sur la fonction potentielle et le potentiel.* *Moutier.* *N. ann. math. XXIX*, 472, 489.
324. *Nouvelles propriétés de la fonction potentielle.* *Lucas.* *Compt. rend. LXX*, 1397.
325. *Sur une quantité analogue au potentiel et sur un théorème y relatif.* *Clausius.* *Compt. rend. LXX*, 1314.

Productenfolge.

326. *Démonstration d'une formule de trigonométrie.* *Realis.* *N. ann. math. XXIX*, 12.

Q.

Quadratwurzel.

327. *Sur la racine carrée des nombres approchés.* *Bourget.* *N. ann. math. XXIX*, 541.

R.

Reihen.

328. *Sur les séries de Taylor et de Maclaurin.* *Bourget.* *N. ann. math. XXIX*, 537.
329. *Sur une série déduite de séries données en multipliant tous les membres du même terme.* *De Virieu.* *N. ann. math. XXIX*, 231.
330. *Sur quelques développements en séries.* *Catalan.* *N. ann. math. XXIX*, 199.
331. *Sur les sommes de deux séries.* *Pellet.* *N. ann. math. XXIX*, 417.
332. *Sur les sommes des puissances semblables des n premiers nombres entiers.* *Lucas.* *N. ann. math. XXIX*, 49.
333. *Sur une formule trigonométrique.* *Moret-Blanc.* *N. ann. math. XXIX*, 89.
334. Ueber einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz. G. Cantor. Crelle LXXII, 130.
335. Beweis, dass eine für jeden reellen Werth von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Function $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lässt. G. Cantor. Crelle LXXII, 139.

S.

Singularitäten.

336. Ueber Singularitäten der allgemeinen Fläche n^{ter} Ordnung. Sturm. Crelle LXXII, 350.

Sphärik.

337. *Étude sur la sphère.* Niewenglowski. *N. ann. math.* **XXIX**, 26.
338. *La sphère est la seule surface dont tous les points sont des ombilics.* Welsch. *N. ann. math.* **XXIX**, 123.
339. *Lieu géométrique du centre d'une sphère qui coupe sous des angles donnés trois sphères données.* Willière. *N. ann. math.* **XXIX**, 234.
    Vergl. Maxima und Minima 286.

Spirale.

340. *Note additionnelle à la spirale équiangle.* Whitworth. *N. ann. math.* **XXIX**, 38. [Vergl. Bd. XV, Nr. 179.]

T.

Trägheitsmoment.

341. Trägheits- und höhere Momente eines Massensystems in Bezug auf Ebenen. Reye. Crelle LXXII, 293.

Trisection des Winkels.

342. *Trisection de l'angle au moyen du limaçon de Pascal.* Jouanne. *N. ann. math.* **XXIX**, 40.

U.

Ultraelliptische Functionen.

343. *Sur la bissection des fonctions hyperelliptiques.* Brioschi. *Compt. rend.* **LXX**, 504.
344. *Sur la division des fonctions hyperelliptiques.* C. Jordan. *Compt. rend.* **LXX**, 1028.

W.

Wärmelehre.

345. *On the interchangeability of heat and mechanical action.* Heath. *Phil. Mag.* **XL**, 51.
346. *On thermodynamics.* Rankine. *Phil. Mag* **LXXII**, 103, 291.
347. *On the principles of thermodynamics.* Heath. *Phil. Mag.* **XL**, 218, 429.
348. *On the thermodynamik acceleration and retardation of streams.* Rankine. *Phil. Mag.* **XL**, 288.
349. *On a mechanical theorem applicable to heath.* Clausius. *Phil. Mag.* **XL**, 122.
350. *Sur la chaleur latente de la glace.* Jamin. *Compt. rend.* **LXX**, 715.
351. *Sur les changements d'état d'un mélange d'une vapeur saturée et de son liquide suivant une ligne adiabatique.* Phillips. *Compt. rend.* **LXX**, 548.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

352. *On the probable character of cometary orbits.* Davis. *Phil. Mag.* **XL**, 183.

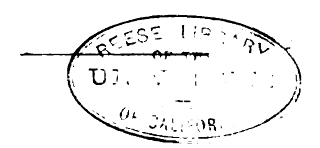
Wurzelausziehung.

353. *Sur la théorie des racines.* Bourget. *N. ann. math.* **XIX**, 505.

Z.

Zahlentheorie.

354. *Sur certaines propriétés des résidus numériques.* Laisant et Beaujeux *N. ann. math.* **XXIX**, 221, 271, 302, 354.
355. *Démonstration de la méthode de Jacobi pour la formation de la période d'une racine primitive.* Le Besgue. *Compt. rend.* **LXX**, 1243.
356. *Toute puissance entière μ d'un nombre entier l peut être obtenu en prenant la somme de l^k termes consécutifs de la suite des nombres impairs, μ, k, l étant entiers et positifs et $\mu \geqq 2k$.* Lemoine. *N. ann math.* **XXIX**, 368.
357. *Sur la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation $x^m = y^n + 1$.* Gerono. *N. ann. math.* **XXIX**, 469.


REESE LIBRARY

RETURN TO → CIRCULATION DEPARTMENT
202 Main Library 642-3403

LOAN PERIOD 1	2	3
4	5	6

LIBRARY USE

This book is due before closing time on the last date stamped below

DUE AS STAMPED BELOW

LIBRARY USE MAR 2 '77 6 1		
	REC. CIR. MAR 4 '77	
REC. CIR. JUL 8 '77		
REC. CIR. DEC 15 '77		

FORM NO. DD 6A, 12m, 6'76

UNIVERSITY OF CALIFORNIA, BERKELEY
BERKELEY, CA 94720

LD 21-100m-8,'3


GENERAL LIBRARY - U.C. BERKELEY
B000285872


72582 QA1 Z4 v.16
UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY

